世界著名数学猜想丛书

公元1742年6月7日，普鲁士历史学家和数学家克里斯蒂安·哥德巴赫(Christian Goldbach)给著名数学家沙皇彼得二世的家庭教师莱昂哈特·欧拉(Leonhard Euler)的一封信中提到了一个至今没人能完全证明的数论猜想。



公元2000年3月中旬，英国费伯出版社为配合希腊作家Apostolos Doxiadis(时年46岁的Doxiadis18岁从哥伦比亚大学数学系毕业，现从事小说与戏剧创作)的小说《彼得罗斯大叔和哥德巴赫猜想》(《Uncle Petros and Goldbach's Conjecture》)一书的出版制造舆论声势，悬赏100万美元征"哥德巴赫猜想之解"，Doxiadis的经纪人被这一举动惊呆了。出版商托比·费伯说："估计世界上有20个人有能力解答这个数学猜想。"

主编　刘培杰

从哥德巴赫到陈景润

From Goldbach to Chenjingrun

哈尔滨工业大学出版社

From Goldbach to chenjingrun

一个著名猜想　两位世纪历程

三驾数论马车　四海如潮赞誉



刘培杰
数学工作室

世界著名数学猜想丛书（第一辑）

1.《从毕达哥拉斯到怀尔斯》——费马大定理传奇

2.《从迪利克雷到维斯卡尔迪》——拉普拉斯方程边值问题杂谈

3.《从哥德巴赫到陈景润》——中国解析数论群英谱

4.《从高斯到爱尔特希》（即将出版）——素数定理100年历程

5.《从庞加莱到佩雷尔曼》（即将出版）——庞加莱猜想的终结



ISBN 978-7-5603-2243-8

9 787560 322438 >

定价 98.00 元

上架建议：科普类／数学史／解析数论／人物传记

世界著名数学猜想丛书



从哥德巴赫到陈景润

From Goldbach to Chenjingrun

主编 刘培杰

副主编 王兰新 郭梦舒

哈尔滨工业大学出版社

内容提要

全书共分三部分：第一部分皇冠上的明珠——哥德巴赫猜想简介与综述；第二部分中国解析数论群英谱；第三部分数论英雄——陈景润。

本书叙述了哥德巴赫猜想从产生到陈景润解决“1+2”问题的历史进程，突出记叙了陈景润在当时恶劣的生活环境中解决世界级数学难题的勇气、智慧和毅力，他所取得的成绩，他所赢得的殊荣，为千千万万的知识分子树起了一面不凋的旗帜，召唤着青少年奋发向前。

图书在版编目(CIP)数据

从哥德巴赫到陈景润/刘培杰主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.1

ISBN 978-7-5603-2243-8

Ⅰ.从… Ⅱ.刘… Ⅲ.哥德巴赫猜想 Ⅳ.O156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 132146 号

责任编辑 刘培杰 李广鑫 唐蕾
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 沈阳新华印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 55.25 插页 6 字数 1 020 千字
版 次 2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2243-8
印 数 1~3 000 册
定 价 98.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

⊙前言

出师未捷身先死，长使英雄泪满襟。

——杜甫《蜀相》

皇冠上的明珠

2006年，英国著名理论物理学家霍金（S. Hawking）第三次来到中国，也是陈景润逝世十周年纪念之时。

作为一流学者，霍金与陈景润确有可比之处，他们都具有传奇色彩，其病弱的躯体和天才的头脑形成鲜明对比，为世人留下了深刻的印象。因此，霍金的到来（据说是最后一次）和陈景润的纪念活动，都受到了媒体的关注。

两人还有一个非常相似之处，就是所研究的东西比较抽象，但其结论却往往通俗易懂。哥德巴赫猜想和一些数论问题，可以对每个中学生都讲清楚；而霍金的《时间简史》则对物理学和宇宙学里的一些深奥道理做了生动的描述，加上精彩的插图，让非专业读者也“找到了感觉”。数论和宇宙学就是这样在专家和公众之间保持着张力，使得学校教育很容易进入；每个孩子对科学神秘感的向往，数论和宇宙学总是两个最好的切入口。

这里暂且不说宇宙学，就谈一谈数论。

德国著名数学家克罗内克（L. Kronecker）说过：“上帝创造了自然数，其余一切都是人为。”如果说整数是如此的基本，那么素数则充满了神秘。素数在数论乃至全部数学中扮演了至关重要的角色，带给每一位智者无法割舍的情结和难以形容的喜悦。

素数主要是希腊数学的产物，早在公元前6世纪的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派就有研究。由于第一次数学危机，古希腊人没法说清楚无理数是怎么回事，就把研究重心转向几何。后来，欧几里得(Euclid)在他的13篇伟大著作《几何原本》里，还是专辟第7,8,9三篇讲述数论。尤其是在第7篇中，定义11、定义13分别说明了素数与合数。命题31说，任何一个合数都可以分解为有限个素数的乘积(差不多就是著名的“唯一分解定理”)。换句话说，素数是整数世界的“原子”。第9篇命题20则说：素数有无穷多个。这些命题可以说对初等整数论的基本结果做了相当完整的总结。

过了几百年，古典时期结束了，希腊进入亚历山大时期。这以马其顿国王亚历山大大帝(他的老师是亚里士多德)的出现为标志，此时希腊人才开始重新注意代数。丢番图(Diophantus，公元250年左右)是亚历山大后期最伟大的数学家，代数和算术的发展在他手里达到了至高点。之后数学一直缓慢地发展着。直到17世纪，法国的一位律师、业余数学家费马(P. Fermat)重新燃起了人们对数论的兴趣，他本人也做出了许多了不得的成绩。18世纪中叶，当时世界上两位最伟大的数学家——瑞士的欧拉(L. Euler)和法国的拉格朗日(L. Lagrange)都十分钟情于曾被忽略上千年的数论，使数论的地位大幅提高。18世纪末期，一位科学天才横空出世，改变了德国科学落后于法国的局面，他就是高斯(C. F. Gauss)。作为有史以来最伟大的数学家之一，以及杰出的物理学家、天文学家，高斯一生贡献无数，但他最最钟爱的，是年轻时做的第一项工作——数论。这门让法国人为之骄傲了150多年的学问，现在被一个德国人超过了。

高斯曾充满深情地说：“数学是科学的皇后，数论是数学的皇后。”前苏联著名数学家辛钦(A. Y. Shinchin)则把这门迷人的学科中最著名的哥德巴赫猜想称为“皇冠上的明珠”。数学中的猜想不计其数，唯独这个猜想有这么动听的比喻，也唯独这个猜想至今仍牵动着千千万万人的心。

稍微了解点数学史的人都知道，数学中素有“六大难题”的说法，即古代“三大尺规作图问题”——三等分任意角、立方倍积、化圆为方，以及近代的费马大定理、哥德巴赫猜想和四色猜想。其实重要的数学猜想很多，这六个猜想的特点不过是叙述通俗，人人能懂，当然它们对于数学本身也确实是重要的。在数学家的不懈努力下，六大难题中如今只剩哥德巴赫猜想依然悬而未决。

就这六大难题的解决情况来看，也十分耐人寻味。这些难题都依赖于数学理论和计算能力的推进。“三大尺规作图问题”困扰了数学家几千年，到19世纪群论建立后几乎是一举解决。四色猜想则是早就给出了解决方案，等计算机计算速度提高后也很快就被证明。至于费马大定理，在1637年提出至1994年解决前，阶段性成果时断时续。相比之下，哥德巴赫猜想十分之特殊，在它提出来将近200年里，人们对它几乎是束手无策。在20世纪上叶和中叶有过一次

高潮，现在似乎又进入了一个相对沉寂的时期。可以说哥德巴赫猜想是六大难题中“最难啃的骨头”。260多年过去了，这颗明珠依然光芒四射，令人向往，却又那么的遥不可及。

信中提出的猜想

哥德巴赫(C. Goldbach)是东普鲁士人，1690年出生于“七桥”故乡哥尼斯堡的一个官员家庭。20岁后，他开始游历欧洲，结识了莱布尼茨(G. W. Leibniz)、伯努利(Bernoulli)兄弟等著名数学家。1725年左右，他自荐前往彼得堡科学院任职，几经周折后方获批准。两年后，瑞士大数学家欧拉也来到科学院，两人结为好友。哥德巴赫主要研究微分方程和级数理论。

1728年1月，哥德巴赫受命调往莫斯科，担任沙皇彼得二世等人的家庭教师。1730年，沙皇得了天花猝死，但哥德巴赫在皇室中依然受宠。1732年，他终于重新回到了彼得堡科学院。此时由于他的政治地位越来越高，1742年被调到外交部，从此仕途一帆风顺。1764年，哥德巴赫在莫斯科去世。尽管是非职业数学家，但他出于对数学的敏锐洞察力，以及与许多大数学家的交往，积极推动了数学的发展。

从1729年到1763年，哥德巴赫一直保持与欧拉通信，讨论数论问题。1742年6月，当时在柏林科学院的欧拉收到移居莫斯科的哥德巴赫的来信，全文如下：

> 欧拉，我亲爱的朋友！你用极其巧妙而又简单的方法，解决了千百人为之倾倒而又百思不得其解的七桥问题，使我受到莫大的鼓舞，一直鞭策着我在数学的大道上前进。
>
> 经过充分的酝酿，我想冒险发表一个猜想。现写信以征求你的意见。我的问题如下：随便取某个奇数，比如77，它可写成三个素数之和：$77 = 53 + 17 + 7$，再任取一个奇数461，那么$461 = 449 + 7 + 5$也是三个素数之和。461还可以写成$257 + 199 + 5$，仍然是三个素数之和。这样，我就发现：任何大于5的奇数都是三个素数之和。但是怎样证明呢？虽然任何一次试验都可以得到上述结果，但不可能把所有奇数都拿来检验，需要的是一般的证明，而不是个别的检验，你能帮忙吗？
>
> 哥德巴赫 6月7日

其实，这一猜想早在笛卡尔(R. Descartes)的手稿中就出现过。哥德巴赫提出时已晚了100多年。看来一个重要的猜想迟早会受到人们的重视。

不久，欧拉回了信：

> 哥德巴赫，我的老朋友，你好！感谢你在信中对我的颂扬！
>
> 关于你的这个命题，我做了认真的推敲和研究，看来是正确的。但是，我也给不出严格的证明。这里，在你的基础上，我认为：任何一个大于2的偶数都是两个素数之和。不过，这个命题也不能给出一般性的说明。但我确信它是完全正确的。
>
> 欧拉 6月30日

后来，欧拉把他们的信公布于世，吁请世界上数学家共同求解这个难题。数学界把他们通信中涉及的问题统称为“哥德巴赫猜想”。1770年，华林（E. Waring）将哥德巴赫猜想发表出来。由于人们早已证明“每个充分大的奇数是三素数之和”（下文会提到），现在的哥德巴赫猜想亦仅指偶数哥德巴赫猜想。

“上帝让素数相乘，人类让素数相加”

整整2000年，人们一想到素数就是把它们相乘，没人想知道素数相加又是怎么回事。连20世纪前苏联最有名的物理学家朗道（L. D. Landau）在读到哥德巴赫猜想时，也不禁惊呼：“素数怎么能相加呢？素数是用来相乘的！”这么说来，克罗内克的话可以改造成“上帝让素数相乘，人类让素数相加”。提出这个猜测确实需要想象力，不过朗道也不无道理，所有这类“人为”的猜想都要冒些风险，多数因为对数学价值不大而被遗忘或忽略。好在哥德巴赫猜想并不然，历史证明它是一个具有重大理论价值的命题，完全打开了数学的新境界。

然而，自哥德巴赫、欧拉、华林“激起一点浪花”，18世纪在这个问题上没有取得丝毫进展，整个19世纪也悄无声息……

20世纪的钟声快要敲响了。1900年8月，德国数学家希尔伯特（D. Hilbert）走上了国际数学家大会的讲坛。在简要回顾了数学的历史及对新世纪的展望后，这位当时的世界数学领袖提出了著名的“23问题”，哥德巴赫猜想被列为第8问题的一部分。最后，希尔伯特以他的祝愿——20世纪带给数学杰出的大师和大批热忱的弟子——结束了他的世纪演讲。不久，他就注意到一位英国数学家开始崭露头角，他的名字叫哈代（G. H. Hardy）。

1920年前后，这位不列颠绅士和同事李特伍德（J. E. Littlewood）写了一篇长达70页的重量级论文，在文章里提出了圆法。哈代在皇家学会的演讲中说：“我和李特伍德的工作是历史上第一次严肃地研究哥德巴赫猜想。”不过，哈代和李特伍德对奇数哥德巴赫猜想的证明依赖于一个条件——广义黎曼假

设——这个猜想到现在也未被证明。

1937年，苏联顶尖的数论大师维诺格拉多夫(I.M.Vinogradov)改进了圆法，创造了所谓的三角和(或指数和)估值法。运用这一强有力的方法，维氏无条件地基本证明了奇数哥德巴赫猜想，即任何充分大的奇数都能写成三个素数之和(尽管小于这个“充分大”的数计算机还未能全部验证，但那是次要的事)。

维诺格拉多夫出生于牧师与教师家庭，从小具有绘画才能。1910年，他进入彼得堡大学，在学习期间对数论产生了浓厚兴趣。后来他获得硕士学位，并任列宁格勒大学教授。1929年当选为苏联科学院院士，1934年起到去世为止他一直是科学院的斯捷克洛夫数学研究所所长。维氏独身，体格健壮，90岁了也不乘电梯。他还十分好客，能容忍各种人一起工作，这对前苏联数学的发展起到了积极推动作用。

为什么是奇数哥德巴赫猜想先解决呢？因为奇数哥德巴赫猜想比较容易，表示成三个整数和的方式要比两个整数和多得多，由此可以得出结论：表示成三个素数和的可能性，也要比表示成两个素数和的可能性大许多，而且它是偶数哥德巴赫猜想的推论：如每个大偶数都能写成两个素数之和，那么任何大奇数都是三个素数之和，因为任何奇数减去3都是一个偶数，当然减去5，7…也一样。由此看来，偶数哥德巴赫猜想要强得多(自然也难许多)，因为它一旦成立，奇数哥德巴赫猜想中的“三个素数”中有一个可随意选取。数学家关于这个猜想难度的估计完全被历史证实，相比之下，庞加莱猜想和黎曼假设的难度就曾一度大大超乎人们的意料。由于问题久攻不克，数学家们开始考虑从另外的角度来研究这个问题。运用估计的方法，1938年，我国著名数学家华罗庚证明：几乎所有的偶数都是两个素数之和。

一个退而求其次的显然的想法是，“两个”不行，多一点总比较容易吧？这就是德国著名数论专家朗道(E.Landau，不是前面提到的那位大物理学家！)的想法。在1912年国际数学家大会上，他提出一个猜想：存在一个常数 C，使每个整数都是不超过 C 个素数的和。但他悲观地表示，即使这一“弱”的命题也是那个时代的数学家无能为力的。

但到1933年，情况出现了很大变化，一位年仅25岁的苏联数学家须尼尔曼(L.G.Shnirelman，他只活了33岁)发明了至今仍有生命力的密率方法，由此他证明 $C \leqslant 800\ 000$。这个结果不断刷新。到1970年，沃恩(R.Vaughan)证出 $C \leqslant 6$。一般来说，密率法的优点是避免了“充分大”，可适用全体偶数。最近已有数学家证明，全体大于6的偶数都可表示为4个素数之和。

从筛法到陈氏定理

除了对素数个数动脑筋外，还有人对素数本身做出“让步”，即仍然是两个

数，但不是素数，而是殆素数，即素因子个数不多的正整数。设 N 为偶数，现用"$a+b$"表示如下命题：每个大偶数 N 都可表为 $A+B$，其中 A 和 B 分别是素因子个数不超过 a 和 b 的殆素数。显然，哥德巴赫猜想就可写成"1+1"。在这一方向上的进展都是用所谓的筛法得到的。目前看来，殆素数这条途径的成果最为突出。

筛法最早是古希腊著名数学家埃拉托塞尼(Eratosthenes)提出的，这一方法具有强烈的组合味道。不过原始的筛法没有什么直接用处。1920 年前后，挪威数学家布朗(V. Brun)做了重大改进，并首先在殆素数研究上取得突破性进展，证明了命题"9+9"。后续进展如下：拉德马赫尔(H. Rademacher)："7+7"(1924 年)；埃斯特曼(T. Estermann)："6+6"(1932 年)；里奇(G. Ricci)："5+7"(1937 年)；布赫夕塔布(A. A. Buchstab)："5+5"(1938 年)，"4+4"(1940 年)；库恩(P. Kuhn)：$a+b\leqslant 6$(1950 年)。1947 年，挪威数学家、菲尔兹奖得主塞尔伯格(A. Selberg，2007 年以 90 高龄去世)改进了筛法，由此王元于 1956 年证明了"3+4"。另一个苏联数学家 A. 维诺格拉多夫(A. I. Vinogradov，不是前面提到的那位)于 1957 年证明"3+3"，王元在同年进一步证明"2+3"。

一切都像是奥运会纪录，不断地被刷新。

上述结果有一个共同特点，就是 a 和 b 中没有一个是 1，即 A 和 B 没有一个是素数。要是能证明 $a=1$，再改进 b，那就是件更了不起的工作。前苏联天才数学家林尼克(Y. V. Linnik)于 1941 年提出一种全新的筛法使得这项工作成为可能。人们把这种方法称为大筛法，而原先的筛法则称做小筛法。

1932 年，埃斯特曼在广义黎曼假设成立的前提下首先证明了"$1+b$"。林尼克的学生、匈牙利数学家瑞尼(A. Rényi)于 1947 年对林尼克的大筛法做了重要改进，结合布朗筛法，于 1948 年无条件地证明了命题"$1+b$"，b 是个确定的数，不过非常大。1962 年，潘承洞一下子把 b 从天文数字降到了 5(即"1+5")。不久王元证明了"1+4"，并指出在广义黎曼假设成立的前提下可得出"1+3"。同一年，潘承洞也证明了"1+4"。然后，布赫夕塔布证明了潘承洞的方法可推出"1+3"。1965 年，意大利数学家朋比尼(E. Bombieri)与 A. 维诺格拉多夫无条件地证明了"1+3"，这是朋比尼获得菲尔兹奖的工作之一。

当时国际数学界有一种观点认为"1+3"已不能再改进。但就在 1966 年，一位年轻的中国数学家在《科学通报》上刊登了命题"1+2"证明的简报(由于未附详细证明，国际数学界没有完全接受)，他就是传奇数学家陈景润。

陈景润于 1933 年出生于福州，家境贫寒。1949 年，他考入厦门大学数学系，毕业后几经周折最终留校任助教。此时的他已熟读华罗庚的著作，并开始思考哥德巴赫猜想。由于在一个数论问题上的见解而引起华罗庚的注意，1957 年他被调到中科院数学研究所。因为各种因素，华罗庚组织的哥德巴赫猜想讨

论班就在当年结束了。后来，尽管陈景润数学研究方面的好的结果层出不穷，但他还在想碰一碰这个猜想，当时人们不太在意。

1966年，文革开始了，《科学通报》与《中国科学》随即停刊。由于国际数学界的观点及政治因素，只有闵嗣鹤等少数数学家确信（并审读了）他的论文。1973年《中国科学》复刊之后，证明的全文才得以发表。陈景润改进筛法的方法叫“转换原理”，“1+2”被称为“陈氏定理”。数学家们对这个成果极为钦佩。哈伯斯坦（H. Halberstam）与里切特（H. E. Richert）在名著《筛法》的最后一章指出：“陈氏定理是所有筛法理论的光辉顶点。”华罗庚则说，“1+2”是令他此生最为激动的结果。

整整40年过去了，陈景润所达到的高度依然无人超越。大家公认再用筛法去证明“1+1”几乎是不可能的。尽管国际上为这一猜想的证明屡设重奖，但却始终无人能够领取。目前“1+1”仍是个相当孤立的命题，与主流数学比较脱节。数学界的普遍看法是，要证明“1+1”，必须发展革命性的新方法。

“明星科学家”喜忧录

以上就是哥德巴赫猜想的研究简史，但对于这个猜想和陈景润，对于这本书，还有不少的话要说。

十年浩劫结束后，徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》传遍神州。曾被看做“丑小鸭”的陈景润因为其无比刻苦的形象，很快就成为亿万中国人的偶像。哥德巴赫猜想作为一个纯数学猜想，即刻成为中国老百姓的一个“情结”。应该说，这是中国的一个空前纪录(恐怕也是绝后的)，因为以往按照中国传统，能得到赞扬的无非都是帝王将相的“文治武功”，或是老百姓的“忠君”、“孝悌”，而陈景润的出现(还有孙中山、鲁迅和雷锋等)，确实代表了一种全新的“元素”，在中华大地上堪称史无前例。陈景润本人于1996年过早去世，哥德巴赫猜想还未最终攻克。他的离席不禁使我想起杜甫的名句——“出师未捷身先死，长使英雄泪满襟。”

同样，当霍金第一次访华时，还几乎默默无闻。不久，《时间简史》的第一部中译本由清华大学出版社出版，名为《时间的简明历史》，作者“郝京”。但就在几年后，霍金便一跃成为公众心目中最著名的在世科学家。而若问在世科学家中谁的贡献最大？我想普通公众大多也说是霍金，至于科学家的答案想必是五花八门的。

也难怪！“物以稀为贵”，诺贝尔奖至今有成百上千的人获得，菲尔兹奖得主也已达四十多位，而“明星科学家”，恐怕只有霍金、纳什(J. Nash)两位了。

霍金后两次远行中国，与著名华裔数学家、菲尔兹奖获得者丘成桐教授有直接关系。丘成桐特地把老朋友霍金请到中国，应该说与媒体炒作的“威力”有

些关系。事实证明，这一做法非常聪明。人们平时太关注歌星、影视或体育明星了，科学家就真的只该默默奉献？在欧美，科学家必须向纳税人即公众讲清楚他们拿这些钱究竟做了什么有意义的事，这不能说是自我标榜吧。即使科学家真的成了“明星”，也是件好事。现在这类“明星”实在太少了，我们的媒体应该为更多的科学家做宣传！

但从另一方面来说，今天的“明星科学家”现象还是有让人忧虑之处。

在世科学家中有那么多成就卓著的诺贝尔奖获得者，他们为什么很快就被人忽视了呢？答案很简单，生活太平淡，没有可供炒作的素材。霍金和纳什就不同了，一个生理残疾，一个心理残疾。于是，《时间简史》就最畅销了。尽管其他许多科普书同样优秀，唯有霍金的书最好卖，连那本艰深的《时空本性》也卖得很好，读者们实在是太“吃”霍金的个人魅力了。而《美丽心灵》则被拍成电影，获得了奥斯卡奖，原著当然也颇受欢迎。

陈景润的情形不大一样，他的出名是因为文革结束后人们对科学春天的渴望。不过，笔者还是认为陈景润是中国第一个明星科学家。霍金不算世界上第一位明星科学家。第一个世界级的明星科学家，笔者以为是费曼(R. Feynman)。最近读了田松翻译的《宇宙逍遥》，作者是著名物理学家惠勒(J. Wheeler)，今年97岁了。他是爱因斯坦与玻尔的学生及同事，沃尔夫奖获得者，又是费曼的老师，还提出了“黑洞”这一名词，对霍金的工作也有重要影响。如此漫长而多姿多彩的生命故事反映在这部出色的科学随笔之中。但是，惠勒缺少媒体炒作，论学术水平他并不差；论名气(比起费曼、霍金来)实在是差得太远了！爱因斯坦时代以及更早的时代则截然不同。那时有个科学家整体，除了爱因斯坦，居里夫人、爱迪生、玻尔(N. Bohr)、奥本海默(J. Oppenheimer)等数十位科学家也广为人知。他们名气大是因为成就高，你听说过那时有位不大出名的科学家其成就堪与爱因斯坦比肩吗？

现在的一些做法确实是过于极端和夸张了。现代人在紧张忙碌的工作之余，沉溺于媒体制造的“快餐文化”之中，信息是灵通的，但了解未必全面透彻。几年前，BBC广播电台让英国公众选出“最近1000年来10个最伟大的思想家”，结果霍金也名列其中，与马克思、爱因斯坦、牛顿和达尔文等并列，且得票居中，比尼采还高。如果说这不算英国公众无知的典型事件的话，那么在最近的一次民意调查中，“戴妃的车祸”竟被选为20世纪最有震撼力的事件，连两次世界大战、阿波罗登月、核武器与因特网的发明都排到老后头，是不是有点不可原谅了呢？

至于霍金本人倒十分实事求是，这位“继爱因斯坦以来世界最杰出的物理学家”在《时间简史》里提到众多科学家的贡献，并没有过分抬高自己。公众对他身残志坚精神的推崇自然无可非议，从这点上看，说他“伟大”也情有可原。

霍金已被偶像化，在科学上他离开公众的距离，其实一点也不比其他科学家的来得小。（几乎同时，在物理学家评出的“有史以来最伟大的10个物理学家”中就没有霍金。伟大物理学家应是伟大思想家的“子集”吧，似乎霍金可以轻而易举当上皇帝，却无法当一个臣子，也算是精英与草根之差距的一个小小插曲。）

霍金与纳什尽管有炒作的成分，毕竟是货真价实的科学大家；陈景润也一样。现在还有很多并不出色的人被无限夸大，那就更可怕了。不过也不必悲观，因为这个“明星科学家”现象是一必然过程，与经济、社会和教育都有紧密的关联。

尽管东西方学校教育大相径庭（比如我们称赞他们的个性化教育，他们称赞我们基础扎实），但对学校教育的排斥、文化的浅薄、追求享乐，是当今全世界年轻人的普遍现象。20世纪60年代欧美学生的带有反智色彩的嬉皮士运动是为了政治和思想的需要；而今天的新蒙昧主义，则完全是经济和文化原因造成的。正如世界著名数学家阿诺德（V.I.Arnold）在一篇纪念他伟大的导师柯尔莫戈罗夫（A.N.Kolmogorov）的文章中说的：

> 美国的同事对我解释说，他们国家中公共文化与学校教育的低水准是为了经济目的而有意形成的结果。问题在于，读了许多年书之后，受教育的人就成为最坏的顾客，他较少买洗衣机和汽车，与其要这些，他宁愿要莫扎特或凡·高、莎士比亚或各种定理，消费社会的经济因此蒙受损失，首当其冲的是老板们的生活收入——所以他们追求的是不容许人们有文化修养和受良好的教育（否则将妨碍他们操纵人们犹如对待无知牲畜）。

在2002年巴黎一所大学的面试中，阿诺德考问了几个所谓最好的教授候选人，发现他们惊人地无知。作为“精英中的精英”，阿诺德自然因当权者大幅降低教育水准而极为不满（柯尔莫戈罗夫作为教育家也遭受过类似打击郁郁而终）。那些俄国教改者正是以美国为例子，说明教改是为了发展经济的需要而必须做出的抉择。这股热潮近十年来席卷全球，在中国就是新读书无用论和草根文化的抬头。

10多年前，我曾在高中数学班呆过一段时间，数学尖子中愿意走学术道路的很少。尽管科学研究不应太功利，但在那个时代由于对科学家有一种（智力上的）英雄崇拜，因此渴望胜人一筹也不能说不是一种动力。这种动力来自社会的总体评价，倒也不是专为到某某面前去炫耀一番。我的同学邵亦波当初到哈佛就是想得诺贝尔奖，后来他放弃了，开办了易趣网。其实早在当时我就隐隐约约感觉到享乐主义和别的什么主义是如何把这一总体评价给逐渐“解构”

的。接下来的10多年里，我经常敏感地发现自己的努力是南辕北辙，不仅不会得到人家的理解和欣赏，而且还要因为自己"玩不转"而遭到嘲笑。阿诺德至少是沃尔夫奖获得者，为学术价值的糟蹋还能愤愤不平地说上几句话，然大势已定，他也激不起多少波澜。

一方面，教育的要求越来越高；另一方面，消费社会又基本上不需要这些知识，所以在今天，被人叫好的"明星科学家"横空出世，与两者之间的矛盾有密切联系。

向往精英文化的人群

目前，精神文化的承担者，除了国家领导层、文人和宗教团体，还有歌星、体育明星及某些著名主持人，前者对成年人影响比较大，后者主要针对青年人。这是世界各国的普遍现象。而大量高校优秀毕业生进入公司，当上了令人羡慕的白领，他们有很高的薪水，但主要从事物质建设，对精神文化的建构已失去了机会。

科学院和高校也似乎从公众的视野中"隐退"了，只限于自己的小圈子里。也许你有疑问，凭什么说文化只能由文人独享？科学家难道就只是在开创物质文明吗？事实上，准确地说，科学院和高校的文化是精英文化（学术骗子另当别论），与大众的草根文化有很大差异，所以大家各司其职、互不干扰也是正常的。

但遗憾毕竟存在，因为历史上并非没有先例，爱因斯坦时代就是明证。霍金在今天的影响远不及爱因斯坦在当时的影响。从时代来说，一战标志现代化的开始，一战与二战之间还有一个现代与传统的抗争期。二战以后，世界完全进入了现代化。现代化一来，精神文化人的地位急剧下降，以至出现了福柯(M. Foucault)哀叹的"最后的知识分子"现象。爱因斯坦很幸运，因为他的伟大贡献都是在一战前或一战期间做出的。事实上，他与达尔文、弗洛伊德一样，其工作至少在相当长的一段历史时期内并非主流，广义相对论甚至在今天都不是物理学最主流的分支（试与牛顿的工作相比），但为什么有这么大的名气呢？这是因为从伽利略到爱因斯坦这段历史时期，科学一直是建构精神文化的一支不可或缺的力量。

然而在今天，这支力量已从整体上消失。似乎就像"热寂"一样，最多就是些炒作一时的稍稍偏离均衡的"涨落"而已。比如陈景润，他的工作是一般人无法理解的，但为什么有那么多人关注呢？在某种意义上讲是因为"文化大革命"结束后科学春天的到来。如果陈景润的工作在今天的话，影响无疑会大打折扣。怀尔斯(A. Wiles)在1995年证明了费马大定理，应该说贡献极大，但为时已晚！后现代社会中人们对此兴趣不高，所以其影响力比较有限。

受市场的冲击，文化精英尽管没有被忘得一干二净，其处境多少有点尴尬。他们内心对公众可能不屑，但多数还是入世的，演出要人捧场，出书要有人买、

有人读。所以在经济上他们又直接依附于公众。这一复杂心态多少有点像孔乙己。等到那批精英有了一点知名度,年龄也大了,于是有人组织他们出席一些演讲会。主办方客客气气,价钱公道;听众有认真的,也有打瞌睡的。这时,我们的主讲人再也不是饥肠辘辘忙于推销自己,而是一身西装闪亮登场。几个小时以后,报告会在一阵掌声中结束,在人们的记忆中几乎不留下痕迹。现在与孔夫子时代不同,新思想太多太滥,所以存在一个选择问题,大多数就像一股热气消散在空气中,极少数转变为可持续发展的"功"。选择也可能是优胜劣汰,也可能是劣胜优汰(不过最好的东西总是会冒出来,至于是张三还是李四提出则具有偶然性)。伟人时代一去不复返了。

至于那些听众,笔者以为是对精英文化向往的人群。他们的处境又如何呢?社会对精英们是照顾的:他们走在马路上也没几个人认识,其工作也没几个人懂,但毕竟得到了社会的承认,本人的生存当然也决无问题。近年来,中国数学界的头面人物一直为数学人才的培养而感到忧虑(与阿诺德的感觉类似),但可能忽略了另一群人的培育(当然这是全社会的任务,不是数学家的单独使命)。而渴望走进科学殿堂而不得入者,更是寂寞之极,甚至生存都有困难。高不攀低不就的下场,就是被主流社会逐渐边缘化。最终未被边缘化的,是极少数精英在那里扯着嗓子呼吁,还有一大批认定"戴妃车祸是20世纪最震撼事件"的草根族。

是啊,对精英和精英文化的向往到底为了什么?从对策论的角度看,这不是利益最大化的选择。花了力气看懂那些东西,却不能成为朋友、同事或亲密异性之间的谈资;衣着不得体、生活不时尚倒是要被讥讽为傻瓜。另一方面,当这些人在一次学术报告结束时请主讲人签字或合影留念的时候,只要看看那主讲人的表情就知道,精英们对待听众是有较大心理距离的。似乎渴望了解精英文化的人的下场,还远不如选择吃喝玩乐。知识越多越寂寞,精英和精英的追随者,无论如何都有点"殉道"色彩——后者甚至有过之而无不及。这就是目前的状况,是学校教育和生存竞争之间的矛盾产生的,或者说是理想主义遭遇现实后的窘境。其实,没有这一人群为精英喝彩,精英都会变成"孤家寡人",而他们造成的声势,最终只能和考试制度一样,产生"虚假的繁荣"。

正是因为科学家曾一度被捧上天,今天在整体上相对冷落了,所以才会出现媒体炒作的"明星科学家"。某种意义上说,20世纪80年代初的陈景润热以及基本粒子物理热(杨振宁和李政道获诺贝尔奖后,粒子物理研究得到毛泽东等的肯定),其实更"不理性",它是"官方意识形态"导致的一个结果,由此不幸产生很多"民科",直到后来著名物理学家谢希德呼吁不要再一味地宣传了,此时已有不少天真无知的青少年走上这条绝大多数人决不可走的道路,因而毁了一生。今天的"明星科学家"现象,则是为科学家价值、为精英文化争取一席之地的努力(社会总有这方面的呼声),不再像以前那样"误导"世人了,但又过于

强调其传奇色彩、可供炒作素材，故而也是远远不够的。

毋庸说，没有科学和数学，人类无法搞工程、武器、金融、通讯……但对于一个普通公民，科学与数学的真正价值又是什么？我们为什么要对普通公众进行科学普及呢？我想起以前冯友兰先生曾经对哲学普及做过一个回答：提高人的境界；对于科学与数学普及的作用，我的类似想法是，让人们走出自我、超越自我，也就是知道“天高地厚”。

公众对科学认识的巨大误区在于：他们只承认科学可以转化为技术和生产力的功能，忽略了科学本身之理论建构的重大意义，更没有想过科学是怎样影响人类社会与文化的。而许多科学家对科学认识也有误区：他们既明白科学转化为技术的力量，也充分认识到科学理论建构的重大意义，就是忽略了科学对社会和文化的影响。陈景润的一炮打响，霍金畅销书的出现，对后两者的认识起到了推波助澜的作用。但比之西方，我们显然是远远不够的。

所以我相信，在今后，好的科普（或者说是所有精英文化的普及读物）将越来越重要，这不仅能唤起小孩对科学的热情，引导他们走上科学之路，对于科学圈子之外然而对科学有兴趣的成人也能提供正确的引导。霍金等国外一流的大师都参与科普写作。好的科普绝对是在精英与向往精英文化的大众之间架起了一座桥梁。霍金的书（即便是令人望而却步的《时空本性》）之所以畅销，最主要原因是他本人的传奇色彩、媒体的炒作，当然也正是反映了一批受过教育然而不在圈子里的人士对精英文化的渴求与向往。科普是大众比较轻松地了解精英文化皮毛的渠道。前面说过，陈景润时代的大众科学素质普遍较低，中国出了无数让人又恨又怜的“民科”，经常赖在科研院校里，拿着自己的“成果”，声称自己“证明”或“推翻”了哥德巴赫猜想；现在读霍金的年轻人不大会妄图推翻他的黑洞理论了，这是一个进步。

今后，科普特别是高级科普，将与科学研究一样，成为精英文化的重要组成部分，而读者也具备足够的见识，作者本人的传奇色彩或媒体的炒作也许会被摆到一个次要的位置（尽管阿诺德所说的现象一时无法改变）。于是科普也就源源不断地为绝大多数无法再从事艰深工作然而对科学（或精英文化）有兴趣的人提供平台，科学也就能成为他们的谈资。笔者不相信只有猎奇故事或小道消息才能吸引大家的眼球，其实正儿八经的科学理论要精彩得多，指望这些东西能激起所有人的兴趣是不可能的，但应该争取到一个群体，这就是科学普及工作，其本身就是科学文化建设的一部分。除去那种原初的狂热，待到冷静和理性了，也许我们重新呼唤科学，追忆陈景润（而且绝不仅仅停留在一些可以炒作的花边新闻上），才更具意义。我想，这也是此书作者的目的吧。

田廷彦
2008.1.7

⊙ 目录

第一部分 皇冠上的明珠——哥德巴赫猜想简介与综述

第一章 哥德巴赫猜想简介 // 3

1 哥德巴赫致欧拉(1742年6月7日) // 3
2 欧拉致哥德巴赫(1742年6月30日) // 4
3 价值百万的数学之谜 // 5
4 关于哥德巴赫猜想 // 9
5 解析数论在中国 // 12
6 哥德巴赫猜想 // 18
7 谈谈“哥德巴赫”问题 // 27
8 哥德巴赫猜想 // 35
9 晶体学约束,置换和哥德巴赫猜想 // 49

第二章 哥德巴赫猜想综述 // 56

1 哥德巴赫猜想 // 56
2 哥德巴赫问题 // 68
3 哥德巴赫问题 // 74
4 哥德巴赫猜想 // 91

5 Goldbach's Famous Conjecture // 105
6 "1+2"以后——介绍陈景润在解析数论研究中的最新成果 // 111

第三章 序言与书评 // 118

1 《哥德巴赫猜想》序 // 118
2 《哥德巴赫猜想》引言 // 119
3 评潘承洞、潘承彪著《哥德巴赫猜想》 // 132
4 哥德巴赫著名猜想 // 136

第二部分 中国解析数论群英谱

第四章 须尼尔曼密率论与华罗庚、闵嗣鹤 // 143

1 须尼尔曼密率 // 143
2 须尼尔曼的密率论 // 157
3 朗道－须尼尔曼猜测和曼恩定理 // 165
4 关于表充分大的整数为素数和 // 177

第五章 从埃拉托塞尼到丁夏畦 // 181

1 谈谈"筛法" // 181
2 埃拉托塞尼氏筛法与哥德巴赫定理 // 190
3 关于多项式的素因子 // 216
4 埃拉托塞尼氏筛法的新改进 // 217
5 线性组合筛法 // 229
6 相邻素数差 // 255
7 一个素数论中的初等方法 // 256
8 表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和 // 258
9 表大偶数为两个殆素数之和 // 271
10 嵌入定理与代数数域上的大筛法 // 275

第六章　从维诺格拉多夫到吴方　//　286

1　哥德巴赫问题　//　286
2　表奇数为三个素数之和　//　293
3　哥德巴赫－维诺格拉多夫定理的新证明　//　300
4　哥德巴赫－维诺格拉多夫定理　//　305
5　Гольдбах 问题　//　320
6　素数变数的线性方程组　//　324
7　关于素数变数的线性方程组　//　341
8　关于素数变数线性方程组的一点注记——同余可解条件的研究　//　361
9　关于哥德巴赫问题　//　364

第七章　从哈代、李特伍德到潘承洞　//　384

1　"整数分析"的若干问题之表整数为素数之和　//　384
2　Goldbach's problems　//　414
3　三素数定理的一个新证明　//　423
4　哥德巴赫猜想的一种新尝试　//　429
5　关于哥德巴赫问题　//　434
6　关于哥德巴赫问题的余区间　//　438
7　哥德巴赫猜想与潘承洞　//　441
8　小于3亿的全部偶数均为哥德巴赫数　//　447
9　缅怀我的导师潘承洞院士　//　448

第八章　从林尼克到陈景润　//　451

1　关于大筛法　//　451
2　大偶数表为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和　//　475
3　表大偶数为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和　//　496
4　关于哥德巴赫问题和筛法　//　498
5　一个新的均值定理及其应用　//　540
6　表每个大偶数为一个素数与一个殆素数之和　//　551
7　关于表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和　//　561

8 关于谢盛刚的“表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和”一文的一些意见 // 569

第九章 迪利克雷 L – 级数的零点密度与王元 // 572

1 迪利克雷 L – 级数的密度猜想 // 572
2 表大整数为一个素数及一个殆素数之和 // 574
3 表偶数为素数及殆素数之和 // 592
4 迪利克雷 L – 函数的零点“密度”及素数与“殆素数”之和问题 // 601
5 哥德巴赫 – 欧拉问题与孪生素数问题研究的新结果 // 608
6 素数论中的一个初等方法 // 611
7 表偶数为一个素数及一个殆素数之和 // 617

第十章 哥德巴赫数与姚琦 // 622

1 哥德巴赫数(一) // 622
2 哥德巴赫数(二) // 648
3 关于哥德巴赫数的 Linnik 方法 // 656
4 哥德巴赫数 // 671
5 哥德巴赫数的例外集合 // 675
6 哥德巴赫数 // 690

第三部分 数论英雄——陈景润

第十一章 自述与回忆 // 703

1 我的心里话 // 703
2 于无声处响惊雷——悼念陈景润院士 // 704
3 忆景润 // 707
4 只有陈景润…… // 709
5 我的学生陈景润 // 710
6 景润，人民怀念你 // 712
7 陈景润在数论上的成就 // 716
8 我所认识的陈景润 // 718

9 陈景润在厦门大学 // 727
10 告诉你一位真实的陈景润 // 737
11 陈景润精神魅力永存 // 740
12 陈景润精神魅力永存(续) // 741
13 关于哥德巴赫猜想的报道——是正确认识哥德巴赫猜想的时候了 // 743
14 话说哥德巴赫猜想 // 745
15 著名数学家呼吁——业余数学爱好者不要去钻哥德巴赫猜想等问题 // 747
16 证明"1+1"还需新手段,业余爱好者切莫入歧途 // 748
17 数学家尚且无奈,业余者岂能称雄 // 749

第十二章 报告文学与新闻报道 // 753

1 哥德巴赫猜想 // 753
2 生命与春天同在——一个数学巨匠的人生旅程 // 766
3 哥德巴赫猜想 // 775
4 《陈景润传》序 // 778
5 "1+1"之外的陈景润 // 780
6 他在喜玛拉雅山巅行走 // 783
7 陈景润尊师的故事 // 786
8 陈景润同青少年谈怎样学好数学 // 788
9 我所了解的陈景润 // 791
10 怀念学长——访福建省副省长、厦门大学福州校友会理事长潘心城 // 794
11 陈景润留给我们的财富 // 795
12 陈景润走了 // 797
13 陈景润有个满意的家 // 801
14 科学的辉煌与悲壮 // 802
15 陈景润情系高中母校 // 806
16 陈景润在高中时期 // 810
17 怀念景润 // 813
18 陈景润与他的军人妻子 // 814
19 陈景润返母校厦门大学 // 820
20 陈景润影响一代人 // 823

第十三章　陈景润年谱与论著目录　//　826

1　陈景润年谱　//　826
2　陈景润论著目录　//　827

附录　没有人告诉你是对还是错　//　831
后记　学习景润好榜样　//　848

第一部分

皇冠上的明珠——哥德巴赫猜想简介与综述



哥德巴赫猜想简介

第一章

1 哥德巴赫致欧拉(1742年6月7日)①

——哥德巴赫

我不相信关注那些虽没有证明但很可能正确的命题是无用的.即使以后它们被验证是错误的,也会对发现新的真理有益.比如费马的“$2^{2^{n-1}}+1$型的数给出一列素数”的想法尽管不正确,正像你已证明②的那样,但要是发现这种数仅能唯一地分解为两个平方因子的积也是很了不起的结果.我也想同样冒险提出一个假说:每一个由两个素数组成的数都等于许多数的和,这些数的多少随我们的意愿(包括1),直到所有的数都是1的情况为止③.[哥德巴赫在空白处写道:]重新读过上面的内容后,我发现这一假定如果在 n 的情况下成立且 $n+1$ 可被分做两个素数的和,则 $n+1$ 的情况可以很严格地证明.证明是非常简单的.看来无论如何,任何大于2的数都是三个素数的和④.

哥德巴赫(Goldbach, Christian, 1690—1764)德国－俄国数学家.生于普鲁士柯尼斯堡(前苏联加里宁格勒),卒于莫斯科.

① 摘自:李文林.数学珍宝——历史文献精选.北京:科学出版社,1998年.

② 见下文.

③ 意即每一数 n 若为两个素数之和,则它也是许多素数的和,这些素数像人们所希望的那么多,但不超过 n,注意欧拉和哥德巴赫将1看做是素数.

④ 这是哥德巴赫猜想的原始形式,欧拉将其进一步明确化(见下文欧拉致哥德巴赫的信).英国数学家E.华林(Waring,1734—1798)在他的《代数沉思录》(《Meditationes algebraic》, Cambridge,1770,217;1782,379)中首先给出了哥德巴赫猜想的如下形式:每个偶数是两个素数之和;每个奇数是三个素数之和.一种略经修改的现代标准陈述是:(A)任何大于等于6的偶数为两个奇素数之和;(B)任何大于等于9的奇数是三个奇素数之和.猜想(B)已于1937年被原苏联数学家维诺格拉多夫证明.显然由(A)也可以推出(B)(王元.哥德巴赫猜想研究.哈尔滨:黑龙江教育出版社,1987).但(A)至今仍为未决之猜想.1966年,中国的陈景润证明了每个充分大偶数都可表为一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和,这是迄今关于哥德巴赫猜想研究的最好结果.

例如

$$4=\begin{cases}1+1+1+1\\1+1+2\\1+3\end{cases}\qquad 5=\begin{cases}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{cases}$$

$$6=\begin{cases}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{cases}$$

2 欧拉致哥德巴赫(1742年6月30日)

欧拉(Euler, Léonard, 1707.4—1783.9),瑞士数学家.生于瑞士的巴塞尔,卒于彼得堡.

——欧拉

"如果 $2^{2^{n-1}}+1$ 形式的表示式所包括的所有数都可以以唯一的方式分为两个平方的和,那么这些数也一定是素数."这个命题并不正确,因为这些数都被包含在 $4m+1$ 形式的表达式中.只要当 $4m+1$ 是素数时,它就一定可以唯一地分为两个数的平方和,而 $4m+1$ 若不是素数,则它要么不能分为两数的平方和,要么可以由多于一种的方式分解.例如,$2^{32}+1$ 不是素数,它就可以用至少两种方式分拆,这一点我可由下面的定理推知:

(1) 如果 a 和 b 可分为两个平方和.则积 ab 也能被分做两个平方和.

(2) 若积 ab 及一个因子 a 能被分做两个平方和,则另一因子 b 也将能分拆为两个平方和.

以上两定理是可以严格地证明的,现在 $2^{32}+1$ 是可以分做平方和的,即 2^{32} 和1之和,它可被 $641=25^2+4^2$ 整除.故另一因子,我简单地称做 b,一定也是两个平方的和.设 $b=pp+qq$,于是

$$2^{32}+1=(25^2+4^2)(pp+qq)$$

那么
$$2^{32}+1=(25p+4q)^2+(25q-4p)^2$$

而同时有
$$2^{32}+1=(25p-4q)^2+(25q+4p)^2$$

于是 $2^{32}+1$ 至少可用两种方法分为两个平方的和.由此可知我们可以先验地求出双重分拆,因 $p=2\ 556$, $q=409$,故

$$2^{32}+1=65\ 536^2+1^2=62\ 264^2+20\ 449^2$$

至于每个可分为两个素数之和的数可分拆为尽可能多的素数之和这一论

断，可由你先前写信向我提到的你的观察，即“每一偶数是两个素数的和”①来说明和证实. 事实上，设给定的 n 为偶数，则它是两个素数之和，又因为 $n-2$ 也是两素数的和，所以 n 一定是三个素数之和，同理也是四个素数之和，如此继续. 但如果 n 是一奇数，则它一定是三个素数的和，因为 $n-1$ 是两个素数之和，于是它可分拆为尽可能多的素数之和. 无论如何“每个数都是两个素数之和”这一定理我认为是相当正确的，虽然我并不能证明这一点②.

（李家宏 译　朱尧辰 校）

3　价值百万的数学之谜③

——Anjana Ahuja

编者注　2000年3月中旬，英国一家出版社悬赏100万美元征“哥德巴赫猜想之解”. 我们本不想刊登与此有关的消息，以免误导并不真正了解数学的人贸然涉足这个貌似简单的艰深的数学难题（我国从事数论研究的专家早就提出过忠告：业余数学爱好者不要在解诸如哥德巴赫猜想等数学难题上下工夫，这会白白浪费他们宝贵的时间和精力）. 不过，国内影响甚广的报刊已登载了这条消息. 近来全国已有不少人向中国科学院数学与系统科学研究院来电、来信，询问有关情况，甚或声称自己已证明了哥德巴赫猜想. 看来客观地介绍发生在数学圈内这一事件的前因后果，可能更有利于人们对它做出自己正确的判断. 从我们刊出的泰晤士报的这篇文章看，“百万奖金”的时限只有两年，难免不给人以哗众取宠之感. 大家知道，1908年所设悬赏求证费马大定理的奖金时限为100年！

如果哪个数学天才能够揭开存在了几世纪之久的数学猜想，出版商费伯将付给他一百万美元.

这可能不是赢得一百万美元的最容易的办法，但绝对是最“酷”的. 两年内破解一道著名的数学难题，这笔钱就是您的了. 英国费伯出版社向世人提出这个挑战，是为了给它最近出版的希腊作家 Apostolos Doxiadis 的小说《彼得罗斯

① 引号为欧拉所加，但非哥德巴赫原话.

② 欧拉似乎从未试图证明这一定理，但在一封写于1752年5月16日的给哥德巴赫的信中，他提到了一个附加定理（好像也是由哥德巴赫提出的）：每个形如 $4n+2$ 的偶数等于两个形如 $4m+1$ 的素数之和；例如 $14=1+13, 22=5+17, 30=1+29=13+17$. 请参阅上面提到的他们之间的书信集364-365.

③ 原题：A million-dollar maths question，原载自《数学译林》2000年第2期，译自：The Times, 2000.03.16.

大叔和哥德巴赫猜想》(《Uncle Petros and Goldbach's Conjecture》)制造舆论声势.出版商费伯说,估计世界上有20个人有能力解答这个数学猜想,一旦有人胜出,费伯将继Bridget Jones之后创造出版史上最令人叫绝的事件.

这个冠名的猜想是一个看上去非常简单的数学难题,它是由普鲁士历史学家和数学家克里斯蒂安·哥德巴赫(Christian Goldbach)于1742年在给著名数学家莱昂哈特·欧拉(Leonhard Euler)的一封信中提出来的.猜想的内容就是每个大于2的偶数都可以表示为两个素数之和(素数就是只能被自己和1整除的数,比如7和13).例如,18等于7加11,而且7和11都是素数.一般的表述为n等于p_1加p_2(n表示大于2的偶数,p_1和p_2都表示素数——校者注).这个猜想被认为是正确的,但关键是没有人能够提出一个确定的证据证明这个猜想对所有偶数都正确.正像哥德巴赫在信中写到的:"每一个偶数都是两个素数之和,我认为这是一个无疑的定理,可是我无法证明."

超级计算机可以在一定程序上检验这个猜想的正确性.最新计算的里程碑出现在1998年,其时发现这个猜想对于每一个小于4×10^{14}的偶数都是正确的.但没有一项计算技术可以对于直至无穷的每一个偶数确认这个猜想成立.关键是要找到一个抽象的证明,或者说一种数学技巧来不容置疑地说明这位曾到莫斯科为沙皇彼得二世当过家庭教师的彼得堡数学教授所提出的猜想是正确的.

费伯规定,哥德巴赫猜想的证明必须在下星期小说出版后的两年之内提交给一个权威的数学杂志,并在四年内发表.费伯还将邀请一批世界知名的数学家来判定证明是否正确(费伯拒绝透露评委的姓名,因为他不想让他们受到数学爱好者们大批信件的干扰).而出版社自己却不会损失这笔钱,因为它已经花五位数的钱保了险."现在我们已经保了险,我将很高兴看到有人赢(得这笔钱)."托比·费伯说,他坚持说他设置这个挑战并非哗众取宠.

那么谁会抢先获得这份丰厚的奖金呢?虽然这个猜想看上去很简单,但实际上除非你是一个顶尖级的数学家,否则根本无法求证.估计世界上只有为数不多的几个男人(很少有女人进入最高层的数学研究领域)能够渡过这智力的海洋.这些人都是数论学家,他们是少数极为聪明的思考者,他们在家里整日沉浸在看不见、摸不着、令人困惑的数字世界之中.而在这些人中最经常被提到的就是剑桥大学教授、菲尔兹数学奖得主艾伦·贝克尔(Alen Baker).菲尔兹数学奖是一个数学家能得到的最高荣誉,每四年颁发一次,获奖者都是40岁以下的数学家(诺贝尔奖里没有数学奖).那么,贝克尔能不能完成这项任务呢?

当我告诉贝克尔他被视为一个有希望的竞争者时,贝克尔说:"你无法预测将会发生什么事."他认为哥德巴赫猜想能否在可预见的将来被证明都难以肯定,更不用说在两年之内,因为相关的数学技巧似乎还太粗糙而未能向前推进.但他说也不是绝对没有可能性.他指出,一位姓陈的中国数学家(指陈景

润 —— 校者注）就在 1966 年取得过某些进展.

陈证明了每个偶数都是一个素数加上两个素数之积（陈景润定理的确切叙述为：每一充分大偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和. 见中国科学，16（1973），111-128. —— 校者注）. 例如，18 等于 3 加 3×5，也就是 n 等于 p_1 加 $p_2\times p_3$. 这个结论看起来已经很接近哥德巴赫猜想（n 等于 p_1 加 p_2），但在之后的 30 年里没有人能够在它和最终公式之间的鸿沟上架桥. 贝克尔总结说："这是目前为止最好的结果. 我们必须有一个重大的突破才有可能再进一步. 但不幸的是现在还没有这种灵感. 如果我们真的找到了这个灵感，那么我们就会在此基础上有所作为."

也许这笔钱会使得这件事变得更加乐观？但贝克尔证明了他自己是一个真正的数学家："我不认为这笔钱能够带来什么奇迹. 如果人们做此事，也只是因为他们想接受挑战."

Warwick 大学数学教授、英国著名数学通俗读物作家艾恩 · 斯图尔特（Ian Stewart）不同意这种看法. 他说："我觉得有些数学家可能会被百万美元冲昏头脑. 这可能会使天平倾斜." 虽然斯图尔特对有人能够中奖并不乐观，他仍然指出数学界的一些数论方面的问题是由不为人知的天才所破解的，他们往往使正统出身的数学家惊讶不已. 他说："这一次可能也会是一个出乎意料的人拿到奖金."

使人们有足够的理由相信没有什么问题是永远不能解决的是费马大定理的证明. 这个定理存在了 350 多年没人破解，但最终还是被现居普林斯顿的一个腼腆的英国天才安德鲁 · 怀尔斯（Andrew Wiles）所证明（不幸的是他的年龄已经太大而无资格获得菲尔兹奖，虽然如此，在 1998 年的柏林世界数学家大会上给怀尔斯颁发了"特别奖". —— 校者注）. 也许，哥德巴赫猜想有一天也将不再是一个谜. 更重要的是，怀尔斯花费 7 年时间为费马大定理找到的证明，原来只是写在一页书的空白处，使广大读者感到了兴趣（费马在丢番图著的《算术》一书页边的空白处写道："… 不可能将一个高于 2 次的幂写成两个同样幂次的和." 同时写道："我有一个对这个命题的十分美妙的证明，这里空白太小，写不下." 这就是所谓的费马大定理的来源，也因此而留下了一个历时 358 年的谜. —— 校者注）. 西蒙 · 辛格（Simon Singh）对于这个过程的细腻抒情的描写（指西蒙 · 辛格所著的书《Fermat's Last Theorem——The story of a riddle that confounded the world's great minds for 358 years》，有中译本：《费马大定理 —— 一个困惑了世间智者 358 年的谜》，西蒙 · 辛格著，薛密译，上海译文出版社，1998. —— 校者注）成为继斯蒂芬 · 霍金的《时间简史》（《A Brief History of Time》）和 Dava Sobel 的《经度》（《Longitude》）以后的另一本科学畅销书. 从那时起，出版商们就开始寻找这同一个千古不变公式的某种变形 —— 一个人，最好

还是一个怪才，加上一个艰深的问题，以及一点点科学或数学，然后看着钱滚滚而来.

即使是历史上已被人们遗忘的数学家也因为这个原因而重新被挖掘出来——Paul Erdös 的传记(《只爱数字的人》，Paul Hoffman 著) 和 John Nash 的传记(《聪明的头脑》，Sylvia Nasar 著) 就是近期简单易读的例子. 现在我的书架已经被这样的故事压满了. 它们是关于查尔斯·达尔文(Charles Darwin，1809—1892. 英国博物学家，进化论创始者. 著有《物种起源》、《人类的起源及性的选择》等——校者注)，查尔斯·巴比奇(Charles Babbage，早期计算机的发明人，1792—1871. 英国数学家. 他继承先人关于计算器的思想，第一个着手研制与现代计算机原理相同的他称为差分机(difference machine) 的计算机械，但于1842 年半途而废，差分机最终未能面世——校者注)，爱达·洛夫莱斯(Ada Lovelace)，即奥加斯特·爱达·拜伦(Augusta Ada Byron). Byron的女儿是巴比奇的灵感源泉，她是巴比奇的知音，可以说她是当时唯一能理解分析机原理的人. 她发现可以只用 0 和 1 的二进制数来说明这个计算机. 她最先认识现代计算机基本数字体系，用数学式子分析了巴比奇的分析机，并用通俗易懂的形式编制了计算步骤——现在称谓的程序，被誉为第一个程序设计师.——校者注)，乔治·戈登·拜伦(George Gordon Byron)(英国诗人，1788—1824. 代表作有《恰尔德·哈罗尔德游记》、《唐璜》等——校者注)，格雷戈尔·门德尔(遗传学之父，Gregor Mendel，1822—1884. 奥地利遗传学家，于 1865 年发现遗传基因原理，并提供了遗传学的数学原理——校者注)，德米特里·门捷列耶夫(Dmitri Mendeleyev，1834—1907. 元素周期表的创造者，俄国化学家，建立了元素周期分类法——校者注)，和伽利略(Galileo，1564—1642. 意大利数学家、天文学家和物理学家. 现代力学和实验物理学创始人，否定地心说，遭罗巴教廷宗教法庭审判.——校者注) 的女儿的故事. 故事的主角也可以不是一个人. 有一些“传记”就是关于 π 和 0 的. 甚至好莱坞也爱上了数字——在电影《Good Will Hunting》中 Matt Damon 就饰演一个天才的清洁工.

46 岁的希腊作家 Doxiadis，18 岁从哥伦比亚大学数学系毕业，现在从事小说与戏剧创作，他只是继续这一赚钱的传统. 他说他的经纪人被费伯对一个不知名的外国作家的著作所做的一切惊呆了. 他这本描写一个人终其一生寻找一个证明的小说《彼得罗斯大叔和哥德巴赫猜想》已经被译成了 15 种文字.

数学的魅力不仅限于出版界. Carol Vorderman 也许不是牛津大学数学课堂上最好的学生，但她的不凡仪表已经使她成为英国收入最高的电视女主持人. 斯图尔特说她改变了人们对于数学家的看法：“这儿有位女士能和数学家沟通，而且还是一个很有魅力的女人.”

“我发现目前数学家在宴会中所遇到事情与过去不同，20 年前如果人们发

现我是一个数学家,他们会说'哦,我上学时数学学得差极了',而现在他们会跟我谈论分形.

"人们已经习惯于在生活中的这儿或那儿发现一点数学的影子.我曾经在报纸的新闻版而不是科学版上看到一则有关泡饼干的公式.人们已经注意到数学是一门很有意义的科学."实际上,斯图尔特已经被当成公众人物,Warwick大学因此决定允许他不再教本科生的课,而继续从事媒体事业.

"数学不只是在业余读者中流行起来.更多的青少年选择在大学里学习数学.负责 Bath 大学招生的 Chris Budd 教授说:"许多孩子说他们受到了像《费马大定理》这样的科学书籍的鼓舞,我觉得我们开始进入黄金时代了."

这种情况使得在数学领域为数不多的几个顶级人物尤其令人羡慕.几个月前,数学界有一个有关 Simon Donaldson 教授的传闻,他曾在25岁时因为做出了一项令人震惊的数学成果而出名,4年后获得了菲尔兹数学奖.传说伦敦帝国学院将用六位数的薪金聘请他任教.这将使他成为英国收入最高的数学家.

Donaldson 不愿透露他薪金的数额,但他说并非"天文数字".

观察家们说高薪招聘一位像 Donaldson 这样的顶级教授实际上能够为大学赚钱.因为他可以吸引更好的研究人员,使伦敦帝国学院的数学系的研究系数进一步提高(原来伦敦帝国学院的数学系的研究系数是5,但仍然比不上牛津或剑桥大学的 5^+).而在研究系数上提高一点就可以在收效上每年增加五十万英镑.从这个角度讲,给一个教授两倍的工资看来是一个划算的投资.

至于那笔巨额奖金,Doxiadis 对有人能赢得这笔奖金还是充满了希望:"是的,怀尔斯用了7年的时间才证明了费马大定理.但如果你在他宣布他揭开这个数学之谜的前一天打赌说在近几年内会有人揭开费马定理,别人都会以为你疯了.有些事情就是绝处逢生."

(丁逸昊 译　陆柱家 校)

4 关于哥德巴赫猜想[①]

——王元

王元(Wáng Yuán,1930—)中国数学家.生于浙江兰溪谷.

1,2,3,… 这些简单的正整数,从日常生活以至尖端科学技术都是离不开的.其他的数字,如负数,有理数等,则都是以正整数为基础定义出来的.所以研究正整数的规律非常重要.在数学中,研究数的规律,特别是研究整数的性质的

① 原载《光明日报》,1978年8月18日.

数学,叫做“数论”.数论与几何学一样,是最古老的数学分支.

看起来似乎是十分简单的数字,却包含着许多有趣而深奥的学问.这里,先就本文涉及的一些数学名词作一点解释.除了1以外,有些正整数除1与它自身外,不能被其他的正整数整除,这种数叫“素数”.最初的素数有2,3,5,7,11,…另外的正整数,就是除1与它自身外,还能被别的正整数除尽,这种数叫做“复合数”.最初的复合数有4,6,8,9,10,… 所以正整数可以分为1,素数与复合数三类.凡能被2整除的正整数,叫“偶数”,如2,4,6,… 其余的1,3,5,… 叫“奇数”.

任何复合数都是可以唯一地分解成素数的乘积,这些素数就是复合数的素因子,例如,$30 = 2 \times 3 \times 5$ 等.所以素数在整数中是最基本的.素数性质的研究是数论中最古老与最基本的课题之一,早在欧几里得时代就已经证明了素数有无穷多个,但我们还没有判断任何一个正整数是素数还是复合数的切实可行的方法.借助于电子计算机,我们迄今所知道的最大素数是 $2^{19\,937} - 1$,共6 002位.又如我们可以证明 $2^{16\,384} + 1$ 是一个复合数,但我们并不知道它的任何因子.由此不难看出,我们能够证明与素数有关的命题是很少的.

在数论研究中,往往根据一些感性认识,小心地提出“猜想”,然后再通过严格的数学推导来论证它.被证明了的猜想,就变成了“定理”,但也有不少猜想被否定了.

上面讲过,任何复合数都可以分解为素数的乘积,把复合数分解成素数之和的情况又如何呢?这里面是否有什么规律呢?

早在1742年,德国人哥德巴赫就写信给欧拉提出了两个猜想:(1) 任何一个大于2的偶数都是两个素数之和(表为“1 + 1”);(2) 任何大于5的奇数都是3个素数之和.欧拉表示相信哥德巴赫的猜想是对的,但他不能加以证明.容易证明(2) 是(1) 的推论,所以(1) 是最基本的.

1900年,德国数学家希尔伯特在国际数学会的演说中,把哥德巴赫猜想看成是以往遗留的最重要的问题之一,介绍给20世纪的数学家来解决,即所谓希尔伯特第八问题的一部分.1912年,德国数学家朗道在国际数学会的演说中说,即使要证明较弱的命题(3),即存在一个正整数 a,使每一个大于1的整数都可以表为不超过 a 个素数之和(注意:如果(1) 成立,则取 $a = 3$ 即可),也是现代数学家所力不能及的.1921年,英国数学家哈代在哥本哈根召开的数学会上说过,猜想(1) 的困难程序是可以和任何没有解决的数学问题相比的.

朗道(Landau, Edmund Georg Herman, 1877—1938),德国数学家,生于柏林,卒于同地.

近70年来,哥德巴赫猜想吸引了世界上很多著名数学家的兴趣,并在证明上取得了很好的成绩.此外,研究这一猜想的方法,不仅对数论有广泛的应用,而且也可以用到不少数学分支中去,推动了这些数学分支的发展.

下面我们谈谈关于哥德巴赫猜想的一些主要成果.

早在 1922 年,英国数学家哈代与李特伍德就提出一个研究哥德巴赫猜想的方法,即所谓"圆法". 1937 年,原苏联数学家维诺格拉多夫应用圆法,结合他创造的三角和估计方法,证明了每个充分大的奇数都是三个素数之和,从而基本上证明了哥德巴赫信中提出的猜想(2). 因此只剩下信中提出的猜想(1),这就是要证明命题(1 + 1) 是正确的.

1920 年,挪威数学家布朗改进了有两千多年历史的埃拉多染尼氏"筛法",证明了每个充分大的偶数都是两个素因子个数不超过 9 的正整数之和. 我们将布朗的结果记为(9 + 9). 1930 年,原苏联数学家史尼尔曼用他创造的整数"密率"结合布朗筛法证明了命题(3),并可以估计出 a 的值. 但这一方法得到的结果不如前面讲过的三角和方法精密,我们就不叙述了. 德国数学家拉德马赫尔在 1924 年证明了(7 + 7),英国数学家埃斯特曼于 1932 年证明了(6 + 6),原苏联数学家布赫夕塔布又于 1938 年与 1940 年分别证明了(5 + 5) 与(4 + 4). 这就像运动员那样,不断地刷新着世界纪录.

拉德马赫尔(Rademacher, Hans, 1892—1969),德国数学家. 生于德国石勒办益格 - 荷尔斯泰国的万茨贝克,卒于美国宾夕法尼亚州的哈弗福德.

我国数学家华罗庚早在 20 世纪 30 年代就开始研究这一问题,得到了很好的成果,他证明了对于"几乎所有" 的偶数,猜想(1) 都是对的. 解放后不久,他就倡议并指导他的一些学生研究这一问题、取得了许多成果,获得国内外高度评价. 1956 年,笔者证明了(3 + 4),同一年,原苏联数学家维诺格拉多夫又证明了(3 + 3). 1957 年,笔者证明了(2 + 3). 这些结果的缺点在于两个相加的数中还没有一个可以肯定为素数的.

早在 1948 年,匈牙利数学家瑞尼就证明了(1 + b), 这里 b 是一个常数. 用他的方法定出的 b 将是很大的,所以并未有人具体定出 b 来. 直到 1962 年,我国数学家潘承洞证明了(1 + 5),1963 年,潘承洞、巴尔巴恩与笔者又都证明了(1 + 4). 1965 年,维诺格拉多夫、布赫夕塔布与意大利数学家朋比尼证明了(1 + 3). 我国数学家陈景润在对筛法作了新的重要改进之后,终于在 1966 年证明了(1 + 2),取得了迄今世界上关于猜想(1) 最好的成果. 他证明了,任何一个充分大的偶数,都可以表示成为两个素数之和,其中一个是素数,另一个或为素数,或为两个数的乘积. 陈景润的结果在世界数学界引起了强烈反响,为我国赢得了国际荣誉. 正因为陈氏定理重要,不少数学家致力于简化这个定理的证明. 目前世界上共有四个简化证明,最简单的是我国数学家丁夏畦、潘承洞与笔者共同得到的.

由上所述不难看出,哥德巴赫猜想也像其他经典问题一样,它的一切成就,都是在前人成就的基础上,通过迂回的道路而得到的. 数学是一门很严格的学问,现在有些同志,连数论的基础书都没有认真看过,就企图去证明(1 + 1),这不仅得不到结果,浪费了宝贵的时间,反而把一些错误的推导与概念,误认为正确的东西印在脑子里,它对于学习与提高都起着有害的作用. 我们要从中吸取

有益的教训.我们认为愿意搞这类经典问题的人,应先熟悉已有的成果与方法,再作进一步的探讨,才会是有益的.既要有敢于创新的精神,更要有严谨的科学态度,这对于青年同志尤其重要.当然,这里谈的是经典数学问题.必须指出,在我国,应该有更多的人从事研究更有直接应用价值的课题.这个道理大家都是很明白的.最后,让我们团结起来,为实现我国的数学事业全面赶超世界先进水平而奋斗吧.

5 解析数论在中国[①]

——王元

范德科皮特(Van der corput,1890—1975),荷兰数学家.

林尼克(Linnik,1915—1972),苏联数学家.生于基辅.

解析数论在中国的研究开始于20世纪30年代,创始者是我国著名数学家华罗庚教授.他对许多著名问题都作过重要贡献,例如,完整三角和的估计、华林问题、塔利问题、华林-哥德巴赫问题及高斯圆内格点问题等.他在解析数论方面的大部分工作搜集在他的专著《堆垒素数论》、《指数和的估计及其在数论中的应用》与《数论导引》中,所以本文不再叙述这些工作.华教授在1953~1957年间,曾在中国科学院数学研究所建立了一个解析数论讨论班.在讨论班中认真学习了解析数论的基本思想与方法,例如,史尼尔曼(Schnirelman)密率论,布朗与塞尔伯格筛法,哈代与李特伍德圆法,维诺格拉多夫、华罗庚与范德科皮特关于三角和的估计方法,及林尼克的分析方法等.除此而外,对于数论其他分支的重要进展也给予密切的注意.讨论班中也可以报告参加者们的工作.华教授领导讨论班的特点是治学严谨,要求严格.所以,虽然只有短短几年,却出了很好的人才与成果.闵嗣鹤、越民义、陈景润、许孔时、严士健、吴方、魏道政、潘承洞、尹文霖与王元等都是讨论班的参加者.在经历了林彪、"四人帮"的严重破坏后,回顾往昔,感到恢复和发扬优良的学风在数学界已是迫在眉睫的事.对青年数学家来说,更是如此.现将解放后解析数论在我国的发展概述如下.

5.1 筛法及其有关的问题

筛法肇源于"厄拉多塞筛法".厄氏注意到 $n^{1/2}$ 与 n 之间的素数,可通过从 $2,3,\cdots,n$ 中去掉那些含有不超过 $n^{1/2}$ 的素数因子的诸数而得到.命 $\pi(x)$ 为不

① 1979年5~6月,笔者曾应邀在巴黎"德让、毕索,包括研究班"与波恩第20届数学工作会议上,以《筛法与哥德巴赫猜想》为题,报告了本文的有关部分.原载于《自然杂志》第3卷第8期.

超过 x 的素数个数，$\prod = \prod_{p\leq n^{1/2}} p$，此处 p 表示素数，则 $1+\pi(n)-\pi(n^{1/2}) = \sum_{a\leq n}\sum_{d|(a,\prod)}\mu(d) = \sum_{d|\prod}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]$，此处 $\mu(n)$ 表示麦比乌斯函数，$[x]$ 表示 x 的整数部分. 如果用 $\frac{n}{d}+v$ 来代替 $\left[\frac{n}{d}\right]$，则上式将导致误差项 $O(2^{\pi(\sqrt{n})})$. 所以厄氏筛法几乎是无用的.

布朗在 1919 年对筛法作了巨大改进，并成功地用于许多困难而重要的数论问题. 1947 年，塞尔伯格对厄氏筛法作了另一重要改进，比布朗筛法简单，而结果却更精致. 这些方法已成为数论中强有力的工具.

筛法联系着数论中两个重要猜想：

(1) 每个大于 2 的偶数 n 都是两个素数之和.

(2) 有无穷多对孪生素数 $p,p+2$.

其中(1) 称为哥德巴赫猜想，(2) 称为孪生素数猜想.

命 $A=\{a_v\}(v=1,\cdots,n)$ 为一个整数集合，P 为 r 个素数 $p_1<\cdots<p_r$ 的集合. 命 $S(A,P)$ 为 A 中不能被任何 $p_i(1\leq i\leq r)$ 整除的整数个数. 例如取 $a_v=v(n-v)(v=1,\cdots,n)$. 又假定 P 为适合于 $p\leq n^{1/(l+1)}$ 的全体素数，此处 l 为一个正整数. 假定当 n 充分大时，可以证明 $S(A,P)$ 有一个正的下界估计，则下面的命题成立：

(3) 每一大偶数 n 都是两个素因子个数各不超过 l 的整数之和.

我们将这一命题记为 (l,l). 类似地，可以定义 $(l,m)(l\neq m)$.

布朗首先证明了(9,9). 一些数学家改进了布朗的方法与结果：(7,7)——拉德马赫尔(1924)；(6,6)—— 埃斯特曼(1932)；(5,7)，(4,9)，(3,15)，(2,366)—— 黎奇(1937)；(5,5)，(4,4)—— 布赫夕塔布(1938 ~ 1940)；(a,b)，此处 $a+b\leq 6$—— 库恩(1953 ~ 1954).

布朗与塞尔伯格方法的要点在于用不等式来代替

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, n=1\\0,\text{其他情形}\end{cases}$$

例如，给予任意一组实数 $\{\lambda_d\}$，其中 $\lambda_1=1$，则

$$S(A,P)=\sum_{v\leq n}\sum_{d|(a_v,P)}\mu(d)\leq\sum_{v\leq n}\Big(\sum_{d|(a_v,P)}\lambda_d\Big)^2$$

选择适当的 λ_d 使上式右端达到极小，即导致塞尔伯格上界方法. 特别在综合布朗、塞尔伯格、布赫夕塔布与库恩的方法的基础上，王元证明了(3,4)，(3,3)，(a,b)，此处 $a+b\leq 5$，(2,3)(1956 ~ 1957)，其中(3,3) 也被维诺格拉多夫独立地加以证明.

如果我们取 $a_p=n-p$，此处 $p\leq n$ 为素数，则当 n 充分大时，$S(A,P)$ 有

一个正的下界估计,即意味着下面的命题成立:

(4) 每一个大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和.

1932 年,首先是埃斯特曼在假定 GRH(广义黎曼猜想)的情况下,证明了(1,6).不用未经证明的上述猜想,瑞尼(Renyi)于 1948 年证明了$(1,c)$,此处 c 是一个正常数.在瑞尼的证明中,一个关于 $\pi(x,k,l)$ 的中值公式被证明了用来代替所谓的殆 GRH,即

$$\sum_{k\leq x^{\delta}}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x,k,l)-\frac{\mathrm{Li}\ x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{\log^{A}x}\right) \qquad ①$$

此处 $\pi(x,k,l)=\sum\limits_{\substack{p\leq x\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\ k)}}1,\mathrm{Li}\ x=\int_{2}^{x}\frac{\mathrm{d}\ t}{\log\ t}$,$(l,k)$ 表示 l,k 的最大公约,$\varphi(k)$ 表示欧拉函数,A 为任意正常数,δ 为某一正数.式①的证明基于林尼克的大筛法.还需注意在瑞尼原来的论文中,$\pi(x,k,l)$ 需换成一个加权数和.如果①对于 $\delta=\frac{1}{2}-\epsilon$ 成立,此处 ϵ 表示任意正数,则①可用来代替埃斯特曼(1,6)证明中的 GRH.

王元在 GRH 之下将 6 改进为 3,即证明了(1,3).

1961 年,巴尔巴恩(Barban)证明①对于 $\delta=1/6$ 成立.潘承洞于 1962 年独立地证明①对于 $\delta=1/3$ 成立,并结合王元证明(1,3)(假定 GRH)的方法,导出了(1,5).潘承洞与巴尔巴恩还独立证明①对于 $\delta=3/8$ 成立,并导出(1,4)(王元同时指出由潘承洞的 $\delta=1/3$ 也可导出(1,4)).最后,朋比利与维诺格拉多夫于 1965 年独立证明①对于 $\delta=\frac{1}{2}-\epsilon$ 成立,从而证明了(1,3).准确地说,朋比尼公式为

$$\sum_{k\leq x^{1/2}/\log^{B}x}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x,k,l)-\frac{\mathrm{Li}\ x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{\log^{A}x}\right)$$

此处 A 为任意正常数,$B=B(A)$.尽管朋比尼公式比维诺格拉多夫公式只是稍强一点,但在数论中却有很大应用.使他获得 1974 年国际数学家大会菲尔兹(Fields)奖的,主要也是这一工作.

1966 年,陈景润对(1,3)的证明作了重要改进,从而出色地证明了(1,2),在国际上被称为陈氏定理.这定理有好些简化证明,其中之一是潘承洞、丁夏畦与王元获得的.国外有学者将陈氏定理看做筛法发展的顶峰,因为一般推测,用筛法是极难证明(1,1)的.

关于孪生素数猜想,用陈景润的方法可以证明存在无穷多个素数 p,使 $p+2$ 为不超过两个素数的乘积.

筛法还可以用来处理有关殆素数的一些其他问题,所谓殆素数者即素因子个数不超过某一常数的整数.例如,在 1957 年,王元证明了下述结果:

(i) 命 $F(x)$ 为 s 次整值多项式且没有固定素因子,则存在无穷多个整数 n 使 $F(n)$ 为不超过 $s+c\log s$ 个素数的乘积,其中 c 是一个常数.

(ii) 当 x 充分大时,区间 $x<n\leqslant x+x^{10/17}$ 中恒有一个数,其素因子个数不超过 2.

这两个结果分别是前人结果的改进,也被以后的数学家加以改进.例如,布赫夕塔布与黎彻特(Richert)独立证明了(i)中的 $s+c\log s$ 可以改进为 $s+1$.关于(ii),最佳的结果是陈景润证明的,他证明 $x^{10/17}$ 可以用 $x^{\frac{1}{2}-0.023}$ 来代替.

5.2 指数和的估计及其有关的问题

假定 Ω 是 s 维欧氏空间中的一个有限集,$f(x_1,\cdots,x_s)$ 是一个实函数.则估计形如

$$\sum_{(x_1,\cdots,x_s)\in\Omega} e^{2\pi i f(x_1,\cdots,x_s)}$$

的指数和,在解析数论中是十分重要的.除这问题本身饶有兴趣外,解析数论中许多重要问题的处理都与指数和的估计有关,例如,华林问题、哥德巴赫问题、高斯圆内格点问题等.

谢尔品斯基 (Sierpiriski, Wactaw, 1882—1969),波兰数学家.生于华沙,卒于同地.

(1) 完整三角和.假定 q 是一个整数,$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$ 是一个整系数多项式,且 $(a_k,\cdots,a_1,q)=1$.完整三角和 $S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi i f(x)/q}$ 的估计在解析数论中是非常重要的.当 $s=2$ 时,$S(q,x^2)$ 称为高斯和,并由高斯证明了 $|S(q,x^2)|=O(q^{1/2})$.这一历史难题是华罗庚在 1940 年出色地解决的.他证明了

$$|S(q,f(x))|\leqslant c(k)q^{1-\frac{1}{k}} \qquad ②$$

此处 q 的阶是臻于至善的.不少数学家致力于 $c(k)$ 的改进,最佳结果 $c(k)\leqslant e^{7k}$ 是陈景润在 1977 年证明的.

(2) 高斯圆内格点问题.命 $A(x)$ 表示圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 内格点 (u,v) 的个数.高斯在 1863 年证明了

$$A(x)=\pi x+O(x^{1/2}) \qquad ③$$

此处 $O(x^{1/2})$ 称为误差项.寻找更佳的误差项使③成立,通常即称做高斯圆内格点问题.1916 年,哈代证明误差项不能比 $O(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$ 更好(粗略地说).谢尔品斯基与范德科皮特分别于 1906 年与 1923 年证明误差项可以取作 $O(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon})$ 与 $O(x^{\frac{37}{112}+\varepsilon})$.范德科皮特的证明基于某种三角和的估计,通常称为范德科皮特方法.他的结果被不少数学家改进了.至 1942 年,最佳估计 $O(x^{\frac{13}{40}+\varepsilon})$ 是华罗庚得到的.进一步的改进 $O(x^{\frac{12}{37}+\varepsilon})$ 是陈景润在 1963 年证明的.以后则只有幅度很小

的改进了.

(3) 迪利克雷除数问题. 命 $d(n)$ 表示 n 的因子个数, 则和数 $D(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}d(n)$ 即等于区域

$$uv\leqslant x,u\geqslant 1,v\geqslant 1$$

中的整点 (u,v) 的个数. 迪利克雷于 1849 年证明了

$$D(x)=x(\log x+2\gamma-1)+O(\sqrt{x}) \quad ④$$

此处 γ 为欧拉常数. 寻找更佳的误差项使 ④ 成立, 通常即称做迪利克雷除数问题. 这问题与圆内格点问题颇类似. 迟宗陶与黎彻特分别在 1950 年与 1953 年证明了误差项可取作 $O(x^{\frac{15}{46}+\epsilon})$. 进一步的结果是尹文霖在 1963 年证明的 $O(x^{\frac{12}{37}+\epsilon})$. 以后还有些小改进.

(4) 球问题. 作为圆问题的推广, 还可以研究这样的问题: 寻求使公式

$$\sum_{u^2+v^2+w^2\leqslant x}1=\frac{4}{3}\pi x^{3/2}+O(x^{\theta}) \quad ⑤$$

成立的最佳误差项, 即最小的 v. 这个问题叫做球问题. 目前最好的结果仍是维诺格拉多夫与陈景润在 1963 年独立证明的, 即 $O(x^{\frac{2}{3}+\epsilon})$. 类似于球问题, 还可以研究三维空间的除数问题, 即估计区域

$$uvw\leqslant x,u\geqslant 1,v\geqslant 1,w\geqslant 1$$

中的格点 (u,v,w) 的个数. 越民义、吴方、尹文霖与陈景润曾先后获得了较精致的结果.

迪利克雷 (Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 1805—1859), 德国数学家. 生于迪伦, 卒于格丁根.

(5) 华林问题. 所谓华林问题, 即研究不定方程

$$n=x_1^k+\cdots+x_s^k \quad ⑥$$

对于给定整数 $k>0$ 的可解性问题. 1909 年, 希尔伯特首先证明了对于任意正整数 k 皆存在常数 $s=s(k)$, 使方程 ⑥ 对于任意正整数 n 皆有非负整数解 x_i $(1\leqslant i\leqslant s)$. 研究华林问题的新方法 —— 哈代与李特伍德圆法可描述如下. 命 $T(a)=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\alpha x^k}(P=[n^{1/k}])$, 则显然方程 ⑥ 的解数等于

$$r_s(n)=\int_0^1 T(a)^s e^{-2\pi i n\alpha}d\alpha$$

积分区域可分为两部分: 优弧与劣弧. 粗略地说, 优弧含有 $[0,1]$ 中包有分母较小的分数 h/q 的那些小区间 $M_{h,q}$, 而 $[0,1]$ 中的其余部分则称为劣弧. $r_s(n)$ 的主项由优弧部分的积分得出, 但主要的困难却在于对劣弧的估计, 它往往归结为被称做韦尔(Weyl) 和的指数和的估计. 哈代与李特伍德证明了, 当 $s\geqslant 2k+1$ 时

$$\sum_{M_{k,q}}\int_{M_{k,q}} T(\alpha)^s e^{-2\pi i n\alpha}d\alpha \sim G(n)\frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)^s}n^{\frac{s}{k}-1}$$

1957 年，华罗庚将 $2k+1$ 改进为 $k+1$. 这一结果是臻于至善的. 假定 $g(k)$ 是使所有的正整数皆可表示成 s 个非负整数的 k 次幂和的 s 的确下界. 陈景润在 1965 年证明了 $g(5)=37$.

(6) 塔利问题. 命 $r_t(P)$ 为不定方程组

$$x_1+\cdots+x_t=y_1+\cdots+y_t$$
$$\vdots$$
$$x_1^k+\cdots+x_t^k=y_1^k+\cdots+y_t^k$$

的整数解数，此处 $1\leqslant x_i,y_i\leqslant P$. 华罗庚于 1952 ~ 1953 年证明了当 $k\geqslant 11$ 与 $t>[k^2(3\log k+\log\log k+4)]$ 时

$$\lim_{P\to\infty}P^{k(k+1)/2}r_t(P)=G$$

此处 G 是一个常数. 这一结果的证明是以关于韦尔和估计的维诺格拉多夫方法及华罗庚关于完整三角和的估计方法为基础的. 当 k 较小时，华罗庚与陈景润都曾获得较精致的估计.

(7) 模 p 的最小原根. 利用韦伊关于有限域上代数数域的类似 RH(黎曼猜想) 的重要贡献，伯吉斯(Burgess) 在 1957 年改进了波利亚(Polya) 关于特征和的估计定理及模 p 最小正二次非剩余 $r(p)$ 的估计. 利用他的方法，王元(1959) 与伯吉斯(1962) 独立地证明了 $g(p)=O(p^{\frac{1}{4}+\epsilon})$，此处 $g(p)$ 表示模 p 的最小正原根. 这结果改进了维诺格拉多夫(1930)、华罗庚(1942) 与爱多士(Erdös, 1945) 等的结果. 王元还证明在 GRH 的假定下有 $g(p)=O(m^6\log^2 p)$，此处 m 表示 $p-1$ 的素因子个数. 这结果是安基尼(Ankeny) 结果的改进.

韦伊(Weil, André, 1906—)，法国数学家、数学史家. 生于巴黎，是犹太人的后裔.

波利亚(Pólya, George, 1887—1985)，匈-美数学家. 生于布达佩斯.

蒙哥马利(Montgomery, Deane, 1909—)，美国数学家、教育家.

5.3 解析数论的其他结果

(1) 命 $(k,l)=1$，$P(k,l)$ 为算术级数 $kn+l(n=1,2,\cdots)$ 中的最小素数. 林尼克首先证明了 $P(k,l)=O(k^c)$，此处 c 是一个常数. 潘承洞首先证明 $c=5\,448$ 即满足. 陈景润、尤梯拉(Jutila) 与革拉姆(Graham) 曾分别改进了潘承洞的结果. 目前最佳的估计 $c=16$ 是陈景润得到的.

(2) 命 $N(T,v)$ 为黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 在矩形 $\frac{1}{2}+v\leqslant\sigma\leqslant 1$, $|t|\leqslant T$ 中的零点个数，此处 $0\leqslant v\leqslant\frac{1}{2}$, $T>0$. 在 DH(密度猜想) 即 $N(T,v)=O(T^{1-2v}\log(T+2))$ 的假定下，王元于 1977 年证明了对于任意 $n\geqslant 3$，皆存在素数 p,p' 使 $R(n)=O((\log n)^{\frac{148}{13}+\epsilon})$，此处 $R(n)=|n-p-p'|$. 一个类似的

定理 $R(n)=O(\log^7 n)$ 首先是林尼克证明的,但在他的证明中有些错误,其结论需修正为 $R(n)=O(\exp(c(\log n)^{10/11}\log\log n))$.潘承洞用塞尔伯格方法也证明了类似的结果 $R(n)=O(\log^c n)$.

(3) 命 $M(x)$ 为不超过 x 的偶数中,不能表为两个素数之和的偶数个数.华罗庚等首先证明 $M(x)=O(x/\log^A x)$,此处 A 为任意常数.蒙哥马利与沃恩(Vaughan)进一步证明了存在 $\delta>0$ 使 $M(x)=O(x^{1-\delta})$.最近,陈景润与潘承洞合作证明了 $\delta>0.01$.

(4) 命 $r(n)$ 为将偶数表为两个素数之和 $n=p+p'$ 的表示个数.陈景润于1978年证明了

$$r(n)\leqslant 7.8\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{n}{\log^2 n}(1+o(1))$$

这一结果改进了过去用朋比尼中值公式与塞尔伯格方法相结合而得到的估计,即用8来代替上式中的7.8.将8换成 $8-\varepsilon$ 一般被看成是相当困难的问题.潘承彪对陈景润结果的证明作了简化,当然7.8需换成大一些的数.

(5) 关于史尼尔曼常数、三个素数定理的简化与推广、无平方因子数的估计、华林问题的推广、指数和的估计、黎曼 ξ 函数、殆素数、数论函数的研究等方面,越民义、陈景润、丁夏畦、吴方、潘承洞、尹文霖、邵品琮、任建华、潘承彪、谢盛刚、楼世拓、姚琦、于秀源、陆洪文、陆鸣皋、冯克勤、于坤端及王元等都作了一些值得介绍的工作,在此就不详谈了.

陈景润(Chén Jǐngrùn, 1933—1996) 中国数学家.生于福建省福州市,卒于北京.

6 哥德巴赫猜想①

——陈景润 邵品琮

公元1742年6月7日德国人哥德巴赫(Goldbach)给当时住在俄国彼得堡的大数学家欧拉写了一封信,问道:是否任何不比6小的偶数均可表示成两个奇数之和?同时又问任何不比9小的奇数是否均可表成三个奇素数之和?我们把前者(偶数)称为问题(甲),后者(奇数)称为问题(乙).同年6月30日欧拉复信写道:"任何大于6的偶数都是二个奇素数之和.虽然我还不能证明它,但我确信无疑地认为这是完全正确的定理."也即下列问题是否正确应予论证:

(A) 每一个偶数 $n\geqslant 6$,均可找到两个奇素数 p',p'',使得 $n=p'+p''$;

(B) 每一个奇数 $n\geqslant 9$,总可找到三个奇素数 p_1,p_2,p_3,使 $n=p_1+p_2+$

① 摘自:陈景润,邵品琮.哥德巴赫猜想.沈阳:辽宁教育出版社,1987.

p_3.

这就是著名的哥德巴赫问题,或说是哥德巴赫猜想.

当然,如果(A)成立的话,(B)便随之成立,这是因为,任一奇数 $N_{奇} = (N_{奇} - 3) + 3, N_{奇} \geq 9$,把其中 $N_{奇} - 3$ 这个偶数(> 4),按(A)(若成立的话),就有两个素数 p_1, p_2,使得($N_{奇} - 3) = p_1 + p_2$,而把3叫 p_3(也是奇素数),便有了

$$N_{奇} = p_1 + p_2 + p_3 \quad (*)$$

这就指明了:若(A)成立,则必有(B).但若(B)成立,却反推不出(A)来了.

整个19世纪结束时,哥德巴赫问题的研究没有任何进展.当然曾经有人作了具体验证工作,例如,$6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, 14 = 11 + 3, 16 = 11 + 5, 18 = 11 + 7$,等等,现在已知直到 33×10^6(三千三百万)以内的偶数都是对的,从而相应的奇数也有同样的结论.问题是较大的偶数怎么样?

20世纪初,数学家希尔伯特在巴黎发表了著名23个难题中,哥德巴赫问题曾被第8个问题所涉及,1912年德国数学家朗道(Landau)在国际数学会报告中说:"即使要证明下面的较弱的命题:任何大于4的正整数,都能表成 C 个素数之和.这也是现代数学力所不能及的."但是,本世纪数学迅速发展的事实,响亮地回答了朗道的挑战,果然对问题(B)与(A)均取得了很大的成就.

须尼尔曼(Шнирельман, Левгенрихович, 1905—1938),苏联数学家.生于戈梅利.

人们遇到一些困难的理论问题时,总往往有两种方式去进行求解:一为直接地去求证本题的结论,即把诸如($*$)这类式子理解为一个方程式,当 p_1, p_2, p_3 限制在素数范围内时,解答个数记为 Ⅰ(依赖于 N),是否大于0呢?这方面就引出了对 Ⅰ 进行估算的问题,最早对它进行研究的有英国数学家哈代与李特德伍,成功地作出直接贡献的有前苏联数学家维诺格拉多夫和我国数学家华罗庚等人.另一方面的研究是将问题先削弱一些,然后逐步逼近而力争解决,这里头又分了两个途径:

(1)弱型哥德巴赫问题:先将 N 写成一些素数的和

$$N = p_1 + p_2 + \cdots + p_k \quad ①$$

我们希望总有一种较好的分法,使得 k 越少越好,特别当 N 为偶数时,若能证明当 $k = 2$ 时有解(即有素数 p_1, p_2 使其和为给定的 N),则原来的哥德巴赫问题(A)就解决了.现在放宽来研究,当 N 给定之后,能做到怎样的 k,使 k 个素数之和为 N.这便是弱型哥德巴赫问题要研究的目标.

(2)因数哥德巴赫问题:先将偶数 N 写成两个自然数之和

$$N = n_1 + n_2 \quad ②$$

而 n_1 与 n_2 里的素因数个数记为 a_1 与 a_2,简记为(a_1, a_2)或写成"$a_1 + a_2$".这样的问题也可说是"殆素数问题",即问:是否每一个充分大的偶数都可以表成两个殆素数之和?这里所谓"殆素数"就是指素因数的个数很少,例如,不超过 a

个的那种整数也即希望有一种好的分法，使得式②中要求的 a_1，a_2 均不超过某指定数．注意，假若能证明对于每一个偶数 N，总有 $a_1 = a_2 = 1$，也即有“1 + 1”结果的话，则哥德巴赫问题就成立了．

6.1 关于弱型哥德巴赫问题的研究

前苏联数学家须尼尔曼于1930年创造了“密率论”方法，结合1920年挪威人布朗创建的一种“筛法”，首先回答了朗道1912年的国际数学会上的著名挑战．他证明了下面一个重要的结果：每一个充分大的自然数都可以表为不超过 k 个素数之和，这里 k 是一个常数．这就开辟了弱型哥德巴赫问题研究的途径．后来有人明确估计出 $k \leqslant 80$ 万，即在①中，当 N 充分大时，有 k 个素数使其和为 N，而 $k \leqslant 800\,000$，太大了！当然是，最好当 N 为偶数时，能证出 $k \leqslant 2$，N 为奇数时，能证出 $k \leqslant 3$ 就根本解决了哥氏问题(A)与(B)．现在放宽研究 k，希望 k 逐渐向2或3靠拢．这方面的研究成果，进展如下(表里的数字是 k 的上界)：其实最后一项结果，还可具体写为：偶数 N 时，$k \leqslant 18$，奇数 N 时，$k \leqslant 17$．

结　果	年　代	结果获得者
800 000	1930	须尼尔曼(前苏联 Шндрелбман)
2 208	1935	罗曼诺夫(前苏联 Романов)
71	1936	海尔布朗(德国 Heilbron) 朗道(德国 Landau) 希尔克(德国 Scherk)
67	1937	蕾西(意大利 Ricci)
20	1950	夏彼罗(美国 Shapiro) 瓦尔加(美国 Warga)
18	1956	尹文霖(中国)
6	1976	旺格汉(R.C. Vaughan)

现在来谈谈须尼尔曼的“密率”是怎么回事．由某些整数所组成的集合记为 A，其中在小于等于 n 内出现的全体元素记为 $A(n)$，如果存在正数 $a_1 > 0$，使得对一切 n 均有 $A(n) \geqslant a_1 n$ 的话，亦即有

$$\frac{A(n)}{n} \geqslant a_1$$

此时说 A 的密度为 a_1，显然 $a_1 \leqslant 1$，如果能找到一个最大的 $a > 0$ 使得

$$\frac{A(n)}{n} \geqslant a$$

对一切自然数 n 成立的话，则称这个正数 a 为 A 的密率．

若记集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$，如果 $a_1>1$，则显然 A 的密率为 0；当 $a_n=1+r(n-1)(r>0)$，即首项为 1，公差为 r 的等差序列时，则 A 的密率为 $\frac{1}{r}$；但每一个等比序列所成集合的密率是 0；由素数定理或契贝晓夫定理知全体素数集合 P 的密率为 0；只有当 A 为全体自然数时其密率为 1，而且反过来也对：当 A 的密率为 1 时，A 就是全体自然数的集合.

须尼尔曼首先给出了下列定理：

定理 1 设 A,B 是两个集合，A,B 的密率分别为 α,β，记 $C=A+B$ 表示 C 的元素由 A 内元素与 B 内元素的和组成①，而 C 的密率为 γ，则有

$$\gamma\geqslant\alpha+\beta-\alpha\beta$$

证明 为方便起见，我们把集合 A 的密率 α 记为 $\alpha=d(A)$. 其余记号类似. 用集合记号法，有 $C=A+B$，而

$$A(n)=\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\ a\in A}}1,\ B(n)=\sum_{\substack{1\leqslant b\leqslant n\\ b\in B}}1$$

$$C(n)=\sum_{\substack{1\leqslant c\leqslant n\\ c\in C}}1$$

$$d(A)=\alpha,d(B)=\beta,d(C)=\gamma$$

那么，在自然数的一段 $(1,n)$ 中含有 A 内的 $A(n)$ 个整数. 设有 a_k 及 a_{k+1} 表其中依次相邻的两个数，则在这两数之间有 $a_{k+1}-a_k-1=l$ 个数不属于 A，它们是

$$a_k+1,a_k+2,\cdots,a_k+l=a_{k+1}-1$$

以上各数中间凡可以写成 $a_k+b(b\in B)$ 这种形式的数都属于 C 的，它们的个数等于 B 在 $(1,l)$ 一段中所包含整数的个数，这当然是 $B(l)$.

因此，在 A 的每相邻两数之间，如果所包含的一段自然数的长度（即个数）是 l，就至少有 $B(l)$ 个数属于 C. 因此在自然数的一段 $(1,n)$ 中，C 所包含整数的个数 $C(n)$ 至少是

$$A(n)+\sum B(l)$$

上式中 $\sum$ 的各项通过 $(1,n)$ 中不含 A 内整数的一段一段的自然数. 但根据密率的定义，有 $B(l)\geqslant\beta l$，故

$$C(n)\geqslant A(n)+B\sum l=A(n)+\beta\{n-A(n)\}$$

上面最后一个等式的成立是由于 $\sum l$ 等于 $(1,n)$ 中不落在 A 内的整数的个数，当然它等于 $n-A(n)$. 又由 $A(n)\geqslant\alpha n$，故

$$C(n)\geqslant A(n)(1-\beta)+\beta n\geqslant\alpha n(1-\beta)+\beta n$$

由此立刻得到

$$\frac{C(n)}{n}\geqslant\alpha+\beta-\alpha\beta$$

---

① 可用记号：$C=\{a_i+b_j\mid a_i\in A,b_j\in B\}$.

上式对所有整数 n 都成立，故

$$\gamma = d(C) \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta \tag{③}$$

由这个不等式③，还可以引出一个重要的结果：

定理 2　若 $C = A + B$，而 $d(A) + d(B) \geqslant 1$，则必有 $d(C) = 1$（也即此时 C 必为全体自然数集合）.

证明　我们首先指出，如果

$$A(n) + B(n) > n - 1$$

则有 $n \in A + B$，事实上，若 n 在 A 或 B 中，则定理已成立. 今设 n 既不在 A 又不在 B 中，于是

$$A(n) = A(n-1), B(n) = B(n-1)$$

而有

$$A(n-1) + B(n-1) > n - 1$$

设在 $(1, n-1)$ 一段内，A 与 B 所包含的数分别为

$$a_1, a_2, \cdots, a_r$$

$$b_1, b_2, \cdots, b_s$$

则

$$r = A(n-1), s = B(n-1)$$

而

$$a_1, a_2, \cdots, a_r$$

$$n - b_1, n - b_2, \cdots, n - b_s$$

都在 $(1, n-1)$ 一段中，它们的总个数是

$$r + s = A(n-1) + B(n-1) > n - 1$$

所以其中至少有两个相等，使得

$$a_i = n - b_k$$

则 $n = a_i + b_k$，故 n 在 $A + B$ 中.

注意

$$\frac{A(n)}{n} \geqslant d(A), \frac{B(n)}{n} \geqslant d(B)$$

若 $d(A) + d(B) \geqslant 1$，则有

$$A(n) + B(n) \geqslant n > n - 1$$

此时 $n \in C$，这对一切 n 成立. 故 C 为自然数集合，定理 2 成立.

须尼尔曼这个密率不等式定理

$$d(A + B) \geqslant d(A) + d(B) - d(A) \cdot d(B) \tag{③′}$$

为弱型哥德巴赫问题的进展奠定了基础. 后来人们总想改进这个不等式③′. 故在 $d(A) + d(B) \leqslant 1$ 假设之下，有所谓朗道 – 须尼尔曼的“假说”

$$d(A + B) \geqslant d(A) + d(B) \tag{④}$$

推广一下，在 $\sum_{i=1}^{k} d(A_i) \leqslant 1$ 条件下，有没有

$$d\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{k} d(A_i) \tag{⑤}$$

成立?

当然,由 ④ 到 ⑤ 是很容易的.

这个假说最初是通过具体的例子,在 1931 年由须尼尔曼和朗道推想出来的,看起来这个假说很简单其实很难证明.前苏联数学家辛钦在 $d(A_1) = \cdots = d(A_k)$ 的条件下,首先证得了这个假说成立.接着有不少的数学家企图证实这个"假说",但都只得到部分的结果.直到 1942 年,英国一位年轻的工程师名叫芒(Mann)的,在一次听报告时知道了这个问题,他回去后最终把这个不等式④证出来了,史称芒定理.1943 年美国数学家阿丁与德国数学家希尔克(Seherk)给出了比较简单的证明,1954 年又由希尔克与刻姆剖曼(Kemperman) 又给出了一个更新更简单的证明,并有所推广,成为后来数论教科书上的标准叙述.

阿丁(Artin, Emil, 1898—1962),奥地利数学家.生于维也纳,卒于汉堡.

对于弱型哥德巴赫猜想来说,由定理 1 与定理 2 就已足够.

事实上,如果一个集合 A 其密率为正密率 $a > 0$,则记

$$A_k = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{k}\text{(共 } k \text{ 项堆垒集合)}$$

则可得

$$d(A_k) \geqslant 1 - (1 - a)^k$$

显然只要取 k 足够大时,就有 $d(A_k) > \frac{1}{2}k$,那么集合 $C = A_k + A_k$ 就有

$$C(n) = A_k(n) + A_k(n) > \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n = n > n - 1$$

故 $n \in C$,它对一切自然数 n 成立,故此时 C 就是全体自然数集合.

可惜的是全体素数集合 P 的密率恰巧为 0,则并非正密率.但用布朗筛法,可以获得集合 $P + P$ 是正密率,从而若干个(例如 s 个)$P + P$ 就是全体自然数集合了.于是每一个自然数就可以写成 $2s$ 个素数的和,这样弱型哥德巴赫问题的须尼尔曼定理就成立了.当然,用筛法来证明 $P + P$ 集合具有正密率时,可用 1919 年布朗筛法也可用之后更好的 1949 后的塞尔伯格(Selberg) 筛法来推演的.无论哪种筛法来证明 $P + P$ 具有正密率这一结论时,均较复杂.这里就不再一一细叙了.

顺此,我们还要说明一下用筛法与单用密率方法在弱型哥德巴赫问题中的作用不同.例如,用筛法与密率论相结合的方法可以证明充分大偶数能表素数和的定理.这"充分大" 到底多大?往往是无法算出来的.如尹文霖证明每个充分大偶数可表至多 18 个素数的和,旺格汉进一步证明每个充分大偶数可表至多 6 个素数的和,均是对"充分大" 的偶数而言的.单用密率的方法其优越之处是在于可以证明对所有正整数表素数和的定理.例如,1977 年旺格汉证明了所有正整数均可表为至多 26 个素数的和.1983 年,我国张明尧博士改进为:所有

正整数均可表为至多 24 个素数的和.

关于弱型哥德巴赫问题从须尼尔曼到尹文霖以至旺格汉,以及再由旺格汉到张明尧的进展思路依据就介绍到这儿.但这里我们还特别应当提下列一段重要的科学史实:曾在 1922 年,英国剑桥大学教授哈代与李特伍德首创了"圆法",也就是前面说到的,他们最早对哥德巴赫问题的解数 ① 作了巧妙的估算.但后来联系哥氏问题求解时,却利用一个"黎曼猜想",在承认黎曼猜想成立的前提下,他证明了奇数哥德巴赫猜想(B) 成立.但是这个黎曼的假想,也是至今未曾解决的世界难题!所以这两位教授的工作有战斗之功劳,无胜利之成果.

1937 年,古彼德堡即现在的列宁格勒城的一位数学家维诺格拉多夫不用任何假设,创造了"三角和方法" 的数学工具,在世界上第一个证明了大奇数哥德巴赫猜想正式成立,从而称为哥德巴赫 - 维诺格拉多夫定理,或简称维氏定理:当 $N_{奇}$ 充分大时,(B) 成立(例如,1946 年有人具体指出了:譬如当 $N \geqslant e^{e^{16.838}}$ —— 大约为 10 的 50 万次方时,便有素数 p_1, p_2, p_3 使(*) 成立).

因此,在 ① 中,1937 年已被维氏证明了:不论奇偶的大整数 N,均有 $k \leqslant 4$,或确切地说:当 N 为大奇数时,有 $k \leqslant 3$;当 N 为大偶数时,有 $k \leqslant 4$.这已经远比 1950,1956 诸年代的 $k \leqslant 20$ 以及 $k \leqslant 18$ 等结果来得优越得多了.那么,为什么还将落后于维氏 1937 年的结果加以重视赞扬呢?原因是:维氏用到了诸如复变函数换路积分等精深的复分析方法,但鉴于当初原问题是否能在实分析的限制中用"初等方法" 予以求解呢?这在方法上也颇有特色的,此处表格中的结果全是在初等方法中获得的,因而也引人注目.

这里还应介绍一下,1959 年潘承洞还将 p_1, p_2, p_3 限制在 $\frac{N}{3}$ 附近时,做出了一个很好的估计.1977 年潘承洞的弟弟我国数学家潘承彪曾对于原来维氏定理的维氏繁难的证明,给出了一个十分简化的很好证明.

特别应当提出的是:1938 年华罗庚教授证明了几乎所有偶数都能表成两奇素数的和,也即哥德巴赫猜想几乎对所有偶数成立.这就为今天尚在研究的"例外值" 课题,开辟了新的道路.早在 1941 年,华罗庚教授对维氏"三角和方法" 作了非常深刻的研究与改进,并对维氏定理作了重要推广,华罗庚教授证明了:每一个充分大的奇数 N,皆可表为三个奇素数的 k 次方之和,即

$$N = p_1^k + p_2^k + p_3^k \qquad (*)'$$

其中,k 为任意给定的正整数.特别,当 $k = 1$ 时,即维氏定理.

6.2 关于因数哥德巴赫问题的研究

尽管在哥德巴赫问题上已有弱性问题的一系列成果,以及尤其是维氏定理与华氏推广等优秀工作,但面临偶数的哥氏原猜想问题,并没有给予直接的根本的解决.

大奇数哥氏问题(B)已为维氏所解决,大偶数哥氏问题(A)怎么办?针对这一问题,在因数哥德巴赫问题的研究方面,逐步进展,有了一系列的成果.挪威数学家布朗在1920年创造一种"筛法",首先证明了下面一个结果:每一个充分大的偶数都可以表示为两个各不超过9个素数相乘积的和,也即在②中,当N为大偶数时

$$N = p'_1 \cdots p'_{a_1} + p''_1 \cdots p''_{a_2}$$

其中,p',p''均表素数,而素因数个数$a_1 \leqslant 9, a_2 \leqslant 9$,即(9,9),或说证得了"9+9".这在殆素数问题研究上首开记录.之后便有接二连三的改进工作,特别是我国一些数学家在他们年轻的时候,成功地提出了利用"筛法"及"三角和方法"相结合的新解析数论方法,在20世纪50年代到60年代期间,做出了一系列重要的改进,取得了许多优秀的成果,在这基础上,陈景润曾于20世纪60年代后期到70年代初获得了"1+2"的重大结论,取得了世界领先的成果.关于这方面的研究进展情况如下表所示.

结　　果	年代	结果获得者
(9,9)	1920	布朗(挪威 Brun)
(7,7)	1924	雷特马赫(德国 Rademacher)
(6,6)	1932	埃斯特曼(英国 Estermann)
(5,7),(4,9), (3,15),(2,366)	1937	蕾西(意大利 Ricci)
(5,5)	1938	布赫夕塔布(前苏联 Бухштаб)
(4,4)	1940	布赫夕塔布(前苏联 Бухштаб)
(1,c),c 常数	1948	瑞尼(匈牙利 Renyi)
(3,4)	1956	王元(中国)
(3,3),(2,3)	1957	王元(中国)
(1,5)	1961 1962	巴尔班(前苏联 Барбан) 潘承洞(中国)
(1,4)	1962 1963	王元(中国) 潘承洞(中国) 巴尔班(前苏联 Барбан)
(1,3)	1965	布赫夕塔布(前苏联 Бухштаб) 维诺格拉多夫(前苏联 А.И.Виноградов) 朋比尼(德国 Bombieri)
(1,2)	1973	陈景润(中国)

这里应当说明的是巴尔班(1,4)结果,以及其1961年(1,5)的工作中,证明都有错误,经潘承洞教授在1964年指出后,到1970年他才给予改正.

这儿还要谈谈1948年匈牙利数学家瑞尼的"1 + c"(c 是常数,很大)工作,这是很有意思的纪录.因为这里开始了可以控制住一个为素数,而只要努力降低另一个的素因数个数就行了.这方面的研究,首先是王元于1957年在黎曼假设下证得了"1 + 5"成立.毋须任何假设的成果应当归功于1962年潘承洞的"1 + 5"结果,这个结果第一次定量地而且是低纪录地引向了接近"1 + 1"的境界.实际上,由1962年的"1 + 5"之后,1963,1965相继出现了"1 + 4"以及"1 + 3"的重要成就.以至于在1966到1973年内又出现了我们的最新成果"1 + 2"结论.顺便说一下,所谓结果是1966年到1973年完成,是指陈景润实际上已在1966年作出了这一结论,也曾用某些方式写过简报,但详尽而正式地写成论文发表(于《中国科学》杂志)乃是1973年,因此一般都说是在1973年获得的.在我们的文章发表后的短短几年中,世界上就出现了很多种简化的证明,其中有四、五个简化证明是较好的,其中最好的简单而本质的证明就是由我国数学家王元、丁夏畦与潘承洞三位教授合作的论文中所给出的.我们的结果"1 + 2"一发表,就引起了世界数学家的重视与兴趣,英国数学家哈伯斯坦姆和德国数学家黎希特合著的一本叫《筛法》的数论专著,原有十章,付印后见到了我们的"1 + 2"结果,特为之增添写上了第十一章,章目为"陈氏定理".所谓"陈氏定理"的"1 + 2"结果,通俗地讲,是指对于任给一个大偶数 N,那么总可以找到奇素数 p',p'' 或 p_1,p_2,p_3,使得下列两式至少有一个成立,即

$$N = p' + p'' \quad ④$$

$$N = p_1 + p_2 p_3 \quad ⑤$$

当然并不排除④,⑤同时成立的情形,例如,在"小"偶数时,若 $N = 62$,则可以有

$$62 = 43 + 19$$

以及

$$62 = 7 + 5 \times 11$$

总的来说,哥德巴赫问题是我们科学群山之一峰,在数论中,或扩大一些说,在数学中群山耸立,不少科学的堡垒确实需待我们去攻克,特别是期待着我们的青年数学工作者能够接过老一辈科学家的班而奋勇前进!上述进展表格中所列举的这一系列突出的成就,一方面固然是作者们不倦努力的结晶,另一方面也更应该看到,这二三十年来,以华罗庚教授为首的中国数论学派的发展壮大过程,许多青年数学家曾在老一辈科学家的辛勤培育下,共同努力,形成了一个数论研究的集体,这为奠定我们获得的"1 + 2"结果的学术研究基础方面的作用,也是不可忽视的重要因素.所以要提倡有一个互相学习的科研集体.正因为这样,20世纪80年代初,我们的已故导师华罗庚教授在英国访问讲学期间,英国

皇家数学会的主席杜特(Todd)教授就高度评价了以华罗庚教授为首的中国数论学派的突出成就.那么,这个学派的基本特点是什么呢?第一,华教授要求他的学生们必须具备雄厚的高等数学基础知识,要掌握较熟练的算题技能.第二,华教授要求他的学生们经常保持一个清醒的头脑,要随时明白自己的业务高度,任何时候总有自己的奋斗目标,始终有一股战斗式的业务上进心.一句话,华教授是以"严"来要求我们的,这也是我国数论研究工作做出重大成就的业务基础,没有这一点是不可思议的.因此建议,打算或正在搞哥德巴赫问题或其他著名世界难题的青年们,能正确认识这些难题的艰难性.在努力从"严"打好高初等数学基础的前提下,再来向世界难题进军!否则很可能会白费精力和时间,徒劳无功.

7 谈谈"哥德巴赫"问题①

——王元

7.1 前言

在这篇短文里,我们向读者介绍一个著名的数论问题,即所谓哥德巴赫(Гольдбах)问题.为了避免引用较高深的数学工具,我们除了谈谈这一问题的发展历史及其成果外,只是十分简单地谈一下各种处理方法.其实本文所写的东西在有关的数论书籍中都有记载,作者只是加以整理与归纳,以便于读者更容易地了解这一问题.至于欲详细了解这方面工作的读者,请参看华罗庚的著作②.

哥德巴赫问题是在1742年哥德巴赫写信给欧拉时提出来的.在信中,他提出了关于将整数表为"素数"③之和的猜想.这个猜想可以用略为修改了的语言叙述为:

(A)每一个大于等于6的偶数都是两个奇素数之和.

(B)每一个大于等于9的奇数都是三个奇素数之和.

显然命题(B)是命题(A)的推论.盖若命题(A)真实,又设 $N \geqslant 9$ 为奇数,则 $N-3 \geqslant 6$ 为偶数.由(A)可知有奇素数 p_1, p_2 使 $N-3=p_1+p_2$,所以 $N=$

① 原载《数学通报》,1,1964,36~39,本文发表后,哥德巴赫问题又有了不少进展,请参看作者以后的文章.

② 华罗庚.指数和的估计及其在数论中的应用.北京:科学出版社,1963.

③ 素数(或称质数)是除1与自身之外,没有其他因子的大于1的整数.例如,2,3,5,7,等等.今后常用 $p, p_1, p_2, \cdots$ 来表示素数.素数以外的正整数称为复合数.

$3+p_1+p_2$. 因此命题(B) 成立.

从哥德巴赫写信起到今天,已经积累了不少宝贵的数值资料. 例如皮平(N. Pipping) 核对过,命题(A) 当 $N \leqslant 10^5$ 时是正确的. 但是迄今还不能证明这两个命题的真伪.

在第五届国际数学会上,朗道曾经说过,即使要证明如下较弱的命题(C),也是现代数学家所力不能及的.

(C) 存在一个正整数 c,使每个大于等于2的正整数都可以表为不超过 c 个素数之和.

首先是须尼尔曼(Л.Г.Шнирельман) 在 1930 年(哥德巴赫提出猜想后的 188 年) 证明了 c 的存在性. 换言之,他完全解决了命题(C). 须尼尔曼在他的论文中,引入了关于自然数集合非常重要的概念 —— 正密率,并运用筛法的成果,从而证明了命题(C).

哈代与李特伍德在 20 世纪的 20 年代,系统地开创与发展了堆垒数论①中的一个崭新的解析方法. 这个方法就是举世闻名的圆法. 他们在广义黎曼(Riemann) 猜想②成立的假定下证明了命题(B) 当奇数 N 充分大时成立.

为了取消在证明中所用到的未经证明的猜想,我们需要估计某种类型的"指数和"(或称之为"三角和"). 因此,获得指数和的精确估计,就成了圆法的最主要环节了. 在近三十年来,维诺格拉多夫创造了一系列估计指数和的重要方法. 特别,他在 1937 年成功地给出某种以素数为变数的指数和以精致的估计,从而他证明了命题(B) 对于充分大的奇数是正确的. 巴雷德金(К.Г. Бороздкий) 计算过,当奇数 $n \geqslant e^{e^{16.038}}$ 时,即能表成三个素数之和.

沿用哈代与李特伍德原来的方法,即不用指数和的估计,而用函数论的方法,林尼克在 1946 年亦证明了同样的结果.

我国著名的数学家华罗庚在1938年证明了,命题(A) 对于"几乎所有"的偶数皆成立. 详细言之,命 $M(x)$ 表示不超过 x,而又不能表示成为两个素数之和的偶数的个数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M(x)}{x}=0$. 换言之,使命题(A) 成立的偶数的"出现概率"为 1.

另外一个研究哥德巴赫问题的方法就是筛法. 筛法是埃拉托塞尼氏(Eratosthenes) 首创的. 布朗与塞尔伯格曾先后分别对这个方法作出过重要的改进. 用筛法处理这一问题,需首先将命题(A) 换一个提法,即将命题(A) 中的

---

① 堆垒数论是研究将整数表成某种类型的数之和的分支. 例如,熟知任一正整数都是四个整数的平方和,九个整数的立方和等等. 特别研究将整数表为与素数有关的数之和的分支,常常称为堆垒素数论. 例如哥德巴赫问题就属于这一分支.

② 广义黎曼猜想是迄今还不能证明的一个函数论的猜想. 素数论中一系列重大问题的完满解决往往都归结为这一猜想的解决. 在此不详谈了.

素数都换成"殆素数"①. 布朗首先在 1920 年证明了，每一充分大的偶数都是两个素因子个数各不超过 9 的殆素数之和. 现在我们已经可以将 9 分别改进为 2 与 3.

关于表偶素数为一个素数及一个殆素数之和的问题. 首先是埃斯特曼在广义黎曼猜想成立的假定下，运用筛法证明了每一充分大的偶数都是一个素数及一个素因子个数不超过 6 的殆素数之和. 为了取消这一未经证明的猜想，林尼克作出了一系列重要的贡献，特别是他首创的"大筛法". 瑞尼在 1948 年证明了每一充分大的偶数都可以表为一个素数及一个素数因子个数不超过常数 R 的殆素数之和. 现在已经可以确定 $R \leqslant 4$.

在堆垒素数论中，还有比哥德巴赫问题更广的问题. 特别是华林(Waring) - 哥德巴赫问题. 这方面卓越的成果是华罗庚得到的，建议读者去看他的著作②。

华林(Waring, Edward, 1734—1798)，英国数学家，生于什鲁斯伯里，卒于该城附近的普利莱.

7.2 密率方法

现在介绍一下正密率的概念. 命 A 表示由一些互不相同的非负整数 a 所成的集合. 命 $A(n)$ 表示 A 中不大于 n 的正整数的个数，即 $A(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant n \\ a \in A}} 1$. 在此需注意 0 并不计算在内. 若 $\alpha > 0$ 为对一切 $n, A(n) \geqslant \alpha_n$ 都成立的最大正数，则集合 A 称为具有正密率 α. 否则称 A 的密率为零，显然有 $\alpha \leqslant 1$. 若 $\alpha = 1$，则 A 包有全体自然数.

例如，全体奇数的密率等于 $\frac{1}{2}$，全体偶数的密率为零.

如果有两个非负整数集合 A 与 B，则形如 $a + b(a \in A, b \in B)$ 的整数所成的集合 C 称为 A 与 B 的和集. 记为 $C = A + B$，特别，记 $2A = A + A$，运用归纳法，可以定义 $kA = A + (k-1)A$.

命题(C) 的证法可以简单地描述如下：

(1) 关于正密率，须尼尔曼证明了这样的结果，若非负整数集合 A 具有正密率 α，且 $0 \in A$，则存在仅与 α 有关的常数 k，使 kA 的密率为 1，换言之，kA 即全体非负整数.

(2) 命 A 表示由 0,1 及全体形如 $a = p_1 + p_2$ 的整数所成的集合. 借助于布朗筛法，须尼尔曼证明了 A 具有正密率 α，从而由(1) 可知，kA 即全体非负整数. 这就是说任何正整数皆可以表为 k 个 A 中的元素之和. 命整数 $m > 2$，则

$$m = 2k + (m-2) = 2 + b + p_1 + \cdots + p_l$$

① 所谓殆素数，即素因子(相同的或相异的) 的个数不超过某一固定常数的整数.
② 华罗庚. 堆垒素数论. 北京：科学出版社，1957.

其中，$t \leqslant 2k - b, b \geqslant 0$. 显然 $2+b$ 可以表为不超过 $b+1$ 个素数之和，所以 m 可以表为不超过 $c = 2k+1$ 个素数之和. 故命题(C)成立，即得

定理 1 任何大于等于 2 的整数皆可以表为不超过 c 个素数之和，此处 c 为一个常数.

命 s 表示最小的正整数，使每一充分大的整数都可以表为不超过 s 个素数之和. 常常称 s 为须尼尔曼常数. 在维诺格拉多夫的结果，问世之前①，估计 s 是很有趣的. 须尼尔曼的方法不仅能够得到 s 的存在性，而且可以得到 s 的明确上界. 他的方法给出 $s \leqslant 800\,000$. 其后罗曼诺夫(Н.П.Романов)得到了 $s \leqslant 2\,208$(1935)，沿这一方向，还有海尔布伦、朗道与希尔克的 $s \leqslant 71$(1936)及黎奇的 $s \leqslant 67$(1937).

s 的改进，主要依靠筛法技巧的改良. 在塞尔伯格筛法问世后，运用须尼尔曼方法，s 还有进一步的降低. 例如，夏皮罗(H.N.Shapiro)与瓦尔加(J.Warga)得到 $s \leqslant 20$(1950)及尹文霖得到 $s \leqslant 18$(1956). 附带说一句，运用 1940 年发表的布赫夕塔布及塔尔塔可夫斯基(В.А.Тартаковский)对布朗方法的改进，我们也可以得到比 $s \leqslant 67$ 强的结果.

必须指出，用须尼尔曼方法来估计 s，一切证明过程都是初等的，即不运用复变函数论或与它同样深度的数学工具. 而维诺格拉多夫定理的证明中，却用到了较高深的数学工具.

密率方法是广有用途的，用这一方法可以得到不少堆垒数论的有趣结果，而且密率论也有其自身的趣味，现在已经渐渐发展成为一个独立的分支了. 在此我们就不详谈了.

7.3 圆法

命 n 为整数，读者易证

$$\int_0^1 e^{2\pi i n\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, 当\ n = 0 \\ 0, 当\ n \neq 0 \end{cases} \qquad ①$$

借助于这一关系式，方程

$$N = p_1 + p_2 + p_3 \qquad ②$$

(其中，N 为给定奇数，p_1, p_2, p_3 为素数变元)的解答 $\{p_1, p_2, p_3\}$ 的组数 $r(N)$ 可以表示成为积分

$$r(N) = \int_0^1 \Big(\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i N\alpha} d\alpha \qquad ③$$

式③的证明如下：将③的右端展开即得

---

① 读者不难看出，由维诺格拉多夫的结果可以得到 $s \leqslant 4$.

$$\int_0^1 (\sum_{p \leq N} e^{2\pi i\alpha p})^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha = \sum_{p_1 \leq N} \sum_{p_2 \leq N} \sum_{p_3 \leq N} \int_0^1 e^{2\pi i(p_1+p_2+p_3-N)\alpha} d\alpha$$

由①可知

$$\int_0^1 e^{2\pi i(p_1+p_2+p_3-N)\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, 当 \ p_1+p_2+p_3 = N \\ 0, 当 \ p_1+p_2+p_3 \neq N \end{cases}$$

故得式③.

因此只要能够证明,当 N 充分大时有

$$r(N) > 0$$

即得维诺格拉多夫的结果.维诺格拉多夫定理的证法可以简单描述如下:

(1) 由于 $e^{2\pi i n\alpha}$ 是 α 的有周期 1 的函数,所以将上面所有公式中的积分区间 $[0,1]$ 换为任意长度为 1 的区间 $[\beta,\beta+1]$ 都是可以的.命 $\tau = \frac{N}{\log^h N}$(其中 $h \geqslant 20$ 为常数),当 $(a,q)=1$①及 $1 \leqslant q \leqslant (\log N)^h$ 时,命 $M_{a,q}$ 表示区间

$$M_{a,q}: \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{\tau}\right]$$

可以证明当 N 充分大时,诸区间 $M_{a,q}$ 是互不重叠的.诸 $M_{a,q}$ 之和集记为 M,称为"优弧".在区间 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right]$ 中去掉 M 后剩下的部分,记为 m,称做"劣弧".因此

$$\begin{aligned} r(N) = & \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{p \leq N} e^{2\pi i\alpha p}\right)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha = \\ & \int_M \left(\sum_{p \leq N} e^{2\pi i\alpha p}\right)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha + \\ & \int_m \left(\sum_{p \leq N} e^{2\pi i\alpha p}\right)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha \text{②} \end{aligned} \tag{④}$$

(2) 运用素数分布理论可以证明,当 N 充分大时有

$$\int_M \left(\sum_{p \leq N} e^{2\pi i\alpha p}\right)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha > \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{N^2}{\log^3 N} \tag{⑤}$$

应该指出,克服这一部分困难的功绩基本上应归功于佩吉(A.Page)与西格尔(C.L.Siegel).

(3) 维诺格拉多夫得到了如下的指数和估计,当 $\alpha \in m$ 时

$$\left|\sum_{p \leq N} e^{2\pi i\alpha p}\right| \leqslant c_1 \frac{N}{\log^5 N}$$

(其中,c_1 是一个常数)又命 $\pi(N)$ 表示不超过 N 的素数的个数,则

---

① (x,y) 表示 x 与 y 的最大公约.

② $\int_M$ 与 $\int_m$ 分别表示在优弧与劣弧上的积分.

$$\pi(N) < N$$

因此

$$\left|\int_m \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha\right| \leqslant \int_m \Big|\sum^{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big|^3 d\alpha \leqslant$$

$$c_1 \frac{N}{\log^5 N}\int_m \Big|\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big|^2 d\alpha <$$

$$c_1 \frac{N}{\log^5 N}\int_0^1 \Big|\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big|^2 d\alpha =$$

$$c_1 \frac{N}{\log^5 N}\pi(N) < c_1 \frac{N^2}{\log^5 N} \qquad ⑥$$

(4) 由 ④,⑤,⑥ 即得:当 N 充分大时有

$$r(N) > 0$$

换言之,我们得到:

定理 2 每一充分大的奇数都可以表成三个素数之和.

在此我们还应该提到爱斯特曼的两个结果,这是他在维诺格拉多夫定理问世之前得到的.他在 1937 年发表了:

(1) 每一充分大的奇数都能表成 $p_1 + p_2 + p_3p_4$.

(2) 每个充分大的整数都是两个素数及一个平方数之和.

运用圆法,林尼克证明了,存在常数 c 使每一偶数 $N \geqslant 4$ 都能表成

$$2N = p_1 + p_2 + 2^{x_1} + \cdots + 2^{x_s}, s \leqslant c$$

圆法是广有用途的,堆垒数论中不少著名问题的最精密的结果都是用这一方法获得的.指数和的估计更是十分重要的,除堆垒数论外,它在数论的其他分支中亦有着卓越的应用,例如解析数论与几何数论等.此外,在理论物理、概率论与计算数学的某些问题上,也有过成功的应用.在此就不细谈了.

但需指出,用圆法来处理命题(A) 是十分困难的.盖因将偶数 N 表为两素数和的表法 $r'(N)$ 为

$$r'(N) = \int_0^1 \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^2 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha$$

同样可以将上面的积分区间分成优弧与劣弧,则可以证明

$$\left|\int_m \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^2 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha\right| \leqslant c_2 \frac{N}{\log^2 N}\log\log N$$

但另一方面,作为应该忽略不计的劣弧上的积分,目前只能得到如下的估计

$$\left|\int_m \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}\Big)^2 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha\right| \leqslant c_3 \frac{N}{\log N}$$

因此,看来困难是十分巨大的.

关于维诺格拉多夫定理的推广,吴方与潘承洞做过一些工作.

7.4 筛法

筛法最初是用来寻找不超过 N 的全体素数的.笔者曾为本刊撰写过一篇文章(谈谈"筛法",1958,1),简单地介绍了筛法的概念.现在只来谈谈筛法是怎样与哥德巴赫问题联系起来的.

命 $N \geqslant 4$ 为一个偶数,$a \geqslant 2$ 为整数及 $P_a = p_1 \cdots p_r$,此处

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_r \leqslant N^{\frac{1}{a}}$$

为不超过 $N^{\frac{1}{a}}$ 的全体素数.又命

$$P(N, N^{\frac{1}{a}}) = \sum_{\substack{2 \leqslant n \leqslant N-2 \\ (n(N-n), P_a) = 1}} 1 \qquad ⑦$$

此处右端表示对满足条件 $2 \leqslant n \leqslant N-2$ 及 $(n(N-n), P_a) = 1$ 的整数 n 求和.

倘若能证明

$$P(N, N^{\frac{1}{2}}) > 0 \qquad ⑧$$

则命题(A)成立.

由于式⑧成立的意义为存在 n 满足 $2 \leqslant n \leqslant N-2$ 及 $(n(N-n), P_2) = 1$,故 n 与 $N-n$ 必皆为素数.倘若不然,假定 n 的素因子个数大于等于2,因为小于$\sqrt{N}$ 的素数都不能整除 n,所以 n 的素因子皆大于$\sqrt{N}$.因此 $n > N$,矛盾,故 n 为素数.同法可知 $N-n$ 亦为素数.由于

$$N = n + (N-n)$$

故得命题(A).

同法可证,若

$$P(N, N^{\frac{1}{a}}) > 0$$

则 $N = n + (N-n)$,此处 n 与 $N-n$ 皆为素因子个数各不超过 $a-1$ 的殆素数.

因此,问题归结为如何估计和⑦的下界了.首先是布朗,他本质地改进了古典筛法,从而证明了,当 N 充分大时有

$$p(N, N^{\frac{1}{10}}) > 0$$

换言之,他证明了

定理3 每一个充分大的偶数皆为两个素因子个数各不超过9的殆素数之和.

为叙述简单,我们将下面的命题记为(a,b):

每一充分大的偶数皆为一个不超过 a 个素数的乘积及一个不超过 b 个素

数的乘积之和.

在布朗之后,无论在估计和 ⑦ 方面,及其用于哥德巴赫问题方面,都有不断的改进.特别应该指出的是在1947年,塞尔伯格发表了本质上不同于布朗的估计和 ⑦ 的方法.对于已知的各种情形,都可以用它来改进以往用布朗方法得到的结果.关于定理3的进展历史如下:拉德马赫尔得到(7,7)(1924),埃斯特曼得到(6,6)(1932),立奇得到(5,7),(4,9),(3,15)及(2,366)(1937),布赫夕塔布得到(5,5)(1938)及(4,4)(1940),库恩得到(a,b),此处 $a+b\leqslant 6$(1954).笔者得到(3,4)(1956),还与维诺格拉多夫分别独立地得到(3,3)(1957),笔者同时还得到(a,b),其中 $a+b\leqslant 5$.最后笔者证明了(2,3)(1957).

关于表充分大的偶数为素数及殆素数之和的问题,需要估计与 ⑦ 相应的和

$$\widetilde{P}(N,N^{\frac{1}{a}})=\sum_{\substack{2\leqslant p\leqslant N-2\\(N-p,P_a)=1}}1 \qquad ⑨$$

此处右端对满足 $2\leqslant p\leqslant N-2$ 及 $(N-p,P_a)=1$ 的素数 p 求和.

若能证明

$$\widetilde{P}(N,N^{\frac{1}{a}})>0$$

则 $N=p+(N-p)$,此处 $N-p$ 为不超过$a-1$个素数的乘积.特别当 $a=2$ 时,则得命题(A).

首先是瑞尼证明了存在常数 R 使

$$\widetilde{P}(N,N^{\frac{1}{R}})>0$$

换言之,他证明了:

定理4 每一个充分大的偶数皆为一个素数及一个素因子个数不超过常数 R 的殆素数之和.

如果用瑞尼原来的方法来计算,R 将是很大的.巴尔巴恩(М.Б.Барбан),潘承洞,勒费(Б.В.Левин)与笔者作了改进,得到 $R\leqslant 4$(1962).在广义黎曼猜想成立的假定之下,笔者曾证明了 $R\leqslant 3$(1957).

素数论中一系列困难的问题,只要将素数换成殆素数的提法,往往就能用筛法来处理.目前殆素数论已经逐渐成为一个独立的分支了.筛法在数论的其他分支中也日益产生重要的应用.至于筛法这一概念,在其他数学分支中,特别在概率论中亦是颇有用途的.

7.5 后语

在本文结束之际,不难看出,事物之间是彼此有联系的.哥德巴赫问题虽然是离散的整数间的一条规律,但是现有的一切结果,都是在近代数学成就的基

础上,通过十分迂回的道路而得到的.特别地,有时把这一问题化为一个连续性的提法,深刻地运用了连续性的数学工具,才得到了结果.看来企图从整数的定义出发,用简单的算术方法来处理这一类问题,是不易收效的.因此笔者认为,有兴趣于这类经典问题者,先熟悉一下已有的成果与方法,再作进一步的探讨,可能是有益的.

8 哥德巴赫猜想①

——徐本顺 解恩泽

哥德巴赫猜想是解析数论的一个中心课题.这一猜想从提出到现在已经二百多年了,但至今没有被证明.为了解决这一问题,许多数学家付出了艰苦的劳动,并取得了一系列成果.我国著名数学家陈景润解决了哥德巴赫猜想 1 + 2 的问题,被数学家誉为"陈氏定理".到目前为止,这是对哥德巴赫猜想研究的最好结果.如果解决了哥德巴赫猜想 1 + 1 的问题,那么哥德巴赫猜想就彻底解决了.目前距解决这一猜想,虽然只有一步之差,但这一步究竟如何迈出,又何时达到终点,是数学家当前难以预料的问题.

8.1 猜想的提出

在两个正整数相加中,我们会遇到如下的关系

$$3 + 7 = 10$$
$$3 + 17 = 20$$
$$13 + 17 = 30$$
$$17 + 23 = 40$$
$$13 + 37 = 50$$

我们来分析一下上述等式有什么相似之处.很自然地会发现:等式右边的数都是偶数,等式左边的两个数都是奇素数.我们已经知道两个奇素数之和必定是一个偶数.反过来,我们要问:任一个偶数都可以分拆成两个奇素数之和吗?我们再作一些观察.第一个等于两个奇素数之和的偶数为

$$6 = 3 + 3$$

接下去为

$$8 = 3 + 5$$

① 选自:徐本顺,解恩泽.数学猜想——它的思想与方法.长沙:湖南科学与技术出版社,1990.

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$
$$16 = 3 + 13 = 5 + 11$$
$$18 = 5 + 13 = 7 + 11$$
$$20 = 3 + 17 = 7 + 13$$
$$22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$$
$$24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$$
$$26 = 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13$$
$$28 = 5 + 23 = 11 + 17$$
$$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$$

通过上述各例观察,可知这些偶数都可分拆成两个奇素数之和,于是,由特殊到一般,我们可提出如下猜想:

(A) 任何大于等于 6 的偶数都是两个奇素数之和.

对于偶数可提出上述判断,对于奇数是否也可提出类似结论呢?显然,奇数不能分拆成两个奇素数之和.既然两个不行,那么分拆成三个奇素数之和,能行吗?通过下面的实例进行观察

$$9 = 3 + 3 + 3$$
$$11 = 3 + 3 + 5$$
$$31 = 3 + 5 + 23 = 3 + 11 + 17 = 5 + 7 + 19 = 5 + 13 + 13$$

由特殊到一般,于是可猜想:

(B) 任何大于等于 9 的奇数都是三个奇素数之和.

上述规律是否有普遍性?德国著名数学家哥德巴赫(Christian Goldbach, 1690—1764) 对这个问题发生了浓厚的兴趣,但是,他不敢肯定其正确性.于是,他于 1742 年写信给当时的数学权威欧拉,就此问题进行请教.他问欧拉:是不是每个偶数都是两个素数之和,每个奇数都是三个素数之和?欧拉回信说:他验算到 100 多,发现是对的,但不能给出一般性的证明.

到 1770 年,华林首次把这个问题以猜想的形式写在书中,并公诸于世.由于当时把 1 也看成素数,所以问题提的不太确切.确切的提法是上面所述的猜想(A)、(B).猜想(A) 叫做偶数哥德巴赫猜想,猜想(B) 叫做奇数哥德巴赫猜想.易知,由(A) 成立,可推出(B) 成立.事实上,如果(A) 成立,设 N 是一个大于 7 的奇数,那么 $N - 3$ 就是一个大于等于 6 的偶数,据(A),有

$$N - 3 = p_1 + p_2$$

其中 p_1, p_2 为奇素数.因此

$$N = p_1 + p_2 + 3$$

是三个奇素数之和.从而猜想(B)成立.这样一来,只要解决(A),(B)也就随之而解决了.

8.2 悲观的预言与惊人的成果

从18世纪40年代哥德巴赫猜想的提出,到19世纪末,许多数学家都对这一猜想进行了研究,但在这一百五十多年中,并没有得到任何实质性的结果和提出有效的研究方法.只是对一些数值作了进一步的验证,使猜想变得更加可信,增加了它的合理性.另外还提出一些简单的关系式和一些新的推测.在这一期间,数学家们虽然对哥德巴赫猜想的探讨作了极大的努力,但是由于用来解决这一问题的数学理论还没有发展到这个地步,因此进展缓慢.与此同时,由于欧拉、高斯、迪利克雷、黎曼、哈达马等著名数学家的工作,使数论和函数论得到了空前的丰富和发展,特别是分析与数论相结合,在数论中引入了分析的方法,这就为20世纪对这一猜想的研究提供了强有力的工具.在这一百五十多年中,研究哥德巴赫猜想没有什么进展,这从反面说明,解决数学难题,得有足够的数学基础知识,那些连初等数论尚没有弄明白,更不用说解析数论和函数论,就想一下子证明哥德巴赫猜想,肯定是异想天开,白费力气.

1900年,在巴黎召开的第二届国际数学家大会上,德国著名数学家希尔伯特提出了数学中著名的23个问题,哥德巴赫猜想就是第八个问题的一部分.在这之后的十多年,对哥德巴赫猜想的研究并未取得进展.1912年,德国数学家朗道(E. Landau,1877—1938)在英国剑桥召开的第五届国际数学家大会上悲观地说,"即使要证明下面较弱的命题(C),也是当代数学家所力不能及的:

(C)存在一个正整数 k,使每一个大于等于2的整数都可表为不超过 k 个素数之和.

1921年,英国数学家哈代在一次数学会议上也谈到:哥德巴赫猜想,可能是没有解决的数学问题中的最困难的一个.

在解决这一难题的过程中,数学家看到其艰巨性,特别在亲自尝试过程中,其体会更为深刻,但勇于探索的人们,并没有望而止步,而是不断地为之拼搏,努力地从前人研究所走过的道路上,去挖掘解决哥德巴赫猜想可能取得成果的潜在思想.正当一些数学家对此猜想感到无能为力时,数学家却开始从不同的方向上取得了一系列惊人的成果.这些成果的取得,不仅为解决哥德巴赫猜想开拓了途径,而且还有力地推进了数论和其他数学学科的发展.

8.3 圆法

19世纪中叶,迪利克雷和黎曼把分析方法移植到数论中来,从而使数论得到了空前的发展,使一些一筹莫展的问题,有了解决的希望.从1920年开始,英

国数学家哈代和李特伍德系统地开创与发展了堆垒素数论中的一个崭新方法. 1923 年发表论文专论哥德巴赫猜想. 这一新方法的思想孕育在 1918 年哈代和印度数学家拉马努金(Ramanujan)的文章中. 后来人们就称这个新方法为哈代 - 李特伍德 - 拉马努金圆法. 这个方法,对于哥德巴赫猜想来说,就是把数论中离散的问题归结到连续问题来处理. 其基本思想是:设 m 为整数,由于积分

$$\int_0^1 e(m\alpha)\,d\alpha = \begin{cases}1, m = 0\\0, m \neq 0\end{cases}$$

其中 $e(x) = e^{2\pi ix}$,所以方程

$$N = p_1 + p_2, p_1, p_2 \geqslant 3 \quad ①$$

拉马努金(Ramanujan, Srinivasa Aaiyangar, 1887—1920),印度数学家. 生于印度马德拉斯. 坦焦尔县贡伯戈讷姆附近的埃罗得.

的解数为

$$D(N) = \int_0^1 S^2(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha \quad ②$$

方程

$$N = p_1 + p_2 + p_3, p_1, p_2, p_3 \geqslant 3 \quad ③$$

的解数为

$$T(N) = \int_0^1 S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha \quad ④$$

其中

$$S(\alpha, N) = \sum_{2<p\leqslant N} e(\alpha p) \quad ⑤$$

这样一来,猜想(A)就归结为要证明:对于偶数 $N \geqslant 6$,则有

$$D(N) > 0$$

猜想(B)就归结为要证明:对于奇数 $N \geqslant 9$,则有

$$T(N) > 0$$

于是,哥德巴赫猜想就转化为讨论关系式 ②,④ 中的积分了. 因而这就需要研究由 ⑤ 所确定的以素数为变数的三角和. ⑤ 的性质知道了,其积分的值也就求出来了. ⑤ 有什么性质呢?我们猜测:当 α 和分母"较小"的既约分数"接近"时,$S(\alpha,N)$ 就取"较大"的值;而当 α 和分母"较大"的既约分数"接近"时,$S(\alpha,N)$ 就取"较小"的值. 这样我们就可把积分区间分成两部分,在其中的一部分,是积分的主要项,积分易求出来,而另一部分,是积分的次要项,积分值可忽略不计. 这就是圆法的主要思想.

下面就此稍加具体的说明.

设 M,τ 为二个正数,且

$$1 \leqslant M \leqslant \tau \leqslant N$$

考虑法雷数列

$$\frac{a}{q}, (a,q) = 1, 0 \leqslant a < q, q \leqslant M$$

并设
$$E(q,a)=\left[\frac{a}{q}-\frac{1}{\tau},\frac{a}{q}+\frac{1}{\tau}\right]$$
以及
$$E_1=\bigcup_{1\leqslant q\leqslant M}\bigcup_{\substack{0\leqslant a<q\\(a,q)=1}}E(q,a)$$
$$E_2=\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]\setminus E_1$$
易证,当
$$2M^2<\tau$$
时,所有的小区间 $E(q,a)$ 是两两不相交的. 称 E_1 为基本区间, E_2 为余区间. 如果一个既约分数的分母不超过 M,我们就说它的分母是"较小"的;否则,就说是"较大"的. 如果两个点之间的距离不超过 τ^{-1},我们就说是"较近"的. 显然,当 $\alpha\in E_1$ 时,它就和一分母"较小"的既约分数"接近". 当 $\alpha\in E_2$ 时,可以证明,它一定和一分母"较大"的既约分数"接近". 这样利用法雷数列就把积分区间 $\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$ 分成了圆法所要求的两部分 E_1 和 E_2.

为方便起见,我们把积分区间[0,1]改为 $\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$. 这样一来,②,④的积分就分成两部分,即
$$D(N)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}S^2(\alpha,N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha=D_1(N)+D_2(N) \qquad ⑥$$
其中
$$D_i(N)=\int_{E_i}S^2(\alpha,N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha,i=1,2$$
$$T(N)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}S^3(\alpha,N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha=T_1(N)+T_2(N) \qquad ⑦$$
其中
$$T_i(N)=\int_{E_i}S^3(\alpha,N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha,i=1,2$$
圆法就是要计算出 $D_1(N)$ 及 $T_1(N)$,并证明其为 $D(N)$, $T(N)$ 的主要项,而 $D_2(N)$, $T_2(N)$ 分别作为其次要项.

如果不加任何条件限制,难以计算出 $D(N)$, $T(N)$ 的渐近式. 这样一来,就想到把考虑问题的范围缩小,于是1923年,哈代、李特伍德取得了第一个突破,他们证明了如下结论.

在弱型广义黎曼猜想成立的前提下,每个大奇数一定可表为三个奇素数之和,且有渐近公式
$$T(N)=\frac{1}{2}R_3(N)\frac{N^2}{\log^3N},N\to\infty \qquad ⑧$$
其中
$$R_3(N)=\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right) \qquad ⑨$$

对于偶数又怎样呢?他们猜测有

$$D(N) = R_2(N)\frac{N}{\log^2 N}, N \to \infty$$

其中

$$R_2(N) = 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p \mid N \\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}$$

对于一个大的猜想,在一个较长的时间解决不了,我们可以将猜想进行转化,可以对猜想加上前提条件,先得到一个带有假设性的结果,或者加上前提条件,再提出新的猜测,然后对这新的猜测进行探求.

显然,哈代、李特伍德没有证明任何无条件的结果,但是他们在证明有条件的结果时所创造的圆法,为人们指明了一个有成功希望的研究方向.正如他们自己所说:"我们借助于堆垒数论中新的超越方法来攻这个问题,我们没有解决它.甚至我们也没有证明任何数是1 000 000个素数之和…然而,我们证明了这个问题不是攻不动的….”这就是说,他们创造的圆法,消除了人们对研讨哥德巴赫猜想的悲观情绪,增进了解决此问题的必胜信心.事实上,圆法为人们解决哥德巴赫猜想找到了一个有效途径,为下一个突破创造了良好的条件,同时,它在解决数论中的其他难题中也发挥了积极作用.

1937年,苏联数学家维诺格拉多夫在"圆法”的基础上,再加上他独创的"三角和估计方法”,去掉了弱型广义黎曼猜想的前提,证明了:每一个充分大的奇数都是三个奇素数之和,且有渐近公式⑧成立.后来,有人用别的分析方法,也"无前提”地证明了这个结果.这些大奇数究竟有多大?它比1后面带上几十万个零还要大.这虽然是一个天文数字,但剩下的数总是有限的,原则上总是可以一一验证的.由无限转化到有限,这是一个重大突破,因此猜想(B)算是基本解决了.这一结果通常叫做哥德巴赫 - 维诺格拉多夫定理,简称三素数定理.

维诺格拉多夫是怎样证明三素数定理的呢?

1935年,佩治证明了

定理1 设整数 $q \geqslant 3$,则对所有实的非主特征 $X \bmod q$①,当 $\sigma \geqslant 1 - \frac{C_4}{\sqrt{q}\log^4 q}$ 时,有

$$L(\sigma, x) \neq 0^{②}$$

定理2 设整数 $q \geqslant 1$,x 是模 q 的实特征,则对任一给的 $\varepsilon > 0$,一定存在一个常数 $c = c(\varepsilon) > 0$,使得 $L(s, x)$ 的非实零点 β,满足

$$\beta \leqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^{\varepsilon}}$$

---

① 特征 $\chi_{(h)}$ 是属于模 q,记作 $x_{(h)} \bmod q$,模 q 的特征 $x_{(h)}$ 称模 q 的主特征,其他的所有特征都称为非主特征.

② $L(\sigma, x)$ 为 L 函数.

由上述两个定理可推出相应的算术级数中素数分布的如下两个定理.

定理 3　设 $x \geqslant 2$,则对于任意固定的正数 $A > 1$,及任意的整数 q, l 有

$$1 \leqslant q \leqslant \log^A x, (l, q) = 1$$

有渐近公式

$$\psi(x; q, l) = \frac{x}{\phi(q)} + O(x e^{-c_2\sqrt{\log x}})$$

$$\pi(x; q, l) = \frac{\mathrm{Li}x}{\phi(q)} + O(x e^{-c_2\sqrt{\log x}})$$

成立,其中常数 c_2 依赖于 A,且 o 常数是一绝对常数,c_2 是不能实际计算出的常数.

定理 4　设 $x \geqslant y > 3$,则对所有的模 $q \leqslant y$,可能除去一些"例外模"q—— 这些 q 一定是某一个可能存在的 $q_0(q_0 \gg \log^2 y(\log\log y)^{-3})$ 的倍数 —— 以外,当 $(q, l) = 1$ 时,有如下式成立,即

$$\pi(x; q, l) = \frac{\mathrm{Li}\ x}{\phi(q)} + O(x e^{-c_3\sqrt{\log x}}) + O(x e^{-c_3\frac{\log x}{\log y}})$$

其中,大 O 常数及 c_3 都是绝对的可计算的常数.

上述两个定理之一可推出如下结果.

定理 5　对于奇数 N 表为三个奇数之和的表法个数 $T(N)$ 有渐近公式

$$T(N) = \frac{1}{2} R_3(N) \frac{N_2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right)$$

其中,$R_3(N)$ 为式 ⑨ 所示,且 $R_3(N) > \frac{1}{2}$.

维诺格拉多夫成功地创造了素变数三角和估计方法,证明了哈代、李特伍德关于三角和 $S(\alpha, N)$ 性质的猜测,即,他证明了:适当选取 M, τ,当 $\alpha \in E_2$ 时,有

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^3 N} \qquad ⑩$$

由此易推出

$$T_2(N) \ll \frac{N}{\log^3 N}\int_0^1 | S^2(\alpha, N) | \mathrm{d}\alpha \ll \frac{N^2}{\log^4 N}$$

这就表明 $T_2(N)$ 对 $T_1(N)$ 来说是可以忽略的次要项,从而就证明了三素数定理.

维诺格拉多夫处理基本区间 E_1 上的积分用的是分析方法,而处理余区间 E_2 上的积分用的是非分析方法.这种方法上的不一致性就导致了数学家去探索用分析方法得到线性素变数三角和 $S(\alpha, N)$ 的估计式 ⑩.1945 年,林尼克提出了所谓 L 函数零点密度估计方法,他利用这个方法证明估计式 ⑩,从而使三素数定理给出一个完全有意义的分析法证明.他的这一方法解决了解析数论中

的许多问题.这种协调一致的方法上的思考是一种数学美的追求.由于数学美的驱使,促使数学家去创造新的方法.而创造的新方法,又为解决更广泛的一类问题提供新的工具.由此看来,追求数学上的美是丰富和发展数学的一种不可忽视的动力.

维诺格拉多夫创造的估计三角和的方法是解析数论中的强有力的工具,应用这一方法,获得了解析数论中许多重要结果,为数论的发展起到了重要的推进作用.

三素数定理被证明了.接下去一个很自然的想法就是再推广这一结果.1938年,我国著名的数学家华罗庚证明了如下定理.

定理6 对任意给定的整数 k,每一个充分大的奇数都可表为

$$p_1 + p_2 + p_3^k$$

其中,p_1,p_2,p_3 为奇素数.

特别地,当 $k = 1$ 时,就是三素数定理.

另一个自然的想法就是在定理中再加些限制条件进行讨论.在前面的例子中,我们已经看到,一个奇数分成三个奇素数之和是不唯一的,同一个奇数,有的分解成的三个奇素数相差比较大,有的分解成的三个奇素数差不多一般大.因此,可提出如下问题:

一个充分大的奇数表为三个几乎相等的奇素数之和.

20世纪50年代开始研究这一问题,答案是肯定的.

对于一个猜想,如果加上限制条件,还难以推出结论,就把结论再减弱,这也是解决猜想的一种重要途径.1923年,哈代、李特伍德得到了如下的假设性结果:如果广义黎曼猜测成立,那么几乎所有的偶数都能表为两个奇素数之和,即有如下定理.

定理7 若以 $E(x)$ 表示不超过 x 且不能表为二个奇素数之和的偶数个数,在GRH①下,则有

$$E(x) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

其中 ε 为一任意小的正数.

维诺格拉多夫证明三素数定理之后不久,库尔浦特(J.G.Corput),楚德可夫(E.C.Чугаков),埃斯特曼(T.Estermann),海尔布伦(H.Heilbronn)及华罗庚,利用维诺格拉多夫的思想方法,几乎同时证明了如下定理.

定理8 对于任给的正数 A,有

$$E(x) \leqslant \frac{x}{\log^A x}$$

① 所有 $L(s,\chi)$ 的非显明零点亦都位于直线 $R_e S = \frac{1}{2}$ 上,这就是广义黎曼假设,简记作GRH.

下面把这一定理的证明思想简述如下.

我们把能够表为两个奇素数之和的偶数称为哥德巴赫数,而把不能够表为两个奇素数之和的偶数称为非哥德巴赫数.所有不超过 x 的非哥德巴赫数所组成的集合及其个数均用 $E(x)$ 表示. $E(x)$ 亦称做哥德巴赫数的例外集合.于是,对于偶数的哥德巴赫猜想就是要证明:当 $x \geqslant 4$ 时,有

$$E(x) = 2$$

设 x 为充分大的正数,以 $D(n,x)$ 表示方程

$$n = p_1 + p_2, 2 < p_1 \leqslant x, 2 < p_2 \leqslant x$$

的解数.显然,当 $n \leqslant 4$ 时,或 $n > 2x$ 时,恒有

$$D(n,x) = 0$$

同时,若

$$D(n,x) > 0$$

则 n 一定是哥德巴赫数.

设 $S(\alpha,x) = \sum_{2<p\leqslant x} e(\alpha p)$,则显然有

$$D(n,x) = \int_0^1 S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

设 $M = \log^\lambda x, \tau = x^{-1}, \lambda \geqslant 9$ 为待定正常数,对于这样的 M,τ,可以确定基本区间 E_1 和余区间 E_2.于是,有

$$D(n,x) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = D_1(n,x) + D_2(n,x)$$

其中 $$D_1(n,x) = \int_{E_1} S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S_1^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

$$S_1(\alpha,x) = \begin{cases} S(\alpha,x), \alpha \in E_1 \\ 0, \alpha \in E_2 \end{cases}$$

$$D_2(n,x) = \int_{E_2} S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S_2^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

$$S_2(\alpha,x) = \begin{cases} S(\alpha,x), \alpha \in E_2 \\ 0, \qquad \alpha \in E_1 \end{cases}$$

如果能够证明

$$| D_1(n,x) | > | D_2(n,x) | \qquad ⑪$$

那么一定有

$$D(n,x) > 0$$

因而 n 就一定是哥德巴赫数.利用维诺格拉多夫证明三素数定理的思想及如下关系式

$$\sum_n |D_1(n,x)|^2 = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} |S_1(\alpha,x)|^4 d\alpha = \int_{E_1} |S_1(\alpha,x)|^4 d\alpha$$

$$\sum_n |D_2(n,x)|^2 = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} |S_2(\alpha,x)|^4 d\alpha = \int_{E_2} |S_2(\alpha,x)|^4 d\alpha$$

就可证明：几乎对于所有不超过 x 的偶数 n，都有式 ⑪ 成立.

这样一来，对于任意给定的正数 A，$\left(\frac{x}{2},x\right]$ 中的偶数 n，除了可能有远远小于 $\frac{x}{\log^A x}$ 个例外值外，恒有

$$|D_1(n,x)| > |D_2(n,x)|$$

成立. 若以 $E_1(x)$ 表示区间 $\left(\frac{x}{2},x\right]$ 中的非哥德巴赫数的个数，则由此立即推出

$$E_1(x) \ll \frac{x}{\log^A x}$$

这样就推出了定理 8 成立.

定理 8 是利用圆法和维诺格拉多夫思想给予证明的. 当一个强有力的思想问世之后，数学家很快就会接受过来，从而大大推进对于偶数哥德巴赫猜想的研究. 研究猜想一方面要创造新的方法，另一方面也应对科学发展有强烈的敏感性，把其他创造的新思想新方法移植到自己所研究的问题上来. 这样才会给研究工作带来生机勃勃的新局面，做出具有重大意义的成果.

对于一个猜想得到一个较弱结果之后，再向较强的结果一步步逼近，这是解决猜想又一个重要途径.

1972 年，文汉（Vanghan）证明了

定理 9　存在正常数 c，使

$$E(x) \ll x\exp(-c\sqrt{\log x}) \tag{⑫}$$

1975 年，蒙哥马利和文汉进一步改进了 ⑫，得到

定理 10　存在一个可计算的绝对正常数 Δ，使得

$$E(x) \ll x^{1-\Delta}$$

为了证明这一结果，几乎用到了 L 函数零点分布的全部知识，并且把大筛法应用于对圆法中基本区间的讨论.

1979 年，我国两名著名的数学家陈景润和潘承洞定出常数 $\Delta > 0.01$. 这是目前对于例外集合 $E(x)$ 的阶的估计最好的结果.

8.4 筛法

为了证明把一个偶数拆成两个奇素数之和,我们探讨与此问题有关的更加广泛的问题:

把一个偶数拆成两个数 a 与 b 之和,其中 a 是一个不超过 a 个素因子的数,b 是一个不超过 b 个素因子的数.

这样两个数称为殆素数,记作 $(a+b)$. 哥德巴赫猜想就是要证明 $(1+1)$. 通过逐步减少素因子的个数的办法来寻求解决猜想(A)的途径,筛法就成了一个强有力的工具.

筛法是寻求素数的一个古老的方法.这个方法是两千多年前古希腊学者埃拉托塞尼(Eratosthenes,大约公元前230)所创造的,称埃拉托塞尼筛法.用此方法可造出不超过已知数 N 的素数,现在叙述如下:

写出数 $1,2,\cdots,N$,在这一列数中第一个大于1的数是素数2.从数列中划掉2以外的所有2的倍数.接着2的第一个没有被划掉的数是素数3.从数列中划掉3以外的所有3的倍数.接着3的第一个没有被划掉的数是素数5,这样继续下去,就得到不超过已知数 N 的所有素数.

这是一种原始筛法,随着数学的发展,筛法也得到了发展.什么是筛法?现在用数学的语言叙述如下:

由有限个且满足一定条件的整数组成的集合以 A 表之,满足一定条件的无限多个不同的素数组成的集合记为 B,$z \geqslant 2$ 为任一正数.令

$$P(z)=\prod_{\substack{p<z\\p\in B}}p$$

在集合 A 中,所有与 $p(z)$ 互素的元素的个数记为 $S(A;B,z)$,即

$$S(A;B,z)=\sum_{\substack{a\in A\\(a;p(z))=1}}1$$

这里 $p(z)$ 就起到一个"筛子"的作用,凡是和它不互素的都被"筛掉",而与它互素的数都被留下.所谓"筛法"其含义也正是如此."筛子"的大小是与集合 B 及 z 有关.z 愈大,筛子就愈大,被筛掉的数就越多.$S(A;B,z)$ 是集合 A 经过筛子 $p(z)$ 筛选后所剩下的元素的个数.我们称 $S(A;B,z)$ 为筛函数.显然,筛法的关键就在于对于筛函数要了如指掌.因此研究筛函数的性质及其作用就成为"筛法"中的基本问题,而其中最重要的问题之一就是估计筛函数 $S(A;B,z)$ 的上界和正的下界.

设 A 是一由有限个整数组成的集合(元素可重复),B 是一个由无限多个素数组成的集合.再设 $z \geqslant 2$ 是任意实数,并令

$$P(z)=\prod_{\substack{p<z\\p\in B}}p$$

易知筛函数具有如下简单性质：

(1) $S(A;B,z) = |A|$ ①；

(2) $S(A;B,z) \geqslant 0$；

(3) $S(A;B,z_1) \geqslant S(A;B,z_2), 2 \leqslant z_1 \leqslant z_2$；

(4) $$S(A;B,z) = \sum_{a \in A} \sum_{d \mid (a, p(z))} \mu(d) = \sum_{d \mid p(z)} \mu(d) \mid A_d \mid \qquad ⑬$$

其中 A_d 表示集合 A 中所有能被 d 整除的元素所组成的子集合.

解决一个具体问题，就是归结到所给的问题如何与筛函数发生联系.现在把筛函数与命题 $(a+b)$ 的联系叙述如下.

设 N 为一大偶数，取集合

$$A = A(N) = \{n(N-n), 1 \leqslant n \leqslant N\}$$

所有素数组成的集合记为 B.再设 $\lambda \geqslant 2$，取 $z = N^{1/\lambda}$.如果能证明筛函数

$$S(A;B,N^{1/\lambda}) > 0$$

则显然就证明了命题 $(a+a)$，其中

$$a = \begin{cases} \lambda - 1, \lambda \text{ 是正整数} \\ [\lambda], \lambda \text{ 不是正整数} \end{cases}$$

特别地，当 $\lambda = 2$ 时，这就证明了命题 $(1+1)$.

另一方面，若求得 $S(A;B,N^{1/\lambda})$ 的一个上界，那么我们就相应地得到一个大偶数表为两个素因子个数不超过 a 个数之和的表法个数的上界.

如果我们取集合

$$C = C(N) = \{N - p, p \leqslant N\}$$

能证明筛函数

$$S(C;B,N^{1/\lambda}) > 0$$

则显然证明了命题 $(1+a)$.同样，若求得 $S(C;B,N^{1/\lambda})$ 的一个上界，那么，我们也就相应地得到了偶数表为一个素数与一个素因子不超过 a 个数之和的表法的上界.

由上述可知，命题 $(a+b)$ 和求筛函数的正下界与上界这一问题密切相连的.其中 z 不能取得太小(相对 N 来说)，一定要取 $N^{1/\lambda}$ 那么大的阶.显然 λ 取得越小越好.如果一个筛法理论仅能对较小的 z(比如取 $\log N$) 才能证明筛函数有正的下界估计，那么这种筛法理论对我们所讨论的问题是无用的.古老的筛法正是这样的.因此，要想解决我们的问题，必须发展已有的筛法.由式 ⑬ 可以看出，筛函数 $S(A;B,z)$ 的估计和集合 $A_d, d/p(z)$ 有关.如果对于给定集合 A 及 B，我们适当选取一个正数 $z > 1$，及一非负可乘函数

① $|A|$ 表示有限集合 A 的元素的个数.

$$\omega(d),\mu(d) \neq 0,(d,\overline{B}) = 1$$①

并设

$$r_a = |A_d| - \frac{\omega(d)}{d}X \qquad ⑭$$

我们的目的就是用$\frac{\omega(d)}{d}X$代替$|A_d|$.我们要求就某种平均意义上来说,使误差项r_d尽可能地小.怎样选取最好的X和$\omega(d)$,这由集合A的性质来确定.

由⑬及⑭有

$$S(A;B,z) = \sum_{d|p(z)}\mu(d)\frac{\omega(d)}{d}X + \sum_{d|p(z)}\mu(d)rd = X\prod_{\substack{p<X\\ p\in B}}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) + \theta\sum_{d|p(z)}|r_d|, \ |\theta| \leqslant 1$$

当z相对于X并不是很大时,余项的项数$\sum_{d|p(z)}1$,即$P(z)$的除数个数就可能很大,例如,取$p(z) = \prod_{p<z}p$,则当$z > \log X$时,余项的项数就大于X,这样就不可能得到有用的估计.这种方法仅当z很小时,例如,$z \ll \log\log X$才有效.这就是所说的埃拉托塞尼筛法.这种筛法在理论上是无用的,因为数论问题所需要的是z相对于X来说是较大的情况.于是在1920年前后,布朗首先对埃拉托塞尼筛法作了重大改进.布朗利用他的方法证明了命题(9 + 9).由于这一方法获得了对于哥德巴赫猜想研究的重大成果,这就开辟了人们利用筛法研究猜想(A)及其他数论问题的新途径.这种方法叫布朗筛法.1950年前后,塞尔伯格(A. selberg)对埃拉托斯筛法,利用求二次型极值的方法,作了另一个重大改进.这种方法叫做塞尔伯格方法.用这种方法,得到了筛函数的上界估计.这两种方法共同点在于设法控制余项的项数,使从余项所得的估计相对立项来说可以忽略不计,同时也要使主项得到尽可能好的估计.

把命题($a + b$)和对一个筛函数的估计直接相联系,这样得到的结果是较弱的.要得到较强结果,还要设法通过另一途径来改进筛法.1941年,库恩(Kuhn)首先提出了所谓"加权筛法".后来数学家对各种形式的"加权筛法"进行了研究,从而使筛法的效用越来越大,所获得的结果也就得到不断的推进.

证明命题($a + b$)的历史进展可概述如下:

1920年,布朗证明了命题(9 + 9);

1924年,拉德马赫尔证明了命题(7 + 7);

1932年,埃斯特曼证明了命题(6 + 6);

1937年,Rjcci证明了命题(5 + 7),(4 + 9),(3 + 5)以及(2 + 366);

---

① $\overline{B}$表示所有不属于B的素数组成的集合.设μ是一整数集合,d为一整数,$(d,\mu) = 1$表示d和μ中每一个数都互素.

1938 年，布赫夕塔布证明了命题(5 + 5)；

1939 年，塔鲁塔柯夫斯基及 1940 年，布赫夕塔布都证明了命题(4 + 4)；

1941 年，库恩提出了“加权筛法”，后来证明了命题($a + b$)，其是 $a + b \leqslant 6$；

以上的结果都是利用 Brun 筛法得到的. 以下的结果都是利用 Selberg 筛法得到的.

1956 年，王元证明了命题(3 + 4)；

1957 年，维诺格拉多夫证明了命题(3 + 3)；

1957 年，王元证明了命题(2 + 3) 以及命题($a + b$)，其中 $a + b \leqslant 5$.

为了证明命题($1 + b$)，需要估计筛函数 $S(B;P,z)$. 当估计筛函数的上界与下界时，需要对主要项进行计算，对余项进行估计. 但在余项的估计上存在很大困难. 这实质上，就归结到估计下面的和式

$$R(x,\eta) = \sum_{d \leqslant x^{\eta}} \mu^2(d) \max_{y \leqslant x} \max_{(l,d)=1} \left| \psi(y;d,l) - \frac{y}{\phi(d)} \right|$$

对于这一和式进行估计，需要利用复杂的解析数论方法.

1948 年，匈牙利数学家瑞尼利用林尼克所创造的大筛法，研究了 L - 函数的零点分布，从而证明了：一定存在一个正数 $\eta_0 > 0$，使对任意一个正数 $\eta < \eta_0$ 及任意正数 A，有估计式

$$R(x,\eta) \ll \frac{x}{\log^A x} \qquad (*)$$

成立. 进而利用布朗筛法和这一结果证明了($1 + b$).

利用上述方法确定常数 η_0，将是很小的，而 b 将是很大的. 我们希望 b 越小越好，这就需要改进方法，以便定出尽可能大的 η_0.

1962 年，潘承洞证明了当 $\eta_0 = \frac{1}{3}$ 时，上面的估计式($*$)成立，从而证明了(1 + 5).

1962 年，王元从进一步改进筛法着手，由 $\eta_0 = \frac{1}{3}$ 推出了命题(1 + 4). 同时还推得 η_0 和 b 间的一个非显然联系，从而分别推出命题(1 + 4) 和(1 + 3).

1962 年潘承洞及 1963 年 Бьарьан 互相独立地证明了 $\eta_0 = \frac{3}{8}$ 时，估计式($*$)成立，并利用较简单的筛法证明了命题(1 + 4).

1965 年布赫夕塔布由 $\eta_0 = \frac{3}{8}$ 推出了命题(1 + 3).

1966 年，陈景润宣布他证明了命题(1 + 2)，1973 年，他给出该命题的详细证明. 陈景润之所以能使哥德巴赫猜想研究推进一大步，是由于他提出了新的加权函数. 对于同一个问题，选取不同的权函数，就可以得到不同的结果. 当权函数 $\rho(a) = 1$ 时，可得到命题(1 + 4)，取 $\rho(a) = 1 - \frac{1}{2}\rho_1(a)$，就得到命题(1 +

3),而取

$$\rho(a) = 1 - \frac{1}{2}\rho_1(a) - \frac{1}{2}\rho_2(a)$$

就证明了命题(1 + 2).由此,我们可猜想,是否可用选取不同的权函数,去证明命题(1 + 1)呢?可是按此方向考虑问题是否能走通,到目前为止,还看不出有什么眉目.

通过命题($a + b$)研究过程的简单概述,使我们看到,要推进对猜想研究的结果,应在对已取得的成果的基础上,对所用的方法作些不同方向上的改进和突破.方法的改进和突破是在猜想的研究中产生的.方法和成果是相辅相成的,因此,我们对于猜想的研究,应从不同的角度加以探索,这样不但有利于猜想本身的解决,而且在解决猜想的过程中还可以大大丰富数学内容,促使数学理论的发展.

9 晶体学约束,置换和哥德巴赫猜想①

——John Bamberg Grant Cairns Devin Kilminster

9.1 介绍

本节的目的是对哥德巴赫猜想、晶体学约束(Crystallographic Restriction,缩写为 CR) 和对称群的元素的阶之间的联系谈谈一些看法.首先,对群 G 的一个元 g,如果使 $g^{\mathrm{Ord}(g)} = \mathrm{id}$ 成立的最小自然数存在的话,g 的阶 $\mathrm{Ord}(g)$ 即定义为这个数;否则令 $\mathrm{Ord}(g) = \infty$. n 维的晶体学约束定义为 $n \times n$ 整数矩阵取的有限阶的集合 Ord_n,即

$$\mathrm{Ord}_n = \{m \in \mathbf{N} \mid \exists A \in GL(n,Z), \mathrm{Ord}(A) = m\}$$

它的名字来自于这样的事实,它与 n 维(晶) 格的对称群可能的阶的集合一致,它们之间的联系是,对一个给定的格,存在一组明显选择的基使格的对称群能由整数矩阵表示.在二维时,有著名的 CR:$\mathrm{Ord}_2 = \{1,2,3,4,6\}$,那是自 René-Just 在 1822 年的有关晶体学的工作以来就知道的.

为了讨论 CR,我们如下定义一个函数 $\psi:\mathbf{N} \to \mathbf{N} \cup \{0\}$.对奇素数 p 和 $r = 1,2,\cdots$,设 $\psi(p^r) = \phi(p^r)$,这里的 ϕ 是 Euler totient 函数:$\phi(p^r) = p^r - p^{r-1}$.对 $r > 1$,设 $\psi(2^r) = \phi(2^r)$,$\psi(2) = 0$,$\psi(1) = 0$.对 $i \in \mathbf{N}$,以 p_i 表示第 i 个素数.

① 原题:The Crystallographic Restriction, Permutations, and Goldbach's Conjecture.译自:The Amer. Math. Monthly, Vol.110(2003),No.3,202-209.

如果 $m \in \mathbf{N}$ 有素分解 $m = \prod_i p_i^{r_i}$，设

$$\psi(m) = \sum_i \psi(p_i^{r_i})$$

相以比的是标准公式 $\phi(m) = \prod_i \phi(p_i^{r_i})$. 这时，$n$ 维的 CR 有：

定理 1 $\mathrm{Ord}_n = \{m \in \mathbf{N} \mid \psi(m) \leqslant n\}$.

注意到对所有的 m 有 $\psi(m)$ 为偶数，因此对所有 $k \geqslant 1$ 有的 $\mathrm{Ord}_{2k+1} = \mathrm{Ord}_{2k}$；所以，我们只需要对偶数 n 考虑 Ord_n 即可. 对偶数 n，由定理 1 得到 $\mathrm{Ord}_n \setminus \mathrm{Ord}_{n-1} = \psi^{-1}(n)$，但仍不知道 $\psi^{-1}(n)$ 的公式，我们考虑图 1 中 ψ 的图象就能充分意识到这一点.

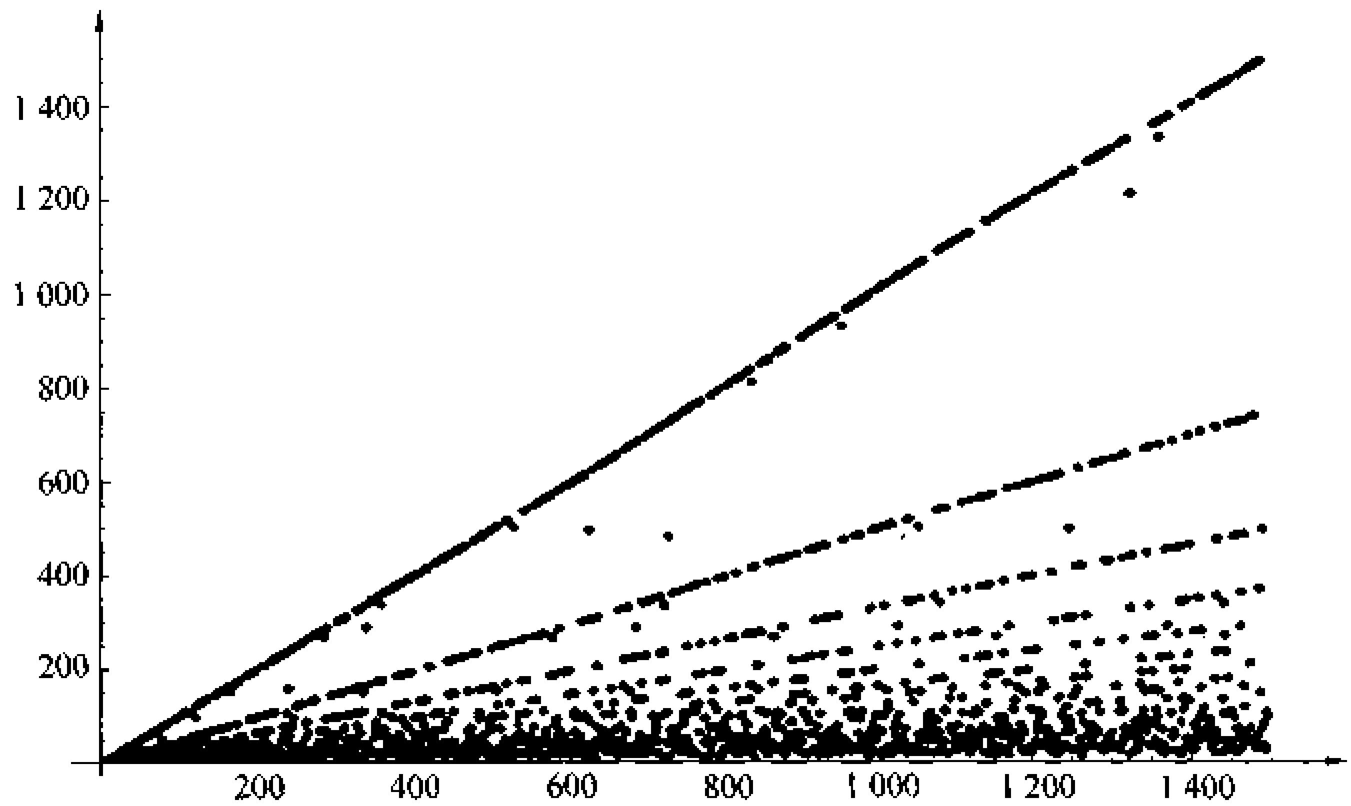


图 1 $n \leqslant 1\,500$ 的 $\psi(n)$ 的值. 明显的直线是形如 kp 的数，其中 p 是素数，而 k 较小；在最上面两条线之间的孤立的点是素数幂(挂在最上面那条线下的那些点是素数的平方)，在第 2 条和第 3 条线之间的点是两倍的素数幂 …

9.2 计算 CR

设 Ord_n^+ 和 Ord_n^- 分别表示 Ord_n 中偶数和奇数的子集. 我们有下面的公式

$$\mathrm{Ord}_n = \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant L(2,n)} 2^i \mathrm{Ord}_{n-\psi(2^i)}^- \qquad ①$$

这里 $L(2,n)$ 代表满足 $\psi(2^{L(2,n)}) \leqslant n$ 的最大整数；就是说

$$L(2,n) = \begin{cases} [\log_2 n] + 1, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

这里的 $[x]$ 代表 x 的整数部分. ① 的证明只需要一点点观察：Ord_n 的每个元可以写成 $2^i x$ 的形式，这里 $i \geqslant 0$，x 是奇整数. 公式 ① 在实用中的好处是把问题简化到只计算 Ord_n 中的奇数元；Hiller 对 $n \leqslant 22$ 计算了 $\mathrm{Ord}_n \setminus \mathrm{Ord}_{n-1}$. 我们可以推

广 Hiller的想法,考虑 Ord_n^- 中不能被3整除的元,接着考虑在这些元中不能被5整除的元,如此等等.

在极限的情况,显然有

$$\mathrm{Ord}_n = \{2^{r_1}3^{r_2}\cdots p_l^{r_l} \mid 0 \leqslant r_1 \leqslant L(2,n), 0 \leqslant r_2 \leqslant L(3, n-\psi(2^{r_1})), \cdots, 0 \leqslant r_l \leqslant L(p_l, n-\psi(2^{r_1}3^{r_2}\cdots p_{l-1}^{r_{l-1}}))\}$$

这里的 p_l 是满足 $p_l \leqslant n+1$ 的最大素数,$L(p,n)$ 表示满足 $\psi(p^{L(p,n)}) \leqslant n$ 的最大整数.明确地,对任意的奇素数 p,我们有

$$L(p,n) = \begin{cases} \left[\log_p\left(\frac{n}{p-1}\right)\right]+1 & ,p \leqslant n+1 \\ 0 & ,\text{否则} \end{cases}$$

这个简单直接的方法提供了一种快速计算 Ord_n 的手段(表1列出了 $n \leqslant 24$ 时的值).这个方法也给出了一个计算 Ord_n 的大小的方法,即

$$|\mathrm{Ord}_n| = \sum_{0\leqslant r_1\leqslant L(2,n),0\leqslant r_2\leqslant L(3,n-\psi(2^{r_1})),\cdots,0\leqslant r_l\leqslant L(p_l,n-\psi(2^{r_1}3^{r_2}\cdots p_{l-1}^{r_{l-1}}))} 1$$

表1 $n \leqslant 24$ 时的结晶体约束

n	$\psi^{-1}\{n\} = \mathrm{Ord}_n \setminus \mathrm{Ord}_{n-1}$
2	3,4,6
4	5,8,10,12
6	7,9,14,15,18,20,24,30
8	16,21,28,36,40,42,60
10	11,22,35,45,48,56,70,72,84,90,120
12	13,26,33,44,63,66,80,105,126,140,168,180,210
14	39,52,55,78,88,110,112,132,144,240,252,280,360,420
16	17,32,34,65,77,99,104,130,154,156,165,198,220,264,315,330,336,504,630,840
18	19,27,38,51,54,68,91,96,102,117,176,182,195,231,234,260,308,312,390,396,440,462,560,660,720,1260
20	25,50,57,76,85,108,114,136,160,170,204,208,273,364,385,468,495,520,528,546,616,770,780,792,924,990,1 008,1 320,1 680
22	23,46,75,95,100,119,135,143,150,152,153,190,216,224,228,238,255,270,286 228,306,340,408,455,480,510,585,624,693,728,880,910,936,1 092,1 155,1 170 1 386,1 540,1 560,1 848,1 980
24	69,92,133,138,171,189,200,266,272,285,300,342,357,378,380,429,456,476 540,570,572,612,672,680,714,819,858,1 020,1 040,1 232,1 365,1 584,1 638,1 820

从计算的角度来讲,用下面的算法更有效.对所有的 $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,设 $T(n,0)=1$.同时,对所有的正整数 n 和 k,定义

$$T(n,k) = \sum_{0\leqslant r\leqslant L(p_k,n)} T(n-\psi(p_k^r), k-1)$$

这时,对 $n \geqslant 2$,当 $k \to \infty$ 时,$T(n,k) \to |\mathrm{Ord}_n|$,而且只要 $\psi(p_k) > n$,它就达

到极限值.图 2 显示了$\frac{\log\log|\mathrm{Ord}_n|}{\log n}$的曲线,这里 $n \leqslant 40\,000$;这个图象暗示了 $\log|\mathrm{Ord}_n| \sim n^c$,这里的 c 是一个满足 $0.45 < c < 0.5$ 的常数.

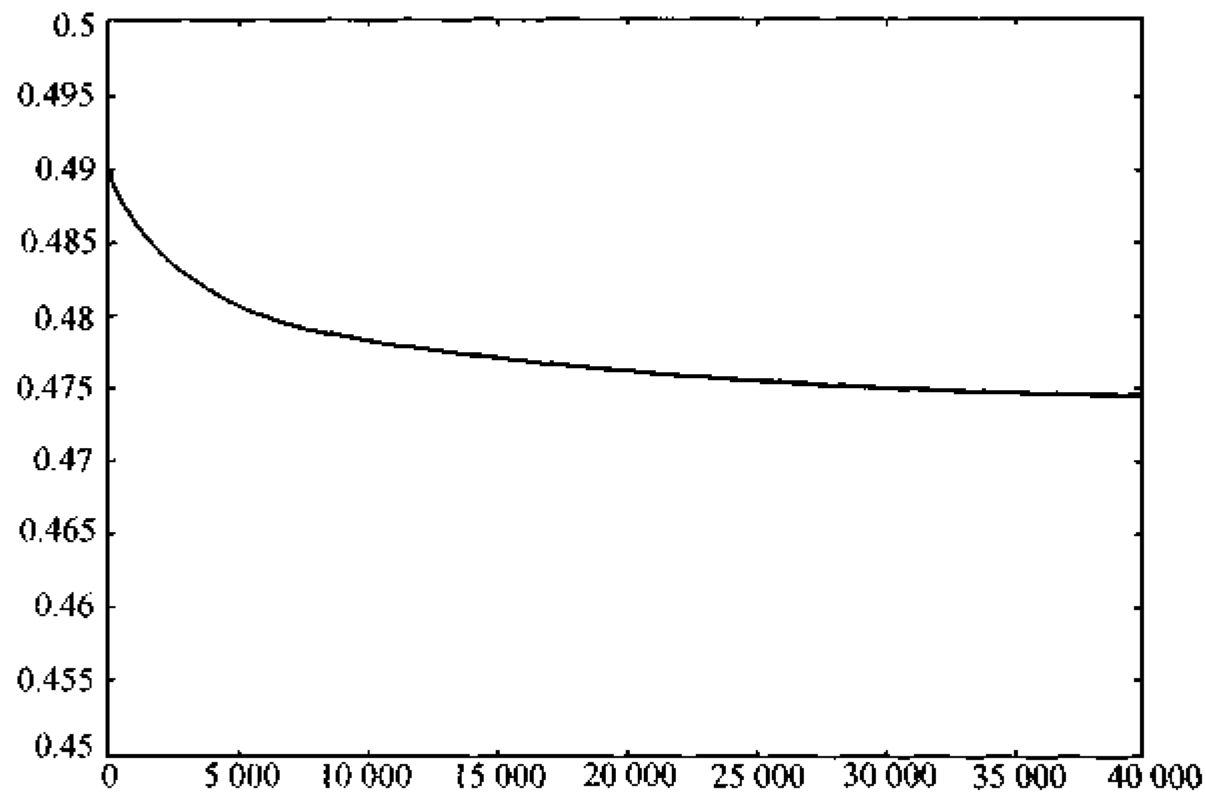


图 2　$n \leqslant 40\,000$ 时的$(\log\log|\mathrm{Ord}_n|)/\log n$

9.3　置换和 CR

在对称群 S_n 和一般线性群 $GL(n,\mathbf{Z})$ 之间有一个明显的联系;S_n 的任意一个元 σ 导出一个线性变换,它由 σ 在 $\mathbf{R}^n$ 的标准基于 $e_1,\cdots,e_n$ 上的作用决定.这给出了一个群同态 $S_n \to GL(n,\mathbf{Z})$,它的像叫做 Weyl 子群.但是,S_n 的这个表示不是不可约的,因为它在向量 $e_1+\cdots+e_n$ 上的作用是不变的.相反,S_n 标准的不可约表示是如下定义的群同态 $S_n \to GL(n-1,Z)$.考虑与向量 $e_1+\cdots+e_n$ 垂直的超平面 V,即 V 由那些坐标和为 0 的向量组成.很清楚,V 在前面指出的 S_n 的作用下不变,因此我们得到了一个单射的群同态 $\rho: S_n \to \mathrm{End}(V)$,这里的 $\mathrm{End}(V)$ 是 V 的线性变换群.向量空间 V 有基$\{e_1-e_2, e_1-e_3,\cdots,e_1-e_n\}$,这时的 ρ 可看做取 $GL(n-1,\mathbf{Z})$ 中的值.例如,对 $n=3$,可以看到,对 V 上面特定的基,$\rho(S_3)$ 由下面的矩阵组成,即

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

它们的阶分别为 1,2,2,2,3 和 3.

标准表示 $\rho: S_n \to GL(n-1,\mathbf{Z})$ 的两个重要的性质是,它是忠实的(即 ρ 是单射),而且没有更小度数的忠实表示(即对任意小于 $n-1$ 的 k,不存在单射 $S_n \to GL(k,\mathbf{Z})$).换句话说,S_n 是 $GL(n-1,\mathbf{Z})$ 的子群,但它不是 $GL(n-2,\mathbf{Z})$

的子群.

S_n 的元可能的阶可以用当它们是晶体学约束时类似的方法计算. 考虑如下定义的函数 $S: N \to N: S(1) = 1, S(m) = \sum p_i^{r_i}$,这里 $m > 1$ 有素分数 $m = \prod p_i^{r_i}$. 类似于定理 1,有

定理 2 S_n 有 m 阶元当且仅当 $S(m) \leqslant n$.

与方程 $\psi^{-1}\{n\} = \text{Ord}_n \setminus \text{Ord}_{n-1}$ 类似,定理2指出 $S^{-1}\{n\}$ 是由 S_n 中元可取但 S_{n-1} 中元不可取的阶组成的集合. 集合 $S^{-1}\{n\}$ 可以用上节描述的计算 $\psi^{-1}\{n\}$ 的程序计算(表 2 列出了 $n \leqslant 24$ 时的 $S^{-1}\{n\}$ 的值). 像表 1 和表 2 所示

表 2 $S^{-1}\{n\}, n \leqslant 24$

n	$S^{-1}\{n\}$
2	2
3	3
4	4
5	5,6
6	
7	7,10,12
8	8,15
9	9,14,20
10	21,30
11	11,18,24,28
12	35,42,60
13	13,22,36,40
14	33,42,70,84
15	26,44,56,105
16	16,39,55,63,66,90,120,140
17	17,52,72,210
18	65,77,78,110,126,132,168,180
19	19,34,48,88,165,420
20	51,91,99,130,154,156,220,252,280
21	38,68,80,104,195,231,315,330
22	57,85,102,117,182,198,260,264,308,360
23	23,76,112,273,385,390,462,630,660,840
24	95,114,119,143,170,204,234,240,312,364,396,440,504

那样,虽然 S_n 和 $GL(n,\mathbf{Z})$ 存在联系,但在 $S^{-1}\{n\}$ 和 $\psi^{-1}\{n\}$ 之间只有不太明显的关系. 例如,虽然没有从 S_4 到 $GL(2,\mathbf{Z})$ 的单同态,但 S_4 取的所有阶也在 $GL(2,\mathbf{Z})$ 中同样取得. 对这一点有一个简单的原因,正如下面的命题证明的那

样.

命题 1 设 $n>2$ 是一个偶数.如果 S_n 包含一个 m 阶元,那么 $GL(n-2,\mathbf{Z})$ 也包含同样阶的元.

证明 假设 S_n 含有一个阶 $m=\prod_i p_i^{r_i}$ 的元.按照定理 2,$S(m)\leqslant n$.因此

$$\psi(m)\leqslant\sum_i\phi(p_i^{r_i})=S(m)-\sum_i p_i^{r_i-1}\leqslant n-\sum_i p_i^{r_i-1}$$

用定理 1,尚待证明 $\sum_i p_i^{r_i-1}\geqslant 2$.如果 m 的素分解涉及一个以上的素数,很清楚结论是成立的.最后,$m=p^r$ 而且 $p^{r-1}<2$ 的情况是不可能的,因为那样的话,$r=1$ 而且 $m=p$,这与 m 是偶数的假设矛盾.

卡迈克尔(Carmichael, Robert Daniel, 1879—1967),美国数学家.生于古德沃特.

里歇尔(Richert, Hans-Egon, 1924—),德国数学家.生于汉堡.

在 Ord_n 和 S_n 之间的更深一层联系是:

命题 2 如果 $m=p_1\cdots p_k$,这里 $p_1,\cdots,p_k$ 是不同奇素数,那么存在一个 m 阶的 $n\times n$ 整数矩阵当且仅当 S_{n+1} 含有一个 m 阶元.

证明 考虑到定理 1 和 2,只需要注意到 $\psi(m)\leqslant n$ 当且仅当 $(p_1-1)+\cdots+(p_k-1)\leqslant n$,那相当于说 $S(m)\leqslant n+k$.

注意,命题 2 中 $k=2$ 的情况对命题 1 中 m 为两个素数的积的特殊情况给了一个反例.看看表 1 和表 2,另一个性质也是明显的.

命题 3 下面的陈述成立:

(1) 对所有的 $n>6$,$S^{-1}\{n\}$ 非空;

(2) 对所有偶数的 $n\geqslant 2$,$\psi^{-1}\{n\}$ 非空.

在证明之前,我们注意到命题 3 的(2)说函数 ψ 映 N 到所有非负偶整数上.这与 ϕ - 函数的情况正好相反,ϕ 不是映到所有偶整数上的(比如,没有什么数被 ϕ 映到 14);相反,卡迈克尔猜测,对任意偶数 x,集合 $\phi^{-1}\{x\}$ 或者是空的或者至少含有两个元.

证明 (1) 可由里歇特的定理直接得到,它说的是每个大于 6 的整数可以写作不同素数的和.为了证明(2),我们证明一个相似的结果:对任意的偶数 $n\geqslant 2$,存在不同的奇素数 $p_1,\cdots,p_k$ 使得 $\psi(p_1,\cdots,p_k)=n$.证明是对 n 进行归纳.首先,注意到 $\psi(3)=2$.假设 $n=2x\geqslant 4$.按照 Bertrand 假设,存在素数 p 满足 $x+1<p\leqslant 2x+1=n+1$.如果 $p=n+1$,这时 $\psi(p)=n$,我们完成证明.否则,设 $n'=n-p+1$.这时 n' 是小于 n 的偶数,因此由归纳假设知存在不同素数 $p_1,\cdots,p_k$ 使得 $\psi(p_1\cdots p_k)=n'$.注意到对素数 p_i 中的每一个,有

$$p_i=\phi(p_i)+1\leqslant\psi(p_1\cdots p_k)+1=n'+1$$

这样,因为 $x+1<p$,我们有

$$p_i\leqslant n-p+2<n-(x+1)+2=x+1<p$$

特别是,对任意的 i,$p_i\neq p$,因此

$$\psi(p_1\cdots p_kp)=\psi(p_1\cdots p_k)+\phi(p)=n'+p-1=n$$

这样就完成了归纳.

9.4 与哥德巴赫猜想的联系

回忆哥德巴赫猜想,它断言每一个大于4的偶自然数可以写作两个奇素数的和.它的一个常见的变型是:

强哥德巴赫猜想 每一个大于6的偶自然数 x 能写作两个不同奇素数的和.

Schinzel证明哥德巴赫猜想隐含着每一个大于17的奇整数是3个不同素数的和,接着 Sierpiński 证明强哥德巴赫猜想等价于条件:每个大于17的整数是3个不同素数的和.哥德巴赫猜想已经被验证直到 $4\cdot 10^{14}$ 都成立,而且这些计算也支持强哥德巴赫猜想.

爱尔特希(Erdös, Paul, 1973—),匈牙利数学家.

我们现在陈述强哥德巴赫猜想,结晶学约束,对称群的元的阶之间的联系.

定理3 下面的陈述等价:

(1) 强哥德巴赫猜想是正确的;

(2) 对每个偶 $n\geqslant 6$,存在一个 qp 阶的 $n\times n$ 整数矩阵,这里的 p 和 q 是不同奇素数,而且不存在同样阶的更小的整数矩阵.

(3) 对每个偶 $n>6$,S_n 有一个阶为 pq 的元,这里的 p 和 q 是不同奇素数,而且 S_{n-1} 中不存在同样阶的元.

证明 为了证明(1)和(2)等价,只需要注意到当 $n\geqslant 6$ 时,$n+2=p+q$ 当且仅当 $n=(p-1)+(q-1)=\varphi(pq)$,这里的 p,q 是不同奇素数.(1)和(3)的等价直接来自于定理2.

最后,我们谈谈定理3与上下文的关系.首先,读者容易验证,(1)和(3)的等价性可以直接证明,只要用一件事实:每个置换是不相交的圈的积.毫不奇怪,这后一件事实构成定理2的证明的基础.第二点,回忆爱尔特希的猜想:对每个偶数 x,存在自然数 a 和 b 使得 $\phi(a)+\phi(b)=x$.在定理3中,(1)隐含着(2)只是一个明显而且众所周知的事实的另一种形式:强哥德巴赫猜想包含爱尔特希猜想.同样地,命题3中的陈述(2)可以改述为下面的“Erdös型”的形式:对每一个偶数 $n\geqslant 2$,存在不同奇素数 $p_1,\cdots,p_k$ 满足 $\phi(p_1)+\cdots+\phi(p_k)=n$.

(王平 译 戴宗铎 校)

哥德巴赫猜想综述

第二章

1 哥德巴赫猜想①

——王元

1.1 导论

在1742年给欧拉(Euler)的一封信中,哥德巴赫建议了关于表整数为素数和的两个猜想,用略为修改过的语言,可以将这两个猜想表述于下:

(A)每一偶数大于等于6都是两个奇素数之和.

(B)每一奇数大于等于9都可以表为三个奇素数之和.

显然,由(A)可以推出(B).

在回复哥德巴赫的信中,欧拉表示虽然他不能证明它们,但他深信这些猜想是对的.

从哥德巴赫写信起到今天,已经积累了不少宝贵的数值资料,指出这两个猜想是对的.例如,申懋功(Shen Mok Kong)验证过猜想(A)对于不超过 3.3×10^7 的偶数是对的.勒依特、富勒斯、哈蒙特与洛易(Light, Forres, Hammond and Roe)进一步算至 10^8.尹定更验算至 5×10^8.

在1900年巴黎召开的第二届国际数学大会上,希尔伯特在

① 摘自:王元.哥德巴赫猜想.哈尔滨:黑龙江教育出版社,1987.

他的著名演说中，为20世纪的数学家建议了二十三个问题，而猜想(A)就是他的第八问题的一部分．1912年在剑桥召开的第五届国际数学大会上，朗道在他的演说中，将猜想(A)作为素数论中四个未解决的难题之一加以推荐．进而言之，1921年，哈代在哥本哈根数学会的演讲中宣称猜想(A)的困难程度“是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的”．因此哥德巴赫猜想不仅是数论，也是整个数学中最著名与困难的问题之一．

自从哥德巴赫写信之日起，直至1920年，并没有方法来处理这个问题．研究工作仅限于用数值计算来验证猜想(A)，或对于猜想(A)作一些进一步的建议．

哥德巴赫猜想第一次重大的突破是20世纪20年代获得的，英国数学家哈代与李特伍德用他们的“圆法”在1923年证明了在广义黎曼(Riemann)猜想正确的前提之下，每个充分大的奇数都是三个奇素数之和及几乎所有偶数都是两个奇素数之和．挪威数学家布朗在1919年用他的“筛法”证明了每个大偶数都是两个素因子个数均不超过9的整数之和．1930年，原苏联数学家须尼尔曼用布朗筛法结合他自己定义的整数密率，证明了堆垒素数论的第一个结果，即任何整数大于等于2都是不超过C个素数之和，此处及以后，我们用$c, c_1, c_2, \cdots$表示绝对常数，但在不同的地方可以表示不相同的数值．近70年来，哥德巴赫问题的研究有了重大与深刻的发展，特别是原苏联数学家维诺格拉多夫用圆法及他自己关于素数变数的指数和估计的天才方法，于1937年无条件地证明了哈代与李特伍德的两个结论，即取消了他们证明中对于广义黎曼猜想的依赖性．布朗方法及他的结果在经历了一系列重大改进后，中国数学家陈景润于1966年证明了，每个大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数之积之和．

我们必须注意，哥德巴赫猜想研究的突破与19世纪解析数论的重大成就是明显不可分割的，特别是切比雪夫，迪利克雷，黎曼，阿达玛，德·拉·瓦·布桑(de la Vallee poussin)与冯·曼哥尔德(von Mangoldt)关于素数分布的理论构成了哥德巴赫猜想当今研究的前提．

现在，我们将哥德巴赫猜想研究的主要构思与进展，概要地叙述于后．

(1)圆法．

圆法起始于哈代与拉马努金关于整数分析与表整数为平方和的一篇文章，更进一步，从1920年开始，在总标题为《“整数分析”的若干问题》(《Some proble ms of“partitio numerorum”》)的一系列论文中，哈代与李特伍德系统地开始并发展了堆垒数论中的一个崭新的分析方法——圆法，其中文章(Ⅲ)与(Ⅴ)是讨论哥德巴赫猜想问题的．

命

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s = \sigma + it, \sigma > 1$$

黎　曼(Riemann, Georg Friedrich Bern hard, 1826—1866.)，德国数学家，生于德国丹嫩贝格附近，卒于意大利北部马焦雷湖畔．

切比雪夫(Chebychev, 1821—1894)，俄国数学家，力学家．生于奥卡多沃，卒于彼得堡．

阿达玛(Hadamard Jacques, 1865—1963)，法国数学家．生于凡尔赛，卒于巴黎．

当 $\sigma \leqslant 1$ 时，$\zeta(s)$ 可以由解析开拓来定义. $\zeta(s)$ 称为黎曼 ζ - 函数. 黎曼曾猜测 $\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma > 0$ 上所有的零点 $\rho = \beta + i\gamma$ 都位于直线 $\sigma = 1/2$ 上面. 这是一个未解决的问题，我们记之为(RH). 一个较弱的猜想是说，$\sigma > 0$ 上面的每个 ρ 的实部均小于等于 θ，此处 θ 满足 $\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1$. 这称为弱黎曼猜想，记之为(QRH). 更一般些，我们可以研究迪利克雷 L - 函数

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, s = \sigma + it, \sigma > 1$$

此处 $\chi(n)$ 为 mod q 的一个特征. 若 $\chi \neq \chi_0$，则它在 s 平面上正则，此处 χ_0 表示主特征. 否则，它仅在 $s = 1$ 有一个唯一的极并且 $L(s,\chi_0) = \prod_{p|q}\left(1 - \frac{1}{ps}\right)\zeta(s)$，此处 p 表示素数，类似于(RH)与(QRH)，我们可以定义(GRH)与(QGRH)，即 $L(s,\chi)$ 在 $\sigma > 0$ 上的所有零点都位于 $\sigma = 1/2$ 上，及 $L(s,\chi)$ 在 $\sigma > 0$ 上的每一零点 ρ 都满足 $\beta \leqslant \theta$，此处 θ 是一个满足上述条件的常数. 哈代与李特伍德的两个结果是基于假定(QGRH)之下而得到的，此处 θ 满足 $1/2 \leqslant \theta < 3/4$.

此后，我们用 $p, p', p_1, p_2, \cdots$ 表示素数，命 n 为一个整数大于 1. 命

$$f(x) = \sum_{p>2} (\log p) x^p \qquad ①$$

此处 $|x| = e^{-1/n}$，则

$$f(x)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n) x^n$$

此处

$$r_3(n) = \sum_{p_1+p_2+p_3=n} \log p_1 \log p_2 \log p_3 \qquad ②$$

为将 n 表为三个素数之和的表示法的加权和. 我们可以类似地定义 $r_2(n)$. 所以猜想(A)，(B)可以表述为

$$r_2(n) > 0(2 \mid n, n > 4), r_3(n) > 0(2 \nmid n, n > 7)$$

由柯西积分公式得

$$r_3(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(x)^3 x^{-n-1} dx \qquad ③$$

此处 Γ 表示以 0 为中心，$e^{-1/n}$ 为半径的圆周. 因 $f(x)$ 可以精密地由 $f(e^{-1/n}e(\frac{h}{q}))$ 来近似逼近，此处 $e(y) = e^{2\pi iy}$ 及 $x(x \in \Gamma)$ 为 $e^{-1/n}e(\frac{h}{q})$ 的一个邻近点，所以 Γ 被分割为诸小弧 ζ_{hq} 之和，此处 ζ_{hq} 上的点 x 的辐角位于

$$\left(\frac{h}{q} - \frac{1}{q(q+q^1)}\right)2\pi \text{ 与 } \left(\frac{h}{q} + \frac{1}{q(q+q'')}\right)2\pi (\text{mod } 1)$$

之间,其中$\frac{h'}{q'}$,$\frac{h}{q}$,$\frac{h''}{q''}$为阶为$N=[\sqrt{n}]$的法雷(Farey)贯中的三相邻项,因此

$$r_3(n)=\sum_{q=1}^{N}\sum_{h(q)}{}'\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_{hq}}f(x)^3x^{-n-1}\mathrm{d}x \qquad ④$$

此处 h 过 mod q 的一个缩剩余系,当 $x\in\xi_{hq}$ 时,置

$$x=\mathrm{e}\left(\frac{h}{q}\right)\mathrm{e}^{-Y},Y=\eta+\mathrm{i}\theta$$

则在假定(QGRH)之下,其中 $1/2\leqslant\theta\leqslant3/4$,哈代与李特伍德证明了

$$f(x)=\varphi+\Phi \qquad ⑤$$

此处

$$\varphi=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)Y},\Phi=O(n^{\theta-\frac{1}{4}}(\log n)^C)$$

麦比乌斯(Möbius, August F-erdinard, 1790—1868),德国数学家、天文学家.生于瑙姆堡附近的休普福特,卒于莱比锡.

式中,$\mu(q)$ 与 $\varphi(q)$ 分别表示麦比乌斯(Möbius)与欧拉函数,将⑤代入④得

$$r_3(n)\sim\frac{1}{2}\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)n^2,2\nmid n \qquad ⑥$$

即当 $2\nmid n$ 及 n 充分大时,命题(B)成立.进而言之,我们容易从⑥推出将奇数 n 表为三个素数之和的表示法 $R_3(n)$ 的渐近公式,即 $R_3(n)$ 渐近地等于 $r_3(n)(\log n)^{-3}$,但用圆法来处理 $r_2(n)$ 却是无效的,即使假定了(GRH)的真实性亦复如此.主要困难不在于主项而在于误差项.因此,若在⑤中将 Φ 略去,即 φ 被用来代替 f,则得

$$r_2(n)\sim2\prod_{p>n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}n(2\mid n) \qquad ⑦$$

由⑦可知将偶数 n 表为两个素数之和的表示法数 $R_2(n)$ 渐近地等于 $r_2(n)(\log n)^{-2}$.这是哈代与李特伍德关于猜想(A)的著名猜想.

在假定(GRH)之下,哈代与李特伍德证明了

$$\sum_{\substack{m=2\\2\mid m}}^{n}\left(r_2(m)-2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid m\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}m\right)^2=O(n^{\frac{5}{2}+\epsilon}) \qquad ⑧$$

此后,我们用 ϵ 表示任意给定的正数,及含于记号 O 中的常数仅依赖于 ϵ,命 $E(n)$ 表示不超过 n 的偶数中使猜想(A)不成立的偶数个数,则由⑧立刻推出

$$E(n)=O(n^{1/2+\epsilon}) \qquad ⑨$$

由此推知几乎所有的偶数都是两个素数之和.

以后,维诺格拉多夫对圆法作出了一系列重大的改进,其中之一是用有限和

$$F(\alpha)=\sum_{2<p\leqslant n}\mathrm{e}(\alpha p) \qquad ⑩$$

来代替 $f(x)$,因简单的正交关系

$$\int_0^1 e(\alpha k)\mathrm{d}\alpha = \begin{cases}1, 当\ k = 0\\ 0, 其他情形\end{cases} \tag{11}$$

得出

$$R_3(n) = \sum_{p_1+p_2+p_3=n} 1 = \int_0^1 F(\alpha)^3 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha \tag{12}$$

用这个公式来代替 ③.

维诺格拉多夫的改进源于他在 1928 年关于华林(Waring) 问题的一篇文章.

命 $\tau = n^{-1}(\log n)^{c_1}$ 及 $Q = (\log n)^{c_2}$. 当 $q \leqslant Q$ 时,命

西格尔(Siegel, Carl Ludwig, 1896—1981), 德国数学家. 生于柏林.

$$M_{hq} = \left[\frac{h}{q} - \tau, \frac{h}{q} + \tau\right], (h, q) = 1$$

这称为一段"优弧". 当 n 充分大时,诸优弧是互不相交的. 所有 M_{hq} 的和集记之为

$$M = \bigcup_{1\leqslant q\leqslant Q} \bigcup_{h(q)}' M_{hq}$$

它关于[0,1] 的余集称之为"劣弧",记之为 m,所以有

$$R_3(n) = \int_M F(\alpha)^3 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha + \int_m F(\alpha)^3 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = I + J(定义) \tag{13}$$

因此对于充分大的 n,(B) 的证明归结为往证 I 给出 $R_3(n)$ 的主项而 J 仅给出低阶项.

注记:首先是哈代与李特伍德在他们关于华林问题的工作中提出了优弧与劣弧的划分.

估计 I 的困难是由下面的西格尔(Siegel) - 瓦尔菲茨(Walfisz) 定理克服的.

命 $q \leqslant Q$ 及 $(h, q) = 1$,则

$$\pi(x, q, h) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv h(\mathrm{mod}\ q)}} 1 = \frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(x e^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{14}$$

此处隐含于 O 中的常数依赖于 c_2.

由 ⑭ 可知

$$F(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{m=2}^{n-1} \frac{e(\beta m)}{\log m} + O(n e^{-c\sqrt{\log n}})$$

$$\alpha = \frac{h}{q} + \beta \in M \tag{15}$$

将 ⑮ 代入 I 的表达式得

$$I \sim \frac{1}{2}\prod_{p\mid n}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{n^2}{(\log n)^3}, 2\nmid \gamma. \tag{16}$$

因此困难集中于 $F(\alpha)$ 的估计，其中 $\alpha \in m$. 1937 年，维诺格拉多夫用他自己独创的关于素数变数指数和估计的天才方法给出了 $F(\alpha)$ 一个非寻常的估计，即

$$F(\alpha) \ll n(\log n)^{-c}, \alpha \in m \quad ⑰$$

此处 c 是一个常数大于等于 3，注意给予 c，我们可以取 c_1, c_2 为依赖于 c 的常数，故由 ⑰ 得

$$J \ll n(\log n)^{-c}\int_0^1 | F(\alpha) |^2 d\alpha \ll n^2(\log n)^{-4} \quad ⑱$$

将 ⑯ 与 ⑱ 代入 ⑬ 得

$$R_3(n) \sim \frac{1}{2}\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{n^2}{(\log n)^3}, 2 \nmid n$$

由此得出存在一个常数 n_0，使每一奇数 $n(n > n_0)$ 皆为三个素数之和. 这个定理称为“维诺格拉多夫 - 哥德巴赫定理”或“三个素数定理”.

我们必须指出，下面两个定理在三个素数定理获得证明之前就已经出现了.

(i) 每一大奇数 n 均可以表示为

$$n = p_1 + p_2 + p_3p_4 \quad ⑲$$

(ii) 每一大整数都是两个素数及一个整数的平方之和(见埃斯特曼).

如果在估计 I 时，帕奇(Page) 定理被用来代替西格尔 - 瓦尔菲茨定理，则三个素数定理中的 n_0 是可以算出来的. 波罗斯特金(Borozdkin) 给出 $n_0 = e^{e^{16.038}}$.

利用维诺格拉多夫方法，几位数学家独立地指出，几乎所有的偶数都是两个素数之和，进而言之，对于任何常数 c，他们证明了

$$E(n) \ll n(\log n)^{-c} \quad ⑳$$

此处隐含于“$\ll$”中的常数仅依赖于 c(见范德科皮德(Van der Corput)，埃斯特曼，海尔布伦('Heilbronn)，华罗庚，朱达科夫(Tchudakov)).

在 1946 年，用哈代与李特伍德原来的将 Γ 分割为 M 与 m 的方法，前苏联数学家林尼克给予 $f(x)$ 一个类似于 ⑰ 的估计，从而他给了三个素数定理一个新的证明，林尼克关于 $f(x)$ 的估计方法是建立在他关于 L - 级数的重要密度定理的基础上面的. 这一密度定理被用来代替未被证明的(QGRH)，现将密度定理叙述于下：

命 $\chi(n)$ 为 mod q 的原特征，命 $N(\beta, T)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形

$$\nu \leqslant \sigma \leqslant 1, \ | t | \leqslant T$$

中的零点个数，此处 $T \geqslant q^{50}, \beta \geqslant 1$ 及 $\nu = \beta - \frac{1}{2}$，则

$$N(\beta, T) \ll q^{2\nu}T^{1-\frac{\nu}{1-\nu}}(\log T)^{10} + q^{30} \quad ㉑$$

以后，于 1975 年，沃恩（Vaughan）给了林尼克关于 $f(x)$ 的估计一个新的证明，进一步的简化证明是潘承彪于 1977 年独立得到的．在他们的证明中，仅用到了 L－函数一些简单的性质，关于指数和 $F(\alpha)$ 的估计，沃恩也给出了一些改进，他的主要思想为运用恒等式

$$-\frac{L'}{L}=-\frac{L'}{L}(1-LG)-L'G=\left(-\frac{L'}{L}-F\right)(1-LG)-L'G+F-LFG$$

这一点潘承洞也曾独立地指出过．

应用密度定理的进一步结果，沃恩在 1972 年证明了

$$E(n)\ll ne^{-c\sqrt{\log n}} \quad ㉒$$

以后，蒙哥马利与沃恩于 1975 年又改进了 ㉒，他们证明了存在常数 δ 使

$$E(n)\ll n^{1-\delta} \quad ㉓$$

陈景润与潘承洞曾指出 $\delta>0.01$，而陈景润又将这个估计改进为 $\delta>0.04$．

此外，林尼克首先用圆法证明了下面两个重要定理：

(i) 对于任何整数 $g>1$，皆存在 $k_0>0$，使当 $k>k_0$ 时，每一大整数 $\equiv kg \pmod 2$ 皆可能表示为

$$n=p_1+p_2+g^{x_1}+\cdots+g^{x_k} \quad ㉔$$

此处 $x_1,\cdots,x_2$ 为正整数．

(ii) 在假定（RH）之下，对于任意整数 $n>1$，皆存在 p_1,p_2 使

$$|n-p_1-p_2|\ll(\log n)^{3+\varepsilon} \quad ㉕$$

成立．

关于这两个问题，维诺格拉多夫，加勒革尔（Gallagher），凯蒂（Katai），蒙哥马利与沃恩，王元，帕拉哈（Prachar），潘承洞，陆鸣皋，及王元与单墫均作过有价值的贡献，例如，凯蒂证明过，㉕ 的右端可以换成 $(\log n)^2$．

(2) 筛法．

筛法导源于公元前250年的“埃拉托塞尼氏筛法”．埃拉托塞尼氏注意到 $\sqrt{n}$ 与 n 之间的素数可以从序列 $2,3,\cdots,n$，去掉不超过 $\sqrt{n}$ 的任何素数的倍数而得到．命 $\pi(x)(=\pi(x,1,1))$ 表示大于等于 x 的素数个数及 $\prod=\prod\limits_{p<\sqrt{n}}p$，则

$$1+\pi(n)-\pi(\sqrt{n})=\sum_{a\leqslant n}\sum_{d\mid(a,\prod)}\mu(d)=\sum_{d\mid\prod}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right] \quad ㉖$$

如果我们用 $\frac{n}{d}+\theta(-1<\theta\leqslant 0)$ 来代替 $\left[\frac{n}{d}\right]$，则式 ㉖ 中将产生误差项

$$O(2^{\pi(n)}) \quad ㉗$$

与 n 相比，这样大的误差项致使埃拉托塞尼氏筛法几乎是无用的．

1919年,布朗提出了他的新筛法并成功地用于数论中许多困难的与重要的问题.特别是哥德巴赫问题,这是筛法的一个重大进展.1947年,塞尔伯格给出了另一个筛法,对于每一个可以应用的情况,均可以得到比布朗筛法更为精密的结果.进而言之,赛尔伯格的上界方法是异常简单的,而且具有最后形式的样子.总之,这些方法构成了数论的不可少的工具.

布朗与赛尔伯格方法的精华在于用不等式来代替

$$\Delta(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, 当\ n = 1 \\ 0, 其他情况 \end{cases} \tag{28}$$

从而使埃拉托塞尼氏筛法中的误差项得以减少.布朗定义了两个整数集合 D_1 与 D_2 满足

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ d \in D_1}} \mu(d) \leqslant \Delta(n) \leqslant \sum_{\substack{d \mid n \\ d \in D_2}} \mu(d) \tag{29}$$

其中 D_1 与 D_2 的构造颇复杂并具有很大的组合性质.赛尔伯格注意到对于任何满足 $\lambda_1 = 1$ 的实数集合 λ_d 均有

$$\Delta(n) \leqslant \left(\sum_{d \mid n} \lambda_d\right)^2 \tag{30}$$

选择适当的 λ_d,则得赛尔伯格的上界方法.赛尔伯格仅发表了他的上界方法,并指出了它在构造他的下界方法时的作用,但并未发表细节,赛尔伯格的想法由王元、维诺格拉多夫,列文(Levin)及朱尔凯特与黎切尔特(Jurkat and Richert)等加以发展与完善.

命 $A = \{a_\nu\}$ 为一个有限整数集合,命 P 表示一个有限素数集合,进而言之,命 $F(A, P)$ 表示 A 中未被 P 筛去的元素个数,取 $a_\nu = \nu(n - \nu)(1 \leqslant \nu \leqslant n)$ 及 P 表示所有小于等于 $n^{\frac{1}{l+1}}$ 的素数,此处 $2 \mid n$ 及 l 为一个自然数.记 $F(n, n^{\frac{1}{l+1}})$ 的一个正的下界估计,则可以由此推出每一充分大的偶数 n 都是两个不超过 l 个素数的乘积之和.我们将这一命题记之为(l, l).类似地,对于 $l \neq m$,我们可以定义(l, m).

布朗首先证明了(9,9),布朗的方法与他的结果被几个数学家加以改进.例如,(7,7)(拉德马赫尔(1924),(6,6)(埃斯特曼,1932)及(5,7),(4,9),(3,15)与(2,366)(黎切,1937)).

如果将一些组合方法巧妙运用,则布朗与赛尔伯格的方法的威力均将大大加强.组合思想有两大类:一个是运用某些组合恒等式来迭代.这一思想导源于布赫夕塔布在1937年发表的一篇文章.另一想法为库恩所首创,他在1941年引进的加权筛法.

命 $F(A, q, q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数:$a_\nu \equiv 0 \pmod q$ 及 $a_\nu \not\equiv 0 \pmod p$ $(p < q')$,则

$$F(A,p_s) = F(A,p_t) - \sum_{p_t \leqslant p < p_s} F(A,p,p) \qquad ㉛$$

这个恒等式被称为布赫夕塔布恒等式. 由 $F(A,p_t)$ 的一个下界估计及诸 $F(A,p,p)$ 的上界估计,即可导出 $F(A,p_s)$ 的一个下界估计. 类似地,我们可以得到 $F(A,p_s)$ 的一个上界估计. 用式㉛来进行逐步迭代,我们可以得到 $F(A,P)$ 的较好的上界与下界估计. 运用赛尔伯格方法,朱尔凯特与黎切尔特于 1965 年对于某种 $F(A,P)$,得到了他们上界与下界估计的显式表达式. 命 $F(A,b,q,q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数: $a_\nu \not\equiv 0 \pmod p$ $(p < q)$ 及 a_ν 至多适合同余式 $a_\nu \equiv 0 \pmod{p'}$ $(q \leqslant p' < q')$ 中的 b 个,则

$$F(A,b,q,q') \geqslant F(A,q) - \frac{1}{b+1}\sum_{q \leqslant p < q'} F(A,p,q) \qquad ㉜$$

选取适当的 q, q' 与 b,则 $F(A,b,q,q')$ 的一个正的估计常常引出哥德巴赫问题的较好结果,布赫夕塔布在 1938 年与 1940 年分别证明了(5,5) 与(4,4),其中塔尔塔科夫斯基(Tartakovskii) 也宣布过(4,4). 库恩于 1954 年首先证明了$(a,b)(a+b \leqslant 6)$.

将布朗、赛尔伯格、布赫夕塔布与库恩的方法综合使用,王元于 1956 年证明了(3,4),并于 1957 年证明了(3,3),$(a,b)(a+b=5)$ 与(2,3). 维诺格拉多夫在 1956 年也独立地证明过(3,3),赛尔伯格曾宣布过(2,3),但未见他发表过证明,其后,列文与巴尔巴恩于 1963 年给出(2,3) 以另证,在他们的证明中,数值计算是简化了,但却需用较深的分析方法.

如果我们取 $A = \{n-p, p<n\}$ 及 P 为小于等于 $n^{\frac{1}{l+1}}$ 的所有素数,则由 $F(A,P)$ 的一个正下界即可推出$(1,l)$,这个集合 A 是埃斯特曼在 1932 年首先引进的,他首先在(GRH) 之下证明了(1,6). 1956 年, 在同样的假定下,王元与维诺格拉多夫将(1,6) 改进为(1,4),王元并于 1957 年给出进一步的改进(1,3).

为了去掉上述结果中未经证明的猜想,还需新的想法与方法,至今所研究的筛法均为对于每个 $p \in P$,将 A 中属于剩余类 $0 \pmod p$ 者筛掉. 但在某些应用中,对于每个 $p \in P$,需将 A 中属于诸剩余类

$$h_{p,1}, \cdots, h_{p,k(p)} \pmod p$$

的元素都筛掉,布朗与赛尔伯格方法可以有效地用于这种情况,即就平均而言,$k(p)$ 相比于 p 是很小的,否则它们是无效的. 1941 年,林尼克提出了一个天才的方法,即所谓大筛法,可以得到就平均而言,$k(p)$ 比较大时,A 中不超过 n 而又未被筛去的元素个数的一个上界估计. 匈牙利数学家瑞尼从多方面改进了林尼克的方法并于 1948 年成功地证明了$(1,c)$,大筛法方面进一步的重要改进是 1965 年由罗斯与朋比尼得到的,在瑞尼的文章中,他用大筛法证明了一个关于 $\pi(x,h,l)$ 的中值公式,在证明$(1,c)$ 时,它可以用来代替(QGRH),这个公式为

$$\sum_{k\leqslant x^{\delta}}\max_{(h,k)=1}|\pi(x,k,h)-\frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)}|=O\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}}\right) \qquad ㉝$$

注意在瑞尼的原作中,$\pi(x,h,l)$ 需改成一个加权和.如果 ㉝ 对于 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 成立,则它可以用来代替埃斯特曼、维诺格拉多夫与王元的结果中的(GRH)(见王元).

在1961年,巴尔巴恩证明了㉝,其中 $\delta=1/6-\varepsilon$.1962年,潘承洞独立地证明了 ㉝ 及(1,5),其中 $\delta=1/3-\varepsilon$.1962年,王元指出(1,4)可以从 $\delta=1/3-\varepsilon$ 中推出来.1962年潘承洞与1963年巴尔巴恩独立地证明了 ㉝ 对于 $\delta=3/8-\varepsilon$ 成立,从而不需复杂的计算即能导出(1,4).1965年运用 $\delta=3/8-\varepsilon$ 及复杂的计算,布赫夕塔布证明了(1,3).同时,朋比尼与维诺格拉多夫独立地证明了 ㉝ 对于 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$ 成立并由此简单地推出(1,3),公式㉝,其中 $\delta=1/2-\varepsilon$,称为朋比尼 - 维诺格拉多夫中值定理.进而言之,朋比尼建立了下述重要公式

$$\sum_{k\leqslant x^{1/2}/(\log x)^{c_2}}\max_{(h,k)=1}\left|\pi(x,k,h)-\frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}}\right) \qquad ㉞$$

其中,c_1 为任何给定常数,c_2 为依赖于 c_1 的常数.尽管朋比尼公式比具有 $\delta=1/2-\varepsilon$ 的式 ㉝ 强了一点,但它在数论中却有很多重要应用,例如,㉞ 可以用来代替霍勒(Hooley)证明的下述重要定理中用到的(GRH).命 $N(n)$ 表示 $n=p+u^2+v^2$ 的表示个数,则

$$N(n)\sim\frac{\pi n}{\log n}\prod_{p\geqslant 3}\left(1+\frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right)\prod_{\substack{p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\\ p\mid n}}\frac{(p-1)^2}{p^2-p+1}\prod_{\substack{p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\\ p\mid n}}\frac{p^2-1}{p^2-p-1} \qquad ㉟$$

此处 $\chi(n)$ 为 mod 4 的非主特征.

注记:哈代与李特伍德曾用他们的圆法给出了猜想 ㉟,但即使假定(GRH),他们亦未能证明 ㉟.1957年,霍勒首先在(GRH)之下给了 ㉟ 一个简洁的证明.然后于1960年,林尼克用他复杂的离差方法,完全证明了 ㉟,即不附有任何假定的证明.朋比尼文章的另一优点是他对 ㉞ 的证明是富于创造性及简明的.㉞ 的进一步简化证明则是茄勒草尔给出来的.

1966年,陈景润给予加权筛法以重要的改进,从而证明了(1,2),这一结果被称为陈氏定理,即每一大偶数都是一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和.命

$$M=N-\Omega+O(n^{9/10}) \qquad ㊱$$

此处

$$N = F(n, n^{\frac{1}{10}}) - \frac{1}{2} \sum_{n^{\frac{1}{10}} < p < n^{\frac{1}{3}}} F(n, p, n^{\frac{1}{10}})$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{\substack{p > n \\ (p12)}} \sum_{\substack{n-p=p1p2p3 \\ p3 \leqslant n/p1p2}}$$

其中 $2 \mid n, A = \{n - p, p < n\}$ 及 $(p_{1,2})$ 表示条件 $n^{\frac{1}{10}} \leqslant p_1 < n^{1/3} \leqslant p_2 \leqslant \left(\frac{n}{p_1}\right)^{1/2}$，则当 n 充分大时，由 M 的正的下界估计即推出(1,2). 事实上，$M > 0$ 表示存在一个素数 p 使 $n - p$ 在区间 $[n^{1/10}, n^{1/3}]$ 中最多只有一个素因子及最多只有一个素因子大于 $n^{1/3}$，或 $n - p$ 仅含大于 $n^{1/3}$ 的素因子. ㊱ 右端的 N 由库恩不等式给出，这里需选取适当的参变数，它可以由布朗、赛尔伯格与布赫夕塔布方法结合朋比尼 - 维诺格拉多夫公式加以估计，陈景润的天才想法是引进 Ω，并给它一个非寻常的估计. 以后，所有关于陈氏定理的简化证明皆在于简化 Ω 的估计，特别是，潘承洞、丁夏畦与王元指出 Ω 的估计可以立刻由下面类似于 ㉞ 的中值公式推出：

命 $2 \leqslant y \leqslant x$ 及 $\pi(y, a, q, h) = \sum_{\substack{ap \leqslant y \\ ap \equiv h \pmod q}} 1$，则

$$\left| \sum_{q \leqslant x^{1/2}/(\log x)^{c_2}} \max_{y \leqslant x} \max_{(h,q)=1} \left| \sum_{c_3 < a \leqslant c_4} f(a) \left[\pi(y, a, q, h) - \frac{\mathrm{Li}\, \frac{y}{a}}{\varphi(q)} \right] \right| = O\left(\frac{x}{(\log x)^{c_1}} \right) \quad ㊲$$

对于适合 $(\log y)^{c_2} < c_3 \leqslant c_4 < y^{1-\varepsilon}$ 的 c_3, c_4 一致成立，此处 $|f(a)| \leqslant 1, c_2 = c_1 + 7$ 及隐含于 O 中的常数依赖于 ε 与 c_1. 进而言之，潘承洞与丁夏畦建立了一个包有 ㉞ 与 ㊲ 的中值公式.

(3) 密率.

命 A 表示一个互不相同的非负整数集合，其元素记为 a. 命 $A(n) = \sum_{1 \leqslant a \leqslant n} 1$，进而言之，命 $\alpha = \inf_{n \leqslant 1} \frac{A(n)}{n}$，这称为 A 的须尼尔曼密率. 显然有 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，而 $\alpha = 1$ 即表示 A 含有所有自然数. 类似地，我们可以定义 $B, b, B(n), \beta$ 及 $C, c, C(n), \gamma$. 具有形式 $a + b (a \in A, b \in B)$ 的所有互不相同的整数集记之为 $C = A + B$，我们定义 $2A = A + A$ 及 $sA = A + (s-1)A (s \geqslant 2)$. 须尼尔曼证明了两个简单但很重要的定理，即：

(i) 若 $0 \in A$ 及 $1 \in B$，则 $\gamma \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta$;

(ii) 若 $0 \in A, 1 \in B$，及 $\alpha + \beta \geqslant 1$，则 $\gamma = 1$，换言之，集合 C 含有全体自然数；

由 (i) 可知，若 $\alpha > 0$，则存在整数 s_0 使 $s_0 A$ 的密率大于等于 1/2，从而由 (ii)

可知 $2s_0A$ 含有全体自然数，故得：

(iii) 若 $0 \in A$ 及 $\alpha > 0$，则每一个正整数皆可以表为 $2s_0$ 个 A 的元素之和；

命 A^* 表示一个非负整数的集合，其中元素是允许重复的. 命 A 表示 A^* 中所有互异元素之集合及 $r(a)$ 表示 a 在 A^* 中重复的次数，则由施瓦尔茨(Schwarz)不等式得

$$\Big(\sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a)\Big)^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a)^2 \sum_{1 \leqslant a \leqslant n} 1 = A(n) \sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a)^2$$

所以

(iv) $a \geqslant \Big(\sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a)\Big)^2 / n \sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a)^2.$

须尼尔曼的密率概念确实简单，但却很有用. 命 $r(a)$ 表示 $a = p_1 + p_2$ 的表示法个数，则由布朗方法可得

$$r(a) \leqslant \frac{ca}{(\log n)^2} \sum_{k \mid a} \frac{\mu(k)^2}{k}$$

取 A^* 为包有 0,1 及所有形为 $a = p_1 + p_2$ 的数的集合，则由(iv)可知 A 有正密率，因此由(iii)得著名的须尼尔曼－哥德巴赫定理，即存在常数 c，使每个大于 1 的整数都是不超过 c 个素数之和.

曼 恩
(Mann, Henry Berthold, 1905—) 数学家. 生于奥地利的维也纳.

命 s 表示最小的整数使每个大整数都是不超过 c 个素数之和，则由须尼尔曼原来的方法可得 $s \leqslant 800\,000$，由于须尼尔曼密率及布朗方法方面的结果的进一步改进，特别是辛钦(Khintchine)于 1932 年证明了，若 $A = B$，则 $\gamma \geqslant \min(1, 2\alpha)$. 曼恩(Mann)在 1942 年证明了著名的 $\alpha + \beta$ 猜想，即 $\gamma \geqslant \min(1, \alpha + \beta)$，及赛尔伯格发表了他的新筛法，所以 s 的估计亦有相应改进. 例如，$s \leqslant 2\,208$(罗曼诺夫(Rcmancv), 1935)，$s \leqslant 71$(海尔布朗，朗道与西尔克(Scherk), 1936)，$s \leqslant 67$(黎切, 1936)等等，最佳结果 $s \leqslant 6$ 是沃恩得到的，无论如何，其精密度仍低于由三个素数定理推出的 $s \leqslant 4$. 用须尼尔曼方法还可以估计 S 的上界，此处 S 表示每一个大于 1 的整数皆可以表为不超过 S 个素数之和.

尽管三个素数定理与(1,2)较之(1,1)仅一步之差，似乎用目前方法的改进是不可能证明猜想(A)(或(1,1))，甚至在(GRH)之下或假定㉝对于 $\delta = 1 - \varepsilon$ 成立，即

$$\sum_{x < x^{1-\varepsilon}} \max_{(h,k)=1} \left| \pi(x, k, h) - \frac{\mathrm{Li}\ x}{\varphi(k)} \right| = O\Big(\frac{x}{(\log x)^C}\Big)$$

这一公式通常被称为哈贝斯坦(Halberstam)猜想，我们还不能无条件地证明(1,1)，因此至今仍有很多人相信哈代演讲中所说的猜想(A)的困难程度"是可以与数学中任何未解决的问题相比拟的"，无论过去或现在都是对的. 因此我们深信对于进一步研究猜想(A)，必须有一个全新的思想.

2 哥德巴赫问题[①]

——潘承洞

潘承洞(Pān Chéngdòng, 1934—1997) 中国数学家. 生于江苏苏州, 卒于山东济南.

2.1 概述

哥德巴赫问题是在1742年哥德巴赫写信给欧拉时提出的,在信中,哥德巴赫提出了关于将整数表为素数和的两个猜想,这两个猜想可用略为修改了的语言叙述为:

(A) 每一个大于等于6的偶数都是两个奇素数之和;

(B) 每一个大于等于9的奇数都可以表成三个奇素数之和。

显然,由命题(A)可以推出命题(B).

从哥德巴赫写信到今天,已经积累了不少宝贵的数值资料,这些资料指出了这两个猜想是正确的,但迄今还不能证明它们的真伪.

大约在20世纪20年代,即使是证明如下的命题:存在一个自然数 C,使每一个大于等于4的整数都可以表为不超过 C 个素数之和也被认为是现代数学家力所不能及的事. 但是这个弱型哥德巴赫问题在1930年为须尼尔曼[②]解决了.

研究哥德巴赫问题的基本方法是筛法,大筛法及圆法,筛法是埃拉托塞尼首创的,在20世纪20年代布朗对筛法作了重要的改进,运用布朗筛法布赫夕塔布[③]证明了任一大偶数可以表示成两个素因子各不超过4个的整数之和,简记为(4,4),以后塞尔伯格对筛法亦作了重要改进,并且宣布用他的方法可能证明(2,3)成立,但是塞尔伯格并没有给出(2,3)[④]的证明,王元[⑤][⑥]综合运用了布赫夕塔布与塞尔伯格方法证明了(3,4)成立,1957年他又证明了(2,3)成立.

上面所得到的结果,仅仅是证明了大偶数可表示成两个殆素数之和,运用林尼克的大筛法1948年瑞尼[⑦]首先证明了任一大偶数都是一个素数及一个素因子不超过 C 个的整数之和,即证明了$(1, C)$成立,瑞尼结果的重要性在于他

---

① 原载山东大学学报,1978,第1期,46 - 53.

② Л.Г.Щнирельман:Обаддитинных свойстнах чисел,ростон Н/Д,Изн,Донск,Политехн,ин-та,14:2 - 3(1930)

③ А.А.Бухштаб:Новые улучшения в методе эратосфенова решета,матем.сб.4(46),375 - 387,1938.

④ A.Selberg在其Collected Papers,Vol.2,Springer-Verlag,1991年的长文"Lectures on sieves"中的"23.Anearly aproach to the twin prime and the Goldbach problem"中,给出了证明,但方法完全不同.编者注.

⑤ 王元.表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和.数学学报,6卷3期,500-513.1956.

⑥ 王元.表大偶数为两个殆素数之和,科学纪录,1卷5期,267-270,1957.

⑦ Renyi A.О предстанлении четных чисел в виде суммы простого и почти числа.ИАН СССР,серия матем,12(1948).

已将一个殆素数改为素数了.运用大筛法及 L - 函数的零点密度估计,1962 年潘承洞①首先给出了 C 的定量估计,证明了 $C \leqslant 5$,即证明了(1,5) 成立,王元②、潘承洞③、布赫夕塔布④证明了(1,4) 成立,后来布赫夕塔布⑤、维诺格拉多夫⑥、朋比尼⑦先后证明了(1,3) 成立,目前最好的结果是陈景润⑧在 1966 年宣布,且在 1973 年证明的(1,2),此即著名的陈氏定理,由于这个定理的重要性,丁夏畦、王元、潘承洞⑨对(1,2) 给出了一个实质性的简化证明,目前在世界上已有四个简化证明.

对哥德巴赫猜测作出另一个重要贡献的就是维诺格拉多夫,他对某种以素数为变数的三角和给出了非显然估计,由此结合哈代 - 李特伍德所创造的圆法证明了对充分大的奇数,猜测(B) 都成立,通常称之为维诺格拉多夫⑩定理,简称为三素数定理.

有人经过计算证明了每一奇数 $N \geqslant e^{e^{16.038}}$ 都能表成三素数之和,以后林尼克⑪,Чудаков 等人对三素数定理给出了一个全部用分析方法的新证明,现在已经给出了三素数定理的多种证明方法,最简单的用分析方法的新证明是最近由潘承彪⑫给出的.

几十年来经过许多数学工作者的努力,创造了许多方法,对哥德巴赫猜测作出了重要贡献,但是从现有的方法看来,要想解决哥德巴赫猜测仍有巨大的困难,下面我们对筛法、大筛法及圆法来作一扼要的介绍.

2.2 筛法

设 N 为大偶数,$\triangle = \prod\limits_{\substack{P \leqslant \zeta \\ P \nmid N}} P$.令

$$P(N, \triangle) = \sum_{\substack{p \leqslant N \\ (N-p, \triangle)=1}} 1$$

---

① 潘承洞.表大偶数为素数及殆素数之和.数学学报,12:1(1962),95-106.

② 王元.On the repeesentation of large integers as a sum of a prime and an almost prime, Scientia Sinica XI:8(1962).

③ 潘承洞.表大偶数为素数及一个不超过两个素数的乘积之和.山东大学学报,4(1962).

④ Барбан, М.Б., плотность нулей L-рядов дирихле и задача о сложении простых и почти простых чисел, мат.сб.61:103(1963).

⑤ Бухштаь, А.А.:Новые результаты в исследонании проьлемы Гольдьаха-Эйлера и проьлемы простых чисел близнецов, ДАН СССР, 162(1965), 739-742.

⑥ Виноградов, А.И., О плотностной гипотезе для L-рядон Дирихре, ИАН СССР. сер. мат. 20. (1965), 903-934

⑦ Bombieri, E., On the lavge sieve, Mathematika, 12(1965), 201-225.

⑧ 陈景润.表大偶数为素数及一个不超过两个素数的乘积之和.中国科学,2(1973).

⑨ 潘承洞,丁夏畦,王元.On the ropresentation of every large even integer as a sum of a prime and an almost prime, Science, (1975)599-610.

⑩ И.М.Виноградов, Представление нечётного числа суммой трёх простых чилел, ДАН СССР, 15, 291-294, 1937.

⑪ Ю.В.Линник, Новные доказательство теоремы, Гольдбаха-Виноградов, Матем, сб, 19(61), 3-8, 1946.

⑫ 潘承彪.三素数定理的一个新证明.数学学报,(3)1977.

若取 $\zeta=N^{\frac{1}{2}}$，则哥德巴赫猜测就是要证明 $P(N,\triangle)>0$，现在我们来研究 $P(N,\triangle)$，利用麦比乌斯函数 $\mu(d)$ 的性质知

$$P(N,\triangle)=\sum_{\substack{p\leqslant N\\(N-p,\triangle)=1}}1=\sum_{p\leqslant N}\sum_{d\mid(N-p,\triangle)}\mu(d)=$$

$$\sum_{d\mid\triangle}\mu(d)\sum_{\substack{p\leqslant N\\p\equiv N(\bmod d)}}1=\sum_{d\mid\triangle}\mu(d)\left\{\frac{\operatorname{Li}N}{\varphi(d)}+R_d(N)\right\}=$$

$$\sum_{d\mid\triangle}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\operatorname{Li}N+O\Big(\sum_{d\mid\triangle}|R_d(N)|\Big)$$

这里 $\varphi(d)$ 为欧拉函数，$R_d(N)$ 为算术级数中素数分布的余项. 显然，上面的主项的阶远小于 $\frac{N}{\log N}$，而余项的项数太多，其阶远大于 2ζ，故除了当 ζ 比 N 的阶小得多的情形下，上面的方法几乎是无用的，这就是古典的埃拉托塞尼筛法.

针对埃拉托塞尼筛法的缺点，布朗与塞尔伯格用不同的方法来限制余项的项数，他们的方法是得到了 $P(N,\triangle)$ 的上界与下界的估计，下面来简单介绍一下塞尔伯格对 $P(N,\triangle)$ 进行上界估计的方法.

塞尔伯格筛法的思想很简单，他选取一组实数 λ_d，满足

$$\lambda_1=1,\lambda_d=0,d>D(D\geqslant S)$$

这样就有

$$P(N,\triangle)=\sum_{\substack{p\leqslant N\\(N-p,\triangle)=1}}1=\sum_{p\leqslant N}\sum_{d\mid(N-p,\triangle)}\mu(d)\leqslant\sum_{p\leqslant N}\Big\{\sum_{\substack{d\mid(N-p,\triangle)\\(d,N)=1}}\lambda_d\Big\}^2=$$

$$\sum_{\substack{d_1\leqslant D\\d_1\mid\triangle\\(d_1,N)=1}}\lambda_{d_1}\sum_{\substack{d_2\leqslant D\\d_2\mid\triangle\\(d_2,N)=1}}\lambda_{d_2}\sum_{\substack{p\leqslant N\\p\equiv N\left(\bmod\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}}1=$$

$$\sum\lambda_{d_1}\sum\lambda_{d_2}\frac{\operatorname{Li}N}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}+\sum\lambda_{d_1}\sum\lambda_{d_2}R_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(N)=I_1+I_2$$

显然我们要选取 λ_d 使得 I_1 最小，且要使 I_2 的阶比 I_1 小，赛尔伯格解决了这个极值问题，此时有

$$\lambda_d=\frac{\mu(d)\varphi(d)}{f(d)}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant D/d\\(k,d)=1\\k\mid\triangle\\(k,N)=1}}\frac{|\mu(k)|}{f(k)}\Bigg/\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant D\\l\mid\triangle\\(l,N)=1}}\frac{|\mu(l)|}{f(l)}$$

这里
$$f(n)=\varphi(n)\prod_{p\mid n}\frac{p-2}{p-1}$$

可以证明 $|\lambda_d|\leqslant1$，所以有

$$|I_2|\leqslant\sum_{\substack{d\leqslant D^2\\(d,N)=1}}\mu^2(d)3^{\omega(d)}|R_d(N)| \qquad ①$$

这里 $\omega(d)$ 为 d 的不同素因子的个数，而

$$|R_d(N)| \leqslant \max_{(l,d)=1} \left|\pi(N,l,d) - \frac{\mathrm{Li}\,N}{\varphi(d)}\right| \left(\pi(N,l,d) = \sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\equiv l(\bmod d)}} 1\right)$$

为了估计 I_2,这就要用到另一种筛法 —— 大筛法,利用大筛法可以证明当适当选取 ζ, D 时有下面的估计

$$I_2 = O\left(\frac{N}{\ln^3 N}\right) \qquad ②$$

2.3 大筛法

式 ② 的证明依赖于下面一条大筛法的著名定理:

定理 对任给正数 A,当 $B \geqslant 3A + 23$ 时,下面的估计式成立,即

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}\log^{-B}x} \max_{y\leqslant x} \max_{(l,d)=1} \left|\pi(y,l,d) - \frac{\mathrm{Li}\,y}{\varphi(d)}\right| = O\left(\frac{x}{\log^A x}\right) \qquad (3)$$

罗恩(Roth, Leonard, 1904—1968),英国数学家.曾在意大利的罗马、米兰、都灵、热那亚、维罗纳等地工作多年.

上面的定理是由林尼克、瑞尼、Барбан、潘承洞、维诺格拉多夫、罗恩、朋比尼等人获得的,1965 年朋比尼首先证明了式 ③,它通常称为朋比尼 - 维诺格拉多夫定理,是近代解析数论中的一个基本定理.

证明定理的基本工具是下面的关于特征和的估计

$$\sum_{q\leqslant D} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \left|\sum_{n=M+1}^{M+N_1} a_n\chi(n)\right|^2 \ll (D^2 + N_1) \sum_{n=M+1}^{M+N_1} |a_n|^2 \qquad ④$$

这里 $\sum\limits_{\chi}{}^{*}$ 表示通过所有属于模 q 的原特征.熟知

$$\sum_{\chi}{}^{*} \left|\sum_{n=N+1}^{M+N_1} a_n\chi(n)\right|^2 \ll (q + N_1) \sum_{n=M+1}^{M+N_1} |a_n|^2 \qquad ⑤$$

由 ⑤ 可得到

$$\sum_{q\leqslant D} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \sum_{n=M+1}^{M+N_1} a_n\chi(n)^2 \ll (D^2\log D + DN_1\log D) \sum_{n=M+1}^{M+N_1} |a_n|^2 \qquad ⑥$$

比较⑥与④看出,关键在于改进了第二项,全部大筛法的结果都是由于这个改进而显示其优越性的.令

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N_1} a_n e(n\alpha)$$

如能证明

$$\sum_{q\leqslant D} \sum_{(a,q)=1} \left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \ll (D^2 + N_1) \sum_{n=M+1}^{M+N_1} |a_n|^2 \qquad ⑦$$

则 ④ 能从 ⑦ 推出,这一点证明如下:熟知

$$\tau(\overline{\chi})\chi(n) = \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi}(a) e\left(\frac{an}{q}\right)$$

故有

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N_1}a_n\chi(n)\right|^2\leqslant\frac{1}{q\varphi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\left|\tau(\bar{\chi})\sum_{n=M+1}^{M+N_1}a_n\chi(n)\right|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{q\varphi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\left|\sum_{a=1}^{q}\bar{\chi}(a)\sum_{n=M+1}^{M+N_1}a_ne\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2\leqslant\frac{1}{q}\sum_{(a,q)=1}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N_1}a_ne\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2$$

所以关键在于证明式⑦.式⑦的证明并不是困难的,下面来给出证明提要,设 $F(\alpha)$ 是以周期为 1 的复值可微函数,容易得到

$$\sum_{q\leqslant D}\sum_{(a,q)=1}\left|F\left(\frac{a}{q}\right)\right|\leqslant D^2\int_0^1|F(\alpha)|\,\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{2}\int_0^1|F'(\beta)|\,\mathrm{d}\beta$$

取 $F(\alpha)=S^2(\alpha)$,即得

$$\sum_{q\leqslant D}\sum_{(a,q)=1}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\ll(D^2+N_1)\sum_{n=M+1}^{M+N_1}|a_n|^2$$

利用大筛法,丁夏畦与潘承洞证明了下面形式的均值定理.设

$$\psi(y,a,l,d)=\sum_{\substack{n\leqslant y/a\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)$$

则对任给正数 $A>0$,及 $0<\varepsilon<1$,当 $1\leqslant A_1<A_2<y^{1-\varepsilon}$ 时,下面的估计式成立,即

$$\sum_{d\leqslant\sqrt{x}\log^{-B}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\sum_{\substack{A_1\leqslant a<A_2\\(a,d)=1}}f(a)\left(\psi(y,a,l,d)-\frac{y}{a\varphi(d)}\right)=O\left(\frac{x}{\log^{A}x}\right)\quad ⑧$$

这里 $|f(a)|\leqslant 1,B\geqslant 2A+50$.

显然,只要令 $f(a)=1,a=1;0$,其他,则由⑧可推出③,然而形如式⑧的均值定理在(1,2)的证明中却起着基本的作用.

2.4 圆法

用 $r(N)$ 表示将偶数 N 表成两个素数之和的表法种数,则有

$$r(N)=\int_0^1S^2(\alpha)\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha N}\mathrm{d}\alpha$$

这里

$$S(\alpha)=\sum_{p\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi i\alpha p}$$

设 $\log^{16}N\leqslant P\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{N}$,令 $Q=N\cdot P^{-1},\tau=1/Q$,将积分区间移至$[\tau,1+\tau]$,以 $m(a,q)$ 表示区间

$$\alpha=\frac{a}{q}+\beta,\ |\beta|\leqslant\tau,1\leqslant q\leqslant P,(a,q)=1$$

容易看出这些区间是两两不相交的.令

$$m=\bigcup_{1\leqslant q\leqslant P}\ \bigcup_{(a,q)=1}m(a,q)$$

称 m 为基本区间,在$[\tau,1+\tau]$中除去 m 剩下的部分记作E,它称为余区间,我们首先来考察 $S\left(\frac{a}{q}\right)$,显然有

$$S\left(\frac{a}{q}\right)=\sum_{(l,q)=1}e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\pi(N,l,q)+O(q)$$

若 q 不太大,例如当 $q\leqslant\log^{16}N$ 时,由熟知的西格尔 - 瓦尔菲茨定理由上式立即可得到

$$S\left(\frac{a}{q}\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\mathrm{Li}\ N+O(N\log^{-10}N),q\leqslant\log^{16}N$$

由 $|\beta|\leqslant\tau$,可推出

$$S\left(\frac{a}{q}+\beta\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{n\leqslant N}\frac{e^{2\pi i\alpha n}}{\log N}+O(N\log^{-16}N)q\leqslant\log^{16}N$$

因此如果我们取 $P=\log^{16}N$,则可以求出在 m 上的积分值

$$\int_m S^2(\alpha)e^{2\pi i\alpha N}d\alpha$$

的渐近公式是容易得到的,其阶远大于$\frac{N}{\log^2N}$.

上面的方法就是哈代 - 李特伍德创造的圆法.困难在于无法证明

$$\int_E S^2(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha=O\left(\frac{N}{\log^2N}\right)$$

因为

$$\int_E|S^2(\alpha)|d\alpha\gg\frac{N}{\log N}$$

所以用圆法来证明 $r(N)>0$,看来是有很大困难的.

然而当 N 为奇数时,圆法是一个十分有力的工具,若以 $r_1(N)$ 记作将奇数 N 表成三个素数之和的表法种数,则有

$$r_1(N)=\int_0^1 S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha$$

同样将 $r_1(N)$ 写成下面的形式

$$r_1(N)=\int_m S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha+\int_E S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha$$

用完全相同的方法来处理第一个积分,可以证明

$$\int_m S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha\gg\frac{N^2}{\log^3N}$$

而

$$\left|\int_E S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha\right|\leqslant\max_{\alpha\in E}\left|S(\alpha)\right|\int_0^1\left|S^2(\alpha)\right|d\alpha\leqslant\frac{N}{\log N}\max_{\alpha\in E}|S(\alpha)|$$

1937 年维诺格拉多夫证明了

$$\max_{\alpha\in E}|S(\alpha)|\ll\frac{N}{\log^3 N}$$

由此推出

$$\left|\int_E S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha\right|\ll\frac{N}{\log^4 N}$$

由此立即推出当 N 为大奇数时，$r_1(N)>0$.

利用圆法还可以证明在$[x,2x]$内不能表示成二个素数之和的偶数个数为$O(x^{1-\delta})(\delta>0)$.

3 哥德巴赫问题①

——[苏]A.A.卡拉楚巴

本节研究把一个奇数 N 表为三个素数之和的问题(哥德巴赫问题).这里将证明奇数 N 表为三个素数之和的表法个数的渐近公式,这一定理是属于维诺格拉多夫的.由此推出,所有充分大的奇数 N 一定可以表为三个素数之和.

首先给出一个比较简单的,但是,是非实效的证明(定理3),然后,给出实效的证明(定理4).

3.1 哥德巴赫问题中的圆法

我们先来给出表自然数 N 为三个素数之和的表法个数的解析表达式.

引理1 设 $J(N)$ 是方程 $N=p_1+p_2+p_3$ 对于素数 p_1,p_2,p_3 的解的组数.那么

$$J(N)=\int_0^1 S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha \qquad ①$$

其中

$$S(\alpha)=\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha p}$$

从关系式

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1, m=0\\0, m\text{ 是整数}, m\neq 0\end{cases} \qquad ②$$

就证明了引理.

哈代、李特伍德和拉马努金的圆法的实质在于:从 $J(N)$ 中取出所预料的主要部分来作为当 $N\to+\infty$ 时 $J(N)$ 的渐近公式.为此,利用既约有理分数(法里分数)把式①中的积分区间$[0,1)$分为两两不相交的小区间;那些在对应于

① 原载[苏]A.A.卡拉楚巴著.解析数论基础.潘承彪,张南岳,译.北京:科学出版社,1984.

分母较小的分数的小区间上的积分之和就给出了所预料的主要部分.

首先,我们证明一个用有理数来逼近实数的辅助命题.

引理 2 设 $\tau \geqslant 1$,α 是实数,则存在互素的整数 a 和 q,$1 \leqslant q \leqslant \tau$,使得

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}$$

证明 不失一般性,可以假定 $0 \leqslant \alpha < 1$.考虑$\{\alpha m\}$,$m = 0,1,\cdots,[\tau]$.一定可以找到两个整数 $m_1 > m_2$,使得

$$(\{\alpha m_1\} - \{\alpha m_2\}) \leqslant \frac{1}{\tau}$$

即

$$|\alpha q_1 - b_1| \leqslant \frac{1}{\tau}$$

其中,$0 < m_1 - m_2 = q_1 \leqslant \tau$,$b_1 = [\alpha m_1] - [\alpha m_2]$.由此即推出引理的结论.

现在假定 $N \geqslant N_0$,N_0 为充分大的固定正数.取 $\tau = N(\log N)^{-20}$;由于式①中的被积函数是 α 的周期函数,周期为 1,故有

$$J(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha)\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha N}\mathrm{d}\alpha$$

根据引理 2,区间$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right)$中的每一个 α 可表为

$$\alpha = \frac{a}{q} + z,1 \leqslant q \leqslant \tau,(a,q) = 1,|z| \leqslant \frac{1}{q\tau} \qquad ③$$

容易看出,在这个表示式中,$0 \leqslant a \leqslant q - 1$,用仅当 $q = 1$ 时,才有 $a = 0$.用 $E_1 = E_1(A)$ 表示区间$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right)$中所有这样的 α 所组成的集合:对于这些 α,在它的表示式 ③ 中,$q \leqslant (\log N)^A$,这里 A 是一个固定的数,$3 \leqslant A \leqslant 15$;用 E_2 表示区间$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right)$中所有其余的 α 组成的集合.

引理 3 集合 E_1 是由两两不相交的区间所组成.

证明 对于给定的$(a,q) = 1$,$0 \leqslant a < q$,用 $E(a,q)$ 表示所有满足条件

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau},1 \leqslant q \leqslant \tau$$

的 α 的集合.显然,$E(a,q)$ 是属于$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right)$的区间.如果 $q \leqslant (\log N)^A$,$q_1 \leqslant (\log N)^A$,那么两个不同的区间 $E(a,q)$ 和 $E(a_1,q_1)$(即是使得 $(a - a_1)^2 + (q - q_1)^2 \neq 0$ 的两个区间)是不相交的.事实上,这两个区间的中心之间的距离为

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a_1}{q_1}\right| \geqslant \frac{1}{qq_1}$$

而它们的长度的一半的和为

$$\frac{1}{q\tau}+\frac{1}{q_1\tau}<\frac{1}{qq_1}$$

这就是所要求证的.

用 J_1 表示在集合 E_1 上的积分,J_2 表示在集合 E_2 上的积分,即

$$J_1=J_1(N)=\int_{E_1}S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha$$

$$J_2=J_2(N)=\int_{E_2}S^3(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha$$

我们就有

$$J=J_1+J_2$$

下面我们将经常利用不等式:$|e^{2\pi i\beta}-1|\ll|\beta|$,$\beta$ 是实数,而不作特别的说明.

定理 1 对于 $J_1=J_1(N)$ 有渐近公式

$$J_1=J_1(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right)$$

其中

$$\sigma(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)$$

证明 从 J_1 的定义及引理 3 知

$$J_1=\sum_{q\leqslant(\log N)^A}\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\(a,q)=1}}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}}S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i(\frac{a}{q}+z)N}dz$$

我们来把 $S\left(\frac{a}{q}+z\right)$ 改写为另一种形式,我们有

$$\pi(n;q,l)=\frac{\mathrm{Li}\ n}{\varphi(q)}+O(ne^{-c_1\sqrt{\log n}}),\sqrt{N}<n\leqslant N$$

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\sum_{\sqrt{N}<p\leqslant N}e^{2\pi i\frac{a}{q}p}e^{2\pi izp}+O(\sqrt{N})=$$

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{2\pi i\frac{a}{q}l}T(l)+O(\sqrt{N}) \qquad ④$$

其中

$$T(l)=\sum_{\substack{p\equiv l(\bmod q)\\\sqrt{N}<p\leqslant N}}e^{2\pi izp}=\sum_{\sqrt{N}<n\leqslant\sqrt{N}}(\pi(n;q,l)-\pi(n-1;q,l))e^{2\pi izn}=$$

$$\sum_{\sqrt{N}<n\leqslant N-1}\pi(n;q,l)(e^{2\pi izn}-e^{2\pi iz(n+1)})+\pi(N,q,l)e^{2\pi izN}+O(\sqrt{N})=$$

$$\sum_{\sqrt{N}<n\leqslant N-1}\frac{\mathrm{Li}\ n}{\varphi(q)}(e^{2\pi izn}-e^{2\pi iz(n+1)})+\frac{\mathrm{Li}\ N}{\varphi(q)}e^{2\pi izN}+$$

$$O(Ne^{-c_1\sqrt{\log N}})+O(N^2e^{-c_1\sqrt{\log N}}|z|)=$$

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\sqrt{N}<n\leqslant N}(\mathrm{Li}\ n-\mathrm{Li}(n-1))\mathrm{e}^{2\pi i z n}+$$
$$O(N\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{\log N}})=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{3\leqslant n\leqslant N}\left(\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}u}{\log u}\right)\mathrm{e}^{2\pi i z n}+$$
$$O(N\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{\log N}})$$

因为当 $n\geqslant 3$ 时,有

$$\frac{1}{\log u}=\frac{1}{\log n}+O\left(\frac{1}{n\log^2 n}\right),n-1\leqslant u\leqslant n$$

所以

$$T(l)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n=3}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i z n}}{\log n}+O(N\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{\log N}})$$

把所得的 $T(l)$ 的表达式代入式④有

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{n=3}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i z n}}{\log n}+O(N\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\log N}})=$$
$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}M(z)+O(N\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\log N}})$$

这里

$$M(z)=\sum_{n=3}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i z n}}{\log n}$$

进而

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}M^3(z)+O\left(\left|S\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2N\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\log N}}\right)+O(N^3\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\log N}})$$

$$J_1=\sum_{q\leqslant(\log N)^A}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\Big(\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\(a,q)=1}}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{a}{q}N}\Big)\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}}M^3(z)\mathrm{e}^{-2\pi i z N}\mathrm{d}z+$$
$$O(N^2\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\log N}})+O(N^2\mathrm{e}^{-c_3\sqrt{\log N}}\log^{40}N)\qquad⑤$$

我们来讨论上式中的积分.我们有

$$\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{+\frac{1}{q\tau}}M^3(z)\mathrm{e}^{-2\pi i z N}\mathrm{d}z=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}M^3(z)\mathrm{e}^{-2\pi i z N}\mathrm{d}z+R\qquad⑥$$

其中

$$|R|\ll\int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}}|M(z)|^3\mathrm{d}z$$

我们来估计 $|M(z)|,0<|z|\leqslant\frac{1}{2}$.由阿贝尔变换及几何数列求和得出

$$|M(z)|=\left|\sum_{n=3}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i z n}}{\log n}\right|\leqslant\left|\int_3^N\Big(\sum_{3\leqslant n\leqslant u}\mathrm{e}^{2\pi i z n}\Big)\frac{\mathrm{d}u}{u\log^2 u}+\frac{1}{\log N}\sum_{3\leqslant n\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi i z n}\right|\leqslant\frac{1}{|z|}$$

所以

$$|R| \ll \int_{\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^3} \ll q^2\tau^2 \leqslant N^2\log^{-10}N$$

将式⑥代入式⑤,得到

$$J_1 = I(N) \sum_{q \leqslant (\log N)^A} \gamma(q) + O(N^2\log^{-10}N)$$

其中

$$I(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} M^3(z)e^{-2\pi izN}dz$$

$$\gamma(q) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}$$

我们来讨论 $I(N)$.设

$$M_0(z) = \sum_{3 \leqslant n \leqslant N} \frac{e^{2\pi izn}}{\log N}$$

那么

$$I(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} M_0^3(z)e^{-2\pi izN}dz + R_1$$

其中

$$|R_1| < \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |M^3(z) - M_0^3(z)|dz \ll$$

$$\max_{|z| \leqslant \frac{1}{2}} |M(z) - M_0(z)| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|M(z)|^2 + |M_0(z)|^2)dz$$

其次

$$|M(z) - M_0(z)| \leqslant \sum_{3 \leqslant n \leqslant N}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N}\right) =$$

$$\int_3^N \frac{du}{\log u} - \frac{N}{\log N} + O(1) = O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |M(z)|^2dz = \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{\log^2 n} = \sum_{\sqrt{N} < n \leqslant N} \frac{1}{\log^2 n} +$$

$$O\sqrt{N} = O(\frac{N}{\log^2 N})$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |M_0(z)|^2dz = \frac{N-2}{\log^2 N}$$

所以

$$I(N) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} M_0^3(z)e^{-2\pi izN}dz + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) = \frac{I_0(N)}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right)$$

其中 $I_0(N)$ 是方程

$$n_1 + n_2 + n_3 = N$$
$$3 \leqslant n_1, n_2, n_3 \leqslant N - 6$$

的解数.

对固定的 $n_3, 3 \leqslant n_3 \leqslant N - 6$,方程

$$n_1 + n_2 = N - n_3$$
$$3 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N - 6$$

有 $N - n_3 - 5$ 个解,所以

$$I_0(N) = \sum_{n_3=3}^{N-6}(N - n_3 - 5) = \frac{N^2}{2} + O(N)$$

这样就得到

$$I(N) = \frac{N^2}{2\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right)$$
$$J_1 = \frac{N^2}{2\log^3 N}\sum_{q \leqslant (\log N)^A}\gamma(q) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right)$$

我们来讨论上式中的和.我们有

$$\sum_{q \leqslant (\log N)^A}\gamma(q) = \sigma(N) - \sum_{q > (\log N)^A}\gamma(q)$$

其中

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\gamma(q)$$

及

$$\left|\sum_{q > (\log N)^A}\gamma(q)\right| \leqslant \sum_{q > (\log N)^A}\frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \sum_{q > (\log N)^3}\frac{(\log\log q)^2}{q^2} \ll \frac{1}{\log N}$$

因而

$$J_1 = \frac{N^2}{2\log^3 N}\sigma(N) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right)$$

级数 $\sigma(N)$ 具有简单的结构.设$(q_1, q_2) = 1, q = q_1q_2$,若 a_1 和 a_2 分别遍历模 q_1 和 q_2 的简化剩余系,则 $a_1q_2 + a_2q_1$ 就遍历模 q 的简化剩余系.所以

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} = \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi i\frac{a_1}{q_1}N}\sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi i\frac{a_2}{q_2}N}$$

由此推知,级数 $\sigma(N)$ 的项 $\gamma(q)$ 是可乘的.由于自然数的素因子分解式的唯一性及上面已得到的估计,我们有

$$\prod_{p \leqslant X}(1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \cdots) = \sum_{q \leqslant X}\gamma(q) + O\left(\frac{1}{\log X}\right)$$

取极限 $X \to +\infty$，得到

$$\sigma(N) = \prod_p (1 + \gamma(p) + \gamma(p^2) + \cdots)$$

从 $\gamma(q)$ 的定义可得到

$$\gamma(p) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)^2}, p \mid N \\ \dfrac{1}{(p-1)^3}, \quad p \nmid N \end{cases}$$

$$\gamma(p^r) = 0, r \geq 2$$

这样就有

$$\sigma(N) = \prod_{p \mid N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p \nmid N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) =$$

$$\prod_p\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p \mid N}\left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right)$$

这就是所要证明的.

附注

(1) 在所证明的定理中的大 O 常数是非实效的.

(2) 下面(见 3.3) 我们将对 J_1 得到一个具有实效大于 O 常数的渐近公式.

(3) 对奇数 N，由显然的不等式

$$\prod_{p \mid N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_p\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$$

$$\prod_{p \nmid N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) > 2$$

得到

$$\sigma(N) > 1$$

(至此附注结束)

为了得到 $J = J(N)$ 的渐近公式，我们必须估计 J_2，而为此就需要估计 $|S(\alpha)|$，α 属于集合 E_2.

3.2 素变数的线性三角和

我们来证明维诺格拉多夫的关于素变数的线性三角和估计的定理. 表奇数 N 为三个素数之和的表法个数的渐近公式就是这一定理和定理 1 的推论.

定理 2 设

$$H = e^{0.5\sqrt{\log N}}, \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$$

$$(a, q) = 1, |\theta| \leq 1, 1 < q \leq N$$

$$S = S(\alpha) = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$$

那么

$$S \ll N(\log N)^3 \triangle$$

其中

$$\triangle = \frac{1}{H} + \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}$$

证明 取

$$P = \prod_{p \leqslant \sqrt{N}} p$$

利用麦比乌斯函数的性质,得到

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,P)=1}}^{N} e^{2\pi i a n} = \sum_{d \mid p} \mu(d) S_d$$

$$S_d = \sum_{0 < m \leqslant Nd^{-1}} e^{2\pi i a m d}$$

由此推得

$$S = S^{(0)} - S^{(1)} + O(\sqrt{N})$$

这里

$$S^{(0)} = \sum_{d_0 m \leqslant N} \sum e^{-2\pi i a m d_0}, \mu(d_0) = +1$$

$$S^{(1)} = \sum_{d_1 m \leqslant N} \sum e^{2\pi i a m d_1}, \mu(d_1) = -1$$

和 $S^{(0)}$ 及 $S^{(1)}$ 可同样估计.我们来估计 $S^{(0)}$.把区间 $0 < m \leqslant N$ 分为远小于 $\log N$ 个这样形式的小区间:$M < m \leqslant M'$,$M' \leqslant 2M$,并考虑和

$$S(M) = \sum_{\substack{md_0 \leqslant N \\ M < m \leqslant M'}} \sum e^{2\pi i a m d_0}$$

若 $M \geqslant H$,则可得

$$S(M) = \sum_{d_0 \leqslant NM^{-1}} \sum_{M < m \leqslant \min\left(M', \frac{N}{d_0}\right)} e^{2\pi i a m d_0} \ll \sum_{d_0 \leqslant NM^{-1}} \min\left(\frac{N}{d_0}, \frac{1}{(\alpha d_0)}\right) \leqslant$$

$$\sum_{n \leqslant NM^{-1}} \min\left(\frac{N}{n}, \frac{1}{(\alpha n)}\right) \leqslant \sum_{0 < n \leqslant 0.5q} + \sum_{0.5q < n \leqslant 1.5q} + \cdots + \sum_{(r-0.5)q < n \leqslant (r+0.5)q} \qquad ⑦$$

其中 $r \leqslant NM^{-1}q^{-1}$.设 k 是 $an(1 \leqslant n \leqslant 0.5q)$ 对模 q 的最小非负剩余,则

$$(an) = \left(\frac{an}{q} + \frac{\theta n}{q^2}\right) = \left(\frac{k + 0.5\theta_1}{q}\right), \ |\theta_1| \leqslant 1$$

令

$$u = \begin{cases} k, & k \leqslant 0.5q \\ q - k, & k > 0.5q \end{cases}$$

就得到

$$(\alpha n) \geqslant \frac{u-0.5}{q}, 1 \leqslant n \leqslant 0.5q$$

所以式 ⑦ 中的第一项小于等于

$$q \sum_{0<n\leqslant 0.5q} \frac{1}{u-0.5} \ll q\log q$$

而对于式 ⑦ 中其余的项，我们就得到

$$S(M) \ll q\log q + \sum_{l=1}^{r}\left(\frac{N}{(l-0.5)q} + q\log q\right) \ll$$

$$q\log q + Nq^{-1}\log N + NM^{-1}\log q \ll$$

$$N(\log N)\left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + \frac{1}{H}\right) \qquad ⑧$$

现在设 $M < H$. 把和 $S(M)$ 表为

$$S(M) = \sum_{M<m\leqslant M} \sum_{d_0\leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi i a m d_0}$$

用字母 δ_k 来表示每一个恰好有 k 个大于 H^2 的素因子的 d_0. 对所有的 $d_0 \leqslant N$，设 k_0 是 k 的最大值，则 $2^{k_0} \leqslant N$，即 $k_0 \ll \log N$. 这样，我们有

$$S(M) = \sum_{k=0}^{k_0} S_k(M)$$

$$S_k(M) = \sum_{M<m\leqslant M} \sum_{\delta_k\leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi i a m \delta_k}$$

我们来估计 $S_0(M)$. 设 k 是 δ_0 的素因子个数，$\delta_0 > NM^{-1}H^{-1}$，则有

$$H^{2k} > NH^{-2}, (2k+2)0.5\sqrt{\log N} > \log N$$

$$k > \sqrt{\log N} - 1, \tau(\delta_0) > 2^{\sqrt{\log N}-1}$$

利用显然的不等式

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n) = \sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right] \ll x\log x$$

就得到

$$S_0(M) \ll \sum_{M<m\leqslant M}\left(\sum_{\delta_0\leqslant NM^{-1}H^{-1}} 1 + \sum_{NM^{-1}H^{-1}<\delta_0\leqslant Nm^{-1}} \frac{\tau(\delta_0)}{2^{\sqrt{\log N}}}\right) \ll$$

$$M\left(\frac{N}{MH} + \frac{N\log N}{M\cdot 2^{\sqrt{\log N}}}\right) \ll \frac{N}{H}$$

下面来估计 $S_k(M)$，$k > 0$. 把 $S_k(M)$ 与和

$$T_k = \sum_{M<m\leqslant M} \sum_{pt\leqslant Nm^{-1}} e^{2\pi i a m p t}$$

相比较，其中 p 遍历区间 $H^2 < p \leqslant \sqrt{N}$ 中的素数，而 t 遍历那些恰好有 $k-1$ 个

大于 H^2 的素因子的 d_1. 设 $k>1$. 和 T_k 中使 $(p,t)=p$ 的项数远远小于

$$\sum_{M<m\leqslant M'}\sum_{H^2<p\leqslant\sqrt{N}}\frac{NM^{-1}}{p^2}\ll\frac{N}{H}$$

而和 T_k 中其它的项同和 $S_k(M)$ 中的项是一样的，但和 $S_k(M)$ 中的每一项在 T_k 中恰好出现 k 次. 所以

$$S_k(M)=\frac{1}{k}T_k+O\left(\frac{N}{kH}\right)$$

这一等式当 $k=1$ 时亦成立. 我们来估计 T_k. 记 $mp=u$，把区间

$$MH^2<u\leqslant M'\sqrt{N}$$

分为远小于 $\log N$ 个小区间

$$U<u\leqslant U',U<U'\leqslant 2U$$

并设

$$T_k(U)=\sum_{U<u\leqslant U'}{}'\sum_{ut\leqslant N}e^{2\pi i\alpha ut}$$

得到

$$|T_k(U)|^2\leqslant U\sum_{u=U+1}^{2U}\left|\sum_{ut\leqslant N}e^{2\pi i\alpha ut}\right|^2=U\sum_{t_1\leqslant NU^{-1}}\sum_{t_2\leqslant NU^{-1}}\sum_{U<u\leqslant\min\left(2U,\frac{N}{t_1},\frac{N}{t_2}\right)}e^{2\pi i\alpha u(t_1-t_2)}\ll$$

$$U\sum_{t_1\leqslant NU^{-1}}\sum_{t_2\leqslant NU^{-1}}\min\left(U,\frac{1}{(\alpha(t_1-t_2))}\right)\ll$$

$$U\frac{N}{U}\left(\frac{N}{U_q}+1\right)(U+q\log q)\ll N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{U}{N}+\frac{1}{U}+\frac{q}{N}\right)\log N\ll$$

$$N^2\left(\frac{1}{q}+\frac{q}{N}+\frac{1}{H^2}\right)\log N$$

$$|T_k(U)|\ll N\sqrt{\log N}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right)$$

$$|T_k|\ll N(\log N)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right)$$

由此及式 ⑧ 推得

$$S(M)\ll|S_0(M)|+\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}|T_k|+\frac{N}{kH}\right)\ll$$

$$N(\log N)^{\frac{3}{2}}(\log\log N)\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right)$$

$$S\ll N(\log N)^3\left(\frac{1}{H}+\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}\right)$$

这正是所要证明的.

定理 3 对于表奇数 N 为三个素数之和的表法个数 $J(N)$，有渐近公式

$$J(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right)$$

$$\sigma(N)=\prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{p^3-3p+3}\right)>1 \qquad ⑨$$

证明 从引理 1,3 及定理 1(取 $A=15$),得到

$$J(N)=J_1(N)+J_2(N)=\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3}+J_2(N)+O\left(\frac{N^2}{(\log N)^4}\right)$$

其中

$$J_2(N)=\int_{E_2}S^3(\alpha)\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha N}\mathrm{d}\alpha$$

根据集合 E_2 的定义,对 $\alpha\in E_2$,有等式

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},(a,q)=1$$

$$|\theta|\leqslant 1,(\log N)^{15}<q<N(\log N)^{-20}$$

由定理 2 知

$$S(\alpha)\leqslant N(\log N)^{-4},\alpha\in E_2$$

所以

$$J_2(N)\ll\max_{\alpha\in E_2}|S(\alpha)|\int_0^1|S(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha\ll N^2(\log N)^{-5}$$

由此即得定理的结论.

推论(哥德巴赫问题) 存在常数 N_0,使得每一个奇数 $N>N_0$ 都是三个素数之和.

由定理 1 的附注知,公式⑨中的大 O 常数是非实效的,所以常数 N_0 亦是非实效的.在下一节将得到 $J(N)$ 的实效的渐近公式,因而,推论中的常数 N_0 就亦是实效的.

3.3 实效定理

首先,我们要对逼近 α 的有理数的分母是小的情形,得到素变数三角和 $S(\alpha)$ 的一个非显然估计.

引理 4 设 $\varepsilon_0>0$ 是充分小的常数

$$\tau\geqslant N\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}},N_1\geqslant N\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}}$$

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,(a,q)=1,0<q\leqslant\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\sqrt{\log N}},|z|\leqslant\frac{1}{q\tau}$$

那么,有

$$S(\alpha)=\sum_{N-N_1<p\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi i\alpha p}\ll\frac{N_1\log\log q}{\sqrt{q}\log N}$$

证明

$$\pi(n;q,l) = \frac{\text{Li } n}{\varphi(q)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^n \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}\mathrm{d}u + O(n\mathrm{e}^{-c'\sqrt{\log n}}), \sqrt{N} \leqslant n \leqslant N$$

所以,重复定理 1 的证明的第一部分,即对 $S\left(\frac{a}{q}+z\right)$ 的讨论,我们有

$$S(\alpha) = S\left(\frac{a}{q}+z\right) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q} T(l)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{a}{q}l} + O(\sqrt{N})$$

$$T(l) = \sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N} (t(n)-t(n-1))\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}zn} + O(N\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log N}}) + O(N^2\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log N}}\mid z\mid)$$

其中

$$t(n) = \frac{\text{Li } n}{\varphi(q)} - E_1 \frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^n \frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}\mathrm{d}u$$

因此

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}\left(\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}u}{\log u}\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}zn} - \frac{E_1}{\varphi(q)}\left(\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{a}{q}l}\right)\sum_{N-N_1\leqslant n\leqslant N}\left(\int_{n-1}^{n}\frac{u^{\beta_1-1}}{\log u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}zn} + O(qN\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log N}}) + O(qN^2\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log N}}\mid z\mid) \quad ⑩$$

因为 χ_1 是模 q 的某一个实特征,所以

$$\left|\sum_{l\leqslant 1}^{q}\chi_1(l)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{a}{q}l}\right|^2 = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{m=1 \\ (m,q)=1}}^{q}\left|\sum_{l=1}^{q}\chi_1(l)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{m}{q}l}\right|^2 \leqslant \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{m=1}^{q}\sum_{\substack{l=1 \\ (l,q)=1}}^{q}\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{q}\chi_1(l)\chi_1(n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{m}{q}(l-n)} \leqslant q$$

由此及式 ⑩ 得到

$$S(\alpha) \ll \frac{\text{Li } N - \text{Li}(N-N_1)}{\varphi(q)} + \frac{\sqrt{q}(\text{Li } N - \text{Li}(N-N_1))}{\varphi(q)} + qN\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log N}} + qN^2\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log N}}\mid z\mid \ll \frac{N_1}{\log N}\cdot\frac{\log\log q}{\sqrt{q}}$$

这即是要证明的.

定理 4 对于表奇数 N 为三个素数之和的表法个数 $J(N)$,有渐近公式

$$J(N) = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N_2}{(\log N)^{3,4}}\right)$$

其中

$$\sigma(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right)$$

及大 O 常数是实效的.

证明 取 $\tau = N(\log N)^{-20}$,由引理 2 知,对于 $\alpha \in \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right)$ 有

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, 1 \leqslant q \leqslant \tau, (a, q) = 1, |z| \leqslant \frac{1}{q\tau} \qquad ⑪$$

用 E_1 表示这样的 α 的集合,对于它有 $q \leqslant (\log N)^3$,而用 E_2 表示其余的 α 的集合.由引理 3 知,集合 E_1 由两两不相交的区间组成.同以前一样,设

$$J = J_1 + J_2$$

其中

$$J_1 = \int_{E_1} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, J_2 = \int_{E_2} S^3(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha$$

估计 J_2.若在表示式 ⑪ 中

$$q \geqslant (\log N)^{20}$$

则由定理 2 得到

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-7}$$

若$(\log N)^3 < q \leqslant (\log N)^{20}$,则由引理 4 得到

$$S(\alpha) \ll N(\log N)^{-2.5}(\log \log N)$$

所以

$$J_2 \ll \max_{\alpha \in E_2} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll N^2(\log N)^{-3.5}(\log \log N)$$

现在来计算 J_1.首先,考虑所有不超过 y 的 q 的集合

$$y = e^{\frac{\log N}{(\log \log N)^2}}$$

根据第九章定理 6 的推论 3,当$\sqrt{N} \leqslant x \leqslant N$ 时,可能除去一些“例外”模 q(这些 q 一定是某一个q_0的倍数,$q_0 \geqslant c\log^2 y(\log \log y)^{-8} \geqslant c\log^2 N(\log \log N)^{-12}$)外,对所有其余的 q 有渐近公式

$$\pi(x; q, l) = \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(q)} + O(x e^{-c_1(\log \log x)^2})$$

把积分 J_1 表为两个积分的和

$$J_1 = J'_1 + J''_1$$

这里,J'_1 是在这样的 α 上的积分:在这些 α 的表示式 ⑪ 中,$q \leqslant (\log N)^3$ 且 q 不是“例外”模;而 J''_1 是在这样的 α 上的积分:在这些 α 的表示式 ⑪ 中,$q \leqslant (\log N)^3$ 且 q 属于“例外”模的集合.对于非例外模,重复定理 1 的证明,可得到

$$J'_1 = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q \leqslant (\log N)^3}{}' \gamma(q) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) \qquad ⑫$$

其中求和号是表示对非例外模求和

$$\gamma(q)=\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N}$$

估计 J'_1.取 $D=(\log N)^{30}, A=ND^{-1}$.那么,有

$$S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\sum_{s=1}^{D}\sum_{(s-1)A<p\leq sA}e^{2\pi i(\frac{a}{q}+z)p}=$$

$$\sum_{s=1}^{D}\sum_{(s-1)A<p\leq sA}e^{2\pi i\frac{a}{q}p}\cdot e^{2\pi izsA}+O(|z|AN)=$$

$$\sum_{s=1}^{D}e^{2\pi izsA}\sum_{(s-1)A<p\leq sA}e^{2\pi i\frac{a}{q}p}+O(Nq^{-1}(\log N)^{-10})$$

由此得到

$$S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}=\sum_{s_1,s_2,s_3=1}^{D}e^{2\pi izR(s_1+s_2+s_3-D)}W(s_1,s_2,s_3)+$$

$$O\left(\left|S\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2Nq^{-1}(\log N)^{-10}\right)+$$

$$O(N^3q^{-3}(\log N)^{-30})$$

其中

$$W(s_1,s_2,s_3)=\sum_{(s_1-1)A<p_1\leq s_1A}\ \sum_{(s_2-1)A<p_2\leq s_2A}\ \sum_{(s_3-1)A<p_3\leq s_3A}\times e^{2\pi i\frac{a}{q}(p_1+p_2+p_3-N)}$$

这样,对 J'_1 就得到估计

$$J'_1\ll\sum_{q\leq(\log N)^3}{}''\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left(\frac{1}{q\tau}\sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=1\\s_1+s_2+s_3=D}}^{D}|W(s_1,s_2,s_3)|+\right.$$

$$\left.\sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=1\\s_1+s_2+s_3\neq D}}^{D}\frac{1}{|s_1+s_2+s_3-D|A}|W(s_1,s_2,s_3)|\right)+N^2(\log N)^{-10}$$

应用引理 4 估计 $|W(s_1,s_2,s_3)|$,得到

$$|W(s_1,s_2,s_3)|\ll\left(\frac{A\log\log N}{\sqrt{q}\log N}\right)^3$$

其次,方程

$$s_1+s_2+s_3-D=\lambda,\lambda\ll D$$

的解数不超过 D^2.

所以

$$J'_1\ll\sum_{q\leq(\log N)^3}{}''\left(\frac{1}{\tau}D^2\frac{A^3(\log\log N)^3}{q^{3/2}(\log N)^3}+\frac{q}{A}D^2\frac{A^3(\log\log N)^4}{q^{3/2}(\log N)^3}\right)+$$

$$N^2(\log N)^{-10}\ll N^2(\log N)^{-10}+\frac{N^2(\log\log N)^4}{(\log N)^3}\sum_{q\leq(\log N)^3}{}''\frac{1}{\sqrt{q}}$$

而且，这里的求和号是表示对“例外”模求和. 所以

$$\sum_{q\leqslant(\log N)^3}{}'' \frac{1}{\sqrt{q}} \ll \frac{1}{\sqrt{q_0}} \sum_{m\leqslant(\log N)(\log\log N)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{m}} \ll$$

$$\frac{1}{\sqrt{q_0}} \sqrt{\log N}(\log\log N)^6 \ll \frac{(\log\log N)^{12}}{\sqrt{\log N}}$$

最后得到

$$J'_1 \ll \frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}} \tag{13}$$

从 $\gamma(q)$ 及“例外”模 q 的定义可推得

$$\sum_{q\leqslant(\log N)^3}{}'' \gamma(q) \ll \sum_{q\leqslant(\log N)^3}{}'' \frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \sum_{q\leqslant(\log N)^3}{}'' \frac{(\log\log q)^2}{q^2} \ll$$

$$q_0^{-2}(\log\log\log N)^2 \ll (\log N)^{-4}(\log\log N)^{25}$$

从这一估计及式 ⑬ 得到

$$J''_1 = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q\leqslant(\log N)^3}{}'' \gamma(q) + O\left(\frac{N^2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}\right)$$

把所得的 J''_1 的这一表达式和式 ⑫ 合在一起，就得到了 J_1 的渐近公式，因而也就得到了 J 的渐近公式

$$J_1 = \frac{N^2}{2(\log N)^3} \sum_{q\leqslant(\log N)^3} \gamma(q) + O\left(\frac{N_2(\log\log N)^{16}}{(\log N)^{3.5}}\right) =$$

$$\sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right)$$

$$J = \sigma(N)\frac{N^2}{2(\log N)^3} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right)$$

这就是所要求证的.

3.4 问题

(1)(Н.Г.Чудаков). 设 $K(X)$ 为不超过 X 且不能表为两个素数之和的偶数的个数. 证明：对任意固定的 $A > 0$，有

$$K(X) = O\left(\frac{X}{\ln^A X}\right)$$

(2) 对固定的自然数 n, m, k，求方程 $np_1 + mp_2 + kp_3 = N$ 的解数的渐近公式，p_1, p_2, p_3 是素数.

(3)(А.И.Виноградов). 设 $ab_1 - a_1 b \neq 0$, a, a_1, b, b_1, c, c_1 是整数；那么，平面上形如 $(ax + by + c, a_1 x + b_1 y + c_1)$①的整点集合中有无穷多对素数 $(p_1,$

① 这里显然应该假定 $(a,b,c) = (a_1,b_1,c_1) = 1$. —— 译者注

p_2)(关于数列 $ax+b$ 中的素数定理的推广).(应用圆法)

(4)(И.М.Виноградов)设 p 是素数,$(k,p)=1$,q 是素数.那么,存在绝对常数 $\gamma>0$,使得

$$\left|\sum_{q<p^{\gamma}}\left(\frac{q+k}{p}\right)\right|\leqslant cp^{\gamma-\delta},\delta=\delta(\gamma)>0$$

由此,对于尽可能小的 γ,推出在"平移素数序列"$q+k,q<p^{r}$ 中的平方剩余和非剩余的分布定理.

(5)设 p 是素数,试讨论在形如 $\mu(n)n+k,(k,p)=1$ 的序列中,模 p 的平方剩余和非剩余的分布(参看问题4).

平均密度定理

(А.И.Виноградов—E.Bombieri—H.L.Montgomery)

(6)设 χ 是模 k 的原特征,$k\leqslant Q$,则对任意的 a_n 有

$$\sum_{k\leqslant Q}\sum_{\chi\bmod k}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\leqslant c(Q^2+N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

(7)设 $\mathrm{Re}\,s_\chi=\sigma_\chi\geqslant0,\mathrm{Im}\,s_\chi=t_\chi,A\leqslant t_\chi\leqslant A+1$;则在问题(6)的条件下,有

$$\sum_{k\leqslant Q}\sum_{\chi\bmod k}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)n^{-s_\chi}\right|^2\leqslant c(Q^2+N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

(8)设 $N(\alpha,T,\chi)$ 是 $L(s,\chi)$ 在区域:$\mathrm{Re}\,s\geqslant\alpha$,$|\mathrm{Im}\,s|\leqslant T$ 中的零点个数,那么,对于 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant1,T\geqslant2,Q\geqslant1$,在问题(6)的条件下有

$$\sum_{k\leqslant Q}\sum_{\chi\bmod k}N(\alpha,T,\chi)\leqslant cT(Q^2+QT)^{\frac{4(1-\alpha)}{3-2\alpha}}\log^{10}(Q+T)$$

为此,证明:

①$N(\alpha,T+1,\chi)-N(\alpha,T,\chi)\leqslant c_1\log TQ$;

② 当 $\mathrm{Re}s=\sigma>0,Z\geqslant k(|t|+1)$ 时

$$L(s,\chi)=\sum_{n\leqslant Z}\frac{\chi(n)}{n^s}+O(kZ^{-\sigma})$$

③ 设 $M_X(s,\chi)=\sum_{n\leqslant X}\mu(n)\chi(n)n^{-s}$,用它乘以 $L(s,\chi)$,由此来证明:当 $s=\rho,L(\rho,\chi)=0$ 时,以下的不等式必有一个成立.

$$1\leqslant c_2\left|\sum_{X<n\leqslant X^2}a(n)\chi(n)n^{-\rho}\right|^4$$

$$1\leqslant c_2\left|\sum_{X^2<n\leqslant XY}a(n)\chi(n)n^{-\rho}\right|^2$$

$$1\leqslant c_2\left|\sum_{n\leqslant X}\mu(n)\chi(n)n^{-\rho}\right|^{4/3}\left|\sum_{Y<n\leqslant Z}\chi(n)n^{-\rho}\right|^{4/3}$$

$$1 \leqslant c_2 k^2 Z^{-2\sigma} \left| \sum_{n \leqslant X} \mu(n)\chi(n)n^{-\rho} \right|^2$$

这里

$$L(s,\chi)M_X(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\chi(n)n^{-s}, s > 1$$

④ 在 ③ 中令 $X = B^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3-2\alpha}}, Y = B^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3-2\alpha}}$,有

$$Z = \begin{cases} B, & \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{3}{4} \\ Y, & \frac{3}{4} \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

$$B = \max(Q^2, QT)$$

赫尔德(Hölder, Otto Ludwig, 1859—1937),德国数学家.生于斯图加特,卒于莱比锡.

把 ③ 中的不等式先对所有的 $\rho = \rho_\chi(\mathrm{Re}\,\rho_\chi \geqslant \alpha, |\mathrm{Im}\,\rho_\chi| \leqslant T)$ 相加,再对所有的 χ(χ 是模 k 的原特征)相加,最后,对所有的 $k(k \leqslant Q)$ 相加,并应用问题(7),对第三个不等式要先应用赫尔德不等式

$$\sum |a|^{4/3}|b|^{4/3} \leqslant \left(\sum |a|^2\right)^{2/3}\left(\sum |b|^4\right)^{1/3}$$

(9) 对任意的 $A > 0$ 可找到 $B = B(A) > 0$,使得:

① $$\sum_{k \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left| \psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)} \right| \leqslant c\frac{x}{(\ln x)^A}$$

其中 $c > 0$ 实际上是不能计算出来的.

② 证明存在常数 $B > 0$,使得

$$\sum_{k \leqslant \sqrt{x}(\ln x)^{-B}} \max_{(l,k)=1} \left| \psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)} \right| \leqslant c_2\frac{x}{(\ln x)^{2-\varepsilon}}$$

其中 $c_2 > 0$ 是可以实际计算的常数.

Titchmarsh 除数问题和素数问题(Ю. В. Линник)

(10) 设 P 是正整数;z 取整数值 $z_1, z_2, \cdots, z_n$;函数 $f(z) \geqslant 0$;再设 S' 表示函数 $f(z)$ 在与 P 互素的那些 z 上的值的和,S_d 表示函数 $f(z)$ 在为 d 的倍数的那些 z 上的值的和.那么,对于偶数 $m > 0$,有

$$S' \leqslant \sum_{\substack{d|P \\ \Omega(d) \leqslant m}} \mu(d)S_d$$

(11)① 设 $k \leqslant x^{\frac{9}{10}}, \ln b = \frac{\ln x}{1\,000 \ln\ln x}; 0 \leqslant l < k, (l,k) = 1$.那么,对于数列 $kn + l, n = 0,1,2,\cdots$,中不能被小于等于 b 的素数整除且不超过 x 的数的个数 T,有估计

$$T \leqslant c\frac{x}{\varphi(k)}\frac{\ln\ln x}{\ln x}$$

② 设 $0 < \alpha < 1, k \leqslant x^{\alpha}, x \geqslant x_0 > 0$,则

$$\pi(x;k,l) \leqslant c\frac{x}{\varphi(k)}\frac{\ln\ln x}{\ln x}$$

(12) 证明

$$\sigma(x) = \sum_{p\leqslant x}\tau(p-1) = c_0x + O\left(\frac{x(\ln\ln x)^3}{\ln x}\right)$$

$$\left(\sigma(x) = 2\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\pi(x;k,l) + O\left(\sum_{\substack{p=n,m\leqslant x\\ n\leqslant\sqrt{x},m\leqslant\sqrt{x}}}1\right)\right)$$

把对 k 求和的和式分为两部分：当 $k\leqslant\sqrt{x}(\ln x)^{-B}$ 时，利用问题(9)；当$\sqrt{x}\geqslant k>\sqrt{x}(\ln x)^{-B}$ 时，利用问题(11).

4 哥德巴赫猜想[1]

——潘承洞

1742 年哥德巴赫在和欧拉的几次通信中，提出了这样两个推测：

(A) 每个不小于 6 的偶数是两个奇素数之和；

(B) 每个不小于 9 的奇数是三个奇素数之和.

这就是至今仍未解决的著名的哥德巴赫猜想. 目前所得到的最好结果是：

(1)1937 年，维诺格拉多夫利用圆法和他创造的线性素变数三角和估计方法，证明了：存在正常数 c_1，使得每个大于 c_1 的奇数是三个奇素数之和. 这就基本上解决了猜想(B)[2]，这一结果通常称为哥德巴赫-维诺格拉多夫定理或三素数定理. 因而，现在说到哥德巴赫猜想，总是指猜想(A).

(2)1966 年，陈景润利用筛法证明了：存在一个正常数 c_2，使得每个大于 c_2 的偶数都是一个素数和一个不超过两个素数的乘积之和. 这一结果通常称为陈景润定理.

本节的主要目的是证明三素数定理. 我们将给出两个证明：一个是非实效的，即不能具体定出其中的常数 c_1(见 4.2)；另一个是实效的，即可以具体定出常数 c_1，但证明要复杂些(见 4.3). 此外，利用维诺格拉多夫证明三素数定理的思想，立即可以推出：几乎所有的偶数都是两个奇素数之和. 这表明对几乎所有的偶数猜想(A) 是正确的. 在 4.1 中我们将讨论哥德巴赫问题中的圆法.

---

① 摘自：潘承洞，潘承彪. 解析数论. 北京：科学出版社，1990 年.

② 已经证明，可取 $c_1=\exp(e^{16.038})$，这是一个比 10 的 400 万次方还要大的数目！目前尚无法验证所有小于 c_1 的奇数都是三个奇素数之和. 王天泽和陈景润进一步把 16.038 改进为 11.503.

4.1 哥德巴赫问题中的圆法

在 1920 年前后，哈代、拉马努金和李特伍德提出和系统地发展了近代解析数论的一个十分强有力的新的分析方法，在许多著名问题：如整数分拆、平方和问题①、华林问题，以及本节讨论的哥德巴赫问题上，得到了重要的结果（有些是条件结果）. 这一方法通常称为哈代 - 李特伍德 - 华林圆法，后来在某些问题（包括哥德巴赫问题和华林问题）中，维诺格拉多夫用有限三角和来代替他方法中原来用的母函数（无穷幂级数），对圆法作了重大改进，使得三角和（即指数和）估计方法在解析数论中得到了更为广泛和有成果的应用. 下面来讨论圆法是如何应用于哥德巴赫问题的.

设 N 是正整数，以 $D(N)$，$T(N)$ 分别表素变数不定方程

$$N = p_1 + p_2, p_1 \geqslant 3, p_2 \geqslant 3 \qquad ①$$

$$N = p_1 + p_2 + p_3, p_1 \geqslant 3, p_2 \geqslant 3, p_3 \geqslant 3 \qquad ②$$

的解数. 容易看出

$$D(N) = \int_0^1 S^2(\alpha, N)\mathrm{e}(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha \qquad ③$$

$$T(N) = \int_0^1 S^3(\alpha, N)\mathrm{e}(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha \qquad ④$$

其中

$$S(\alpha, x) = \sum_{2<p\leqslant x} \mathrm{e}(\alpha p) \qquad ⑤$$

这样，猜想(A) 和(B) 就分别是要证明

$$D(N) > 0, 2 \mid N \geqslant 6 \qquad ⑥$$

$$T(N) > 0, 2 \nmid N \geqslant 9 \qquad ⑦$$

这样，哥德巴赫猜想就转化为讨论式③和式④的积分了. 由于被积函数都以 1 为周期，因此积分区间可取为任一长度为 1 的区间. 简单说来，圆法的思想是认为：对充分大的 N，当 α 和分母“较小”的既约分数“较近”时，三角和 $S(\alpha, N)$ 就取“较大”的值，而当 α 和分母“较大”的既约分数“较近”时，三角和 $S(\alpha, N)$ 就取“较小”的值；因而式③和④中的积分的主要部分应该是在那些以分母“较小”的既约分数为中心的一些“小区间”上，这里的“小”，“大”，“近”的具体含义（当然是和 N 有关的）将在下面作进一步的具体解释. 因此，实现圆法的第一步就是要具体地确定这些“小区间”，这就是通常所说的法雷分割，即利用法恩分数来构造这些“小区间”，在哥德巴赫问题中的法里分割是这样的：设 Q，τ 是两个正数（和 N 有关），满足

---

① 见 E. Grosswald, Representations of Integers as Sums of Squans. Ch. 12, Springer-Verlag, 1985.

$$1 \leqslant Q < \frac{\tau}{2} \quad ⑧$$

考虑 Q 阶法雷数列，即$[0,1)$ 区间中的所有分母不超过 Q 的既约分数

$$\frac{h}{q},(h,q)=1,0 \leqslant h < q \leqslant Q \quad ⑨$$

以及相应于它们的一组小区间

$$I(q,h)=\left[\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau},\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}\right]^{①},(h,q)=1,0 \leqslant h < q \leqslant Q \quad ⑩$$

这些小区间都在区间$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$中．再设

$$E_1=\bigcup_{1 \leqslant q \leqslant Q} \bigcup_{\substack{0 \leqslant h < q \\ (h,q)=1}} I(q,h) \quad ⑪$$

及

$$E_2=\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]-E_1 \quad ⑫$$

对式 ⑨ 中任意两个不同的分数 $h_1/q_1,h_2/q_2$ 有

$$\left|\frac{h_1}{q_1}-\frac{h_2}{q_2}\right| \geqslant \frac{1}{q_1 q_2} \geqslant \frac{1}{Q^2} \quad ⑬$$

所以，当

$$2Q^2 < \tau \quad ⑭$$

时，式⑩给出的这组小区间是两两不相交的．这样，当条件⑭成立时，就把区间$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$分成了$E_1$和$E_2$两部分，$E_1$就是我们所要确定的那些"小区间"．通常把 E_1 称为基本区间或优弧，把 E_2 称为余区间或劣弧．$[0,1]$[②]区间的这种分割方法就称为法雷分割．显然，这种分割是和 Q,τ 的取法有关的．在这种分割下前面所说的"较小"，"较大"，"较近"就有如下的含意．当点 $\alpha \in E_1$ 时，它就和一个分母小于等于 Q（这就是"较小"的含意）的既约分数相距小于等于$\frac{1}{\tau}$（这就是"较近"的含意）．而下面的引理将证明：当 $\alpha \in E_2$ 时，它就和一个分母大于 Q（这就是"较大"的含意）的既约分数"较近"．

引理 1　对任一 $\alpha \in E_2$，一定存在两个正整数 q,h，满足条件

$$(h,q)=1,Q < q \leqslant \tau \quad ⑮$$

使得

---

① 有时候可取小区间为$[h/q-1/q\tau,h/q+1/q\tau]$，这时当条件⑧满足时这组小区间就两两不相交．

② 由于被积函数的周期为1，所以点0和1，区间$[0,1]$和$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$是可看做相同的，这样就可使得以下的讨论简单些．

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| < \frac{1}{q\tau} \qquad ⑯$$

证明　在引理19.3.5[①]中取 $\chi = \alpha, y = \tau$,则必有整数 q, h 满足 $(h,q) = 1, 1 \leqslant q \leqslant \tau$,使得

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| < \frac{1}{q^\tau}$$

当 $\alpha \in E_2$ 时,$\alpha > \frac{1}{\tau}$,所以 h 必为正整数.若 $q \leqslant Q$,则由上式及 E_1 的定义知 $\alpha \in E_1$,这和假设矛盾.故必有 $q > Q$,这就证明了所要的结论.

当条件 ⑭ 成立时,相应于所作的分割有

$$D(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha, N)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha = D_1(N) + D_2(N) \qquad ⑰$$

其中

$$D_i(N) = \int_{E_i} S^2(\alpha, N)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha, i = 1,2 \qquad ⑱$$

以及

$$T(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha = T_1(N) + T_2(N) \qquad ⑲$$

其中

$$T_i(N) = \int_{E_i} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha, i = 1,2 \qquad ⑳$$

对于适当选取的和 N 有关的 Q, τ,利用算术数列中的素数定理,很容易得到 $D_1(N)$ 和 $T_1(N)$ 的渐近公式(见4.1和4.2,4.3).这样,实现圆法的关键就是要去证明:当 $N \to \infty$ 时[②],相对于 $D_1(N)$(N 为偶数) 和 $T_1(N)$(N 为奇数) 来说 $D_2(N)$ 和 $T_2(N)$ 分别是可以忽略的误差项;也就是要去证明:当 $\alpha \in E_2$ 时,$|S(\alpha, N)|$ 取"足够小"的值.维诺格拉多夫利用他所得到的三角和 $S(\alpha, N)$ 的估计,成功地证明了对于 $T_1(N)$(N 为奇数) 来说 $T_2(N)$ 是可以忽略的误差项.但他的估计对 $D_2(N)$ 来说得不到所期望的结果.

应该指出,利用圆法仅能证明充分大的奇数 N 可表为三个奇素数之和,而不能证明每个不小于9的奇数可表为三个奇素数之和.但另一方面,它不仅证明了这种表法存在,而且还能得到这种表法个数的渐近公式,这是其他方法所不能得到的.应用圆法所解决的数论问题都有这样的特点.

---

① 文中未涉及的内容,请参考原文.
② 这时法雷分割,即集合 E_1、E_2,也在变化.

4.2 三素数定理(非实效方法)

设 λ_1,λ_2 是两个待定正常数,N 为充分大的整数,取

$$Q = \log^{\lambda_1}N,\tau = N\log^{-\lambda_2}N \qquad ㉑$$

当 N 足够大时,条件 ⑭ 显然成立,这样,由式 ⑪ 和 ⑫ 就确定了基本区间 E_1 和余区间 E_2.

首先,利用西格尔 - 瓦尔菲茨定理来计算基本区间 E_1 上的积分 $T_1(N)$.

引理 2 设 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in I(q,h) \subset E_1$,则有

$$S(\alpha,N) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n} + O(Ne^{-c_3\sqrt{\log N}}) \qquad ㉒$$

证明 由式(2.1.5)及推论 18.2.4 可得:当$(l,q) = 1$时,有

$$\sum_{\substack{z<p\leqslant N \\ p\equiv l(\bmod q)}} e(zp) = \frac{1}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(zu)}{\log u}du + O(Ne^{-c_4\sqrt{\log N}}) \qquad ㉓$$

这里用到了 $|z|\leqslant\tau^{-1}$. 由此及式(19.5.4)得

$$S(\alpha,N) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(zu)}{\log u}du + O(Ne^{-c_5\sqrt{\log N}}) \qquad ㉔$$

再利用式(2.1.5)可得

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n} - \int_2^N \frac{e(zn)}{\log n}du \ll$$

$$1 + \int_2^N\left(\frac{|z|}{\log u} + \frac{1}{u\log^2 u}\right)du \ll 1 + \frac{N|z|}{\log N} \qquad ㉕$$

由以上两式及 $|z|\leqslant\tau^{-1} = N^{-1}\log^{\lambda_2}N$,即得式 ②.

引理2 设整数 $N\geqslant 2$, $C_q(l)$ 是由式(13.3.10)给出的拉马努金和.那么级数

$$\mathfrak{S}_3(N) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N) \qquad ㉖$$

绝对收敛,且有

$$\mathfrak{S}_3(N) = \prod_{p\mid N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \qquad ㉗$$

及

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N) = \mathfrak{S}_3(N) + O(Q^{-1}(\log\log Q)^2) \qquad ㉘$$

证明 由于 $\varphi(q)\gg q(\log\log q)^{-1}$,故有

$$\left|\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N)\right| \leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)} \leqslant q^{-2}(\log\log q)^2$$

由上式就证明了级数 ㉖ 绝对收敛，且有式 ㉘ 成立. 由于 $\mu(q)\varphi^{-3}(q)C_q(-N)$ 是 q 的可乘函数，所以

$$\mathscr{S}_3(N) = \prod_p \left(1 - \frac{C_p(-N)}{(p-1)^3}\right)$$

由此及

$$C_p(-N) = \begin{cases} p-1, & p \mid N \\ -1, & p \nmid N \end{cases} \qquad ㉙$$

就证明了式 ㉗.

$\mathscr{S}_3(N)$ 通常称为三素数定理中的奇异级数. 由式 ㉗ 容易看出

$$\mathscr{S}_3(N) = 0, 2 \mid N \qquad ㉚$$

当 $2 \nmid N$ 时

$$\mathscr{S}_3(N) > \prod_{p \mid N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_{n \geqslant 3}\left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2} \qquad ㉛$$

引理 4 当 $\lambda_1 \geqslant 2, \lambda_2 \geqslant \frac{1}{2}$ 时，有

$$T_1(N) = \frac{1}{2}, \mathscr{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) \qquad ㉜$$

证明 当 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in I(q,h) \subset E_1$ 时，由引理 2 知

$$S^3(\alpha, N) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n}\right)^3 + O(N^3 e^{-c_6\sqrt{\log N}})$$

因此

$$T_1(N) = \sum_{q \leqslant Q}\sum_{h=0}^{q-1}{}' \int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha =$$

$$\left(\sum_{q \leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N)\right)\cdot\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n}\right)^3 e(-zN)\mathrm{d}z +$$

$$O(N^2 e^{-c_7\sqrt{\log N}}) \qquad ㉝$$

利用估计(19.1.3) 可推出：当 $\|z\| \leqslant N^{-\frac{1}{2}}$ 时

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n} \ll \frac{N}{\log N}\min\left(1, \frac{1}{\|z\| N}\right) \qquad ㉞$$

此外，有

$$\left|\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n} - \sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log N}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log N}\right) =$$

$$\int_2^N \frac{\mathrm{d}u}{\log u} - \frac{N}{\log N} + O(1) \ll \frac{N}{\log^2 N} \qquad ㉟$$

从以上两式得到

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n}\right)^3-\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n}\right)^3\right)e(-zN)\mathrm{d}z \ll$$

$$\frac{N^3}{\log^4 N}\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\min\left(1,\frac{1}{N^2z^2}\right)\mathrm{d}z \ll \frac{N^2}{\log^4 N}$$

由此从式㉝推出

$$T_1(N)=\frac{1}{\log^3 N}\left(\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N)\right)\cdot$$
$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{n=2}^{N}e(zn)\right)^3 e(-zn)\mathrm{d}z+O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) \qquad ㊱$$

利用估计式(19.1.3)易得

$$\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N}e(zn)\right)^3 e(-zN)\mathrm{d}z \ll \int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z^3} \ll \tau^2 = N^2\log^{-2\lambda_2}N$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{n=2}^{N}e(zn)\right)^3 e(-zN)\mathrm{d}z \ll \tau^2 = N^2\log^{-2\lambda_2}N$$

利用以上两式及级数㊱的收敛性，当 $\lambda_2 \geqslant \frac{1}{2}$ 时，由式㊱可得到

$$T_1(N)=\frac{1}{\log^3 N}\left(\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N)\right)J+O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) \qquad ㊲$$

其中

$$J=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=2}^{N}e(zn)\right)^3 e(-zN)\mathrm{d}z=$$

$$\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N\\ 2\leqslant n_1,n_2,n_3\leqslant N}}1=\frac{N^2}{2}+O(N) \qquad ㊳$$

当 $\lambda_1 \geqslant 2$ 时，由以上两式及引理 3 就证明了所要的结果.

式⑪就是我们所需要的在基本区间上的积分 $T_1(N)$ 的渐近公式. 下面我们来估计余区间上的积分 $T_2(N)$.

引理 5 当 $\lambda_1 \geqslant 10, \lambda_2 \geqslant 10$ 时，有

$$T_2(N) \ll N^2\log^{-4}N \qquad ㊴$$

证明 由引理 1 知，当 $\alpha \in E_2$ 时

$$\alpha=\frac{h}{q}+z,(q,h)=1,Q<q\leqslant\tau,|z|\leqslant\frac{1}{q^2} \qquad ㊵$$

因此，由定理 19.1.1 及 $\log^{10}N \leqslant Q < q \leqslant \tau \leqslant N\log^{-10}N$ 得到

$$S(\alpha,N) \ll N\log^{-3}N, \alpha \in E_2 \qquad ㊶$$

进而有

$$|T_2(N)| \leqslant \int_{E_2} |S(\alpha,N)|^3 \mathrm{d}\alpha \ll N\log^{-3}N\int_0^1 |S(\alpha,N)|^2\mathrm{d}\alpha \qquad ㊷$$

由此及

$$\int_0^1 |S(\alpha,N)|^2\mathrm{d}\alpha = \sum_{2<p_1\leqslant N}\sum_{2<p_2\leqslant N}\int_0^1 e(\alpha(p_1-p_2))\mathrm{d}\alpha = \pi(N)-1 \qquad ㊸$$

就证明式㊴.

如果我们用定理19.2.2,或定理19.3.1,或定理19.4.7来估计当$\alpha\in E_2$时的三角和$S(\alpha,N)$,那么引理5中的λ_1和λ_2就应该分别满足:$\lambda_1\geqslant 11$,或28,或56;$\lambda_2\geqslant 11$,或28,或56.

由式⑲,引理4和5就证明了三素数定理:

定理1 设N是奇数,$T(N)$是N表为三个奇素数之和的表法个数.那么我们有渐近公式

$$T(N) = \frac{1}{2}\mathfrak{S}(N)\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) \qquad ㊹$$

其中$\mathfrak{S}_3(N)$由式㉖给出,且

$$\mathfrak{S}_3(N) > \frac{1}{2}, 2\nmid N$$

推论1 存在一个正常数c_1,使得每个大于c_1的奇数是三个奇素数之和.

应该指出的是,由于在引理1中用了西格尔-瓦尔非茨定理,所以式中的大O常数是非实效的,因而引理4,定理1中的大O常数,以及推论6中的常数c_1都是非实效的.

4.3 三素数定理(实效方法)

设$\lambda_1 = 3$,λ_2是待定正常数.取

$$Q = \log^3 N, \tau = N\log^{-\lambda_2}N \qquad ㊺$$

当N足够大时,条件⑭显然满足.因此,由式⑪和⑫就确定了基本区间E_1和余区间E_2.

首先,利用Page定理来计算基本区间E_1上的积分$T_1(N)$.

引理6 当$\lambda_2\geqslant\frac{1}{2}$时,有

$$T_1(N) = \frac{1}{2}\mathfrak{S}(N)\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3,4}}\right) \qquad ㊻$$

这里大O常数是实效的,即是可计算的绝对常数.

证明 在推论18.2.5中取

$$y = \exp(\log N(\log\log N)^{-2}), \sqrt{N}\leqslant x\leqslant N$$

当N足够大时必有$\log^3 N < y < \sqrt{N}$.此外,对所取的y,当y阶例外模$\tilde{q}$存在

时，必有

$$\tilde{q} \gg \log^2 N(\log\log N)^{-12} \qquad ㊼$$

这样，当 $1 \leqslant q \leqslant \gamma, \tilde{q} \nmid q, (q, l) = 1$ 时，由推论 18.2.5 得

$$\pi(x; q, l) = \frac{Li\,x}{\varphi(q)} + O(x\exp(-c_8(\log\log x)^2))$$

由此及式(2.1.5) 可推出，当 $|z| \leqslant \tau^{-1}$ 时

$$\sum_{\substack{z<p\leqslant N \\ p\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}} e(zp) = \sum_{\substack{\sqrt{N}<p\leqslant N \\ p\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}} e(zp) + O(\sqrt{N}) =$$

$$\frac{1}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(zu)}{\log u}\mathrm{d}u + O(N\exp(-c_9(\log\log N)^2))$$

和证明引理 2 一样，由此及式(19.5.4) 容易得到，当 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in E_1, \tilde{q} \nmid q$，$q \leqslant \log^3 N$ 时有

$$S(\alpha, N) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\sum_{n=2}^{N}\frac{e(zn)}{\log n} + O(N\exp(-c_{10}(\log\log N)^2))$$

同式 ㊲ 的推导完全一样，由上式可推得

$$\sum_{\substack{q\leqslant\log^3 N \\ \tilde{q}\nmid q}}\sum_{h=0}^{q-1}{}'\int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha =$$

$$\frac{N^2}{2\log^3 N}\left(\sum_{\substack{q\leqslant\log^3 N \\ \tilde{q}\nmid q}}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N)\right) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right) \qquad ㊽$$

这里还用到了式 ㊳ 和级数(2.6) 的绝对收敛性，在 $\tilde{q} \mid q$ 的那些基本区间 $I(q, h)$ 上的积分用估计式(19.5.1) 可得到

$$\sum_{\substack{q\leqslant\log^3 N \\ \tilde{q}\mid q}}\sum_{h=0}^{q-1}{}'\int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha \ll \qquad ㊾$$

$$\sum_{\substack{q\leqslant\log^3 N \\ \tilde{q}\mid q}}\varphi(q)\frac{N^3(\log\log q)^3}{q\sqrt{q}\log^3 N}\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\min\left(1, \frac{1}{N^3|z|^3}\right)\mathrm{d}z \ll$$

$$\frac{N^2(\log \lg\lg N)^3}{\log^3 N}\sum_{\substack{q\leqslant\log^3 N \\ \tilde{q}\mid q}}\frac{1}{\sqrt{q}} \ll \frac{N^2}{\log^{3,4} N}$$

这里还用到了式 ③，在另一方面，由式 ③ 易得

$$\sum_{\substack{q\leqslant\log^3 N \\ \tilde{q}\mid q}}\frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)}C_q(-N) \ll \sum_{\substack{q\leqslant\log^3 N \\ \tilde{q}\mid q}}\frac{1}{\varphi^2(q)} \ll \log^{-3} N \qquad ㊿$$

由式㊽,㊾,㊿和引理3就证明了式②.由于这里应用了Page定理,所以这里的大 O 常数是可以计算的.

下面我们来估计余区间 E_2 上的积分 $T_2(N)$.

引理7 当 $\lambda_2 \geqslant 10$ 时有

$$T_2(N) \ll N^2(\log N)^{-3.4} \tag{51}$$

证明 由引理1知,当 $\alpha \in E_2$ 时,有

$$\alpha = \frac{h}{q} + z, (q, h) = 1$$

$$\log^3 N < q \leqslant N\log^{-10} N, \mid z \mid \leqslant \frac{1}{q^2} \tag{52}$$

当 $\alpha \in E_2, \log^{10} N < q \leqslant N\log^{-10} N$ 时,由定理19.1.1知

$$S(\alpha, N) \ll N\log^{-3} N \tag{53}$$

当 $\alpha \in E_2, \log^3 N < q \leqslant \log^{10} N$ 时,由定理19.5.1得

$$S(\alpha, N) \ll N(\log N)^{-2.4} \tag{54}$$

因而

$$\mid T_2(N) \mid \leqslant \int_{E_2} \mid S^3(\alpha, n) \mid \mathrm{d}\alpha \ll N(\log N)^{-2.4} \int_0^1 \mid S^2(\alpha, N) \mid \mathrm{d}\alpha$$

由此及式㊸就证明了式⑲.

由式⑲,引理6和7就证明了以下形式的三素数定理.

定理2 设 N 是奇数,我们有渐近公式

$$T(N) = \frac{1}{2}\mathscr{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{3.4}}\right) \tag{55}$$

其中的大 O 常数是可以计算的,$\mathscr{S}_3(N)$ 由式㊿给出,且对奇数 N 有 $\mathscr{S}_3(N) > \frac{1}{2}$.

推论2 存在一个可计算的常数 c'_1,使得每个大于 c'_1 的奇数是三个奇素数之和.

4.4 哥德巴赫数

本节将证明以下定理.

定理3 几乎所有的偶数都是两个奇素数之和.

通常把可以表为两个奇素数之和的偶数称为哥德巴赫数,设 $x > 6$,把不大于 x 且不能表为两个奇素数之和的偶数组成的集合及其个数记作 $E(x)$,通常称它为哥德巴赫数的例外集合.这样,猜想(A)就是要证明

$$E(x) = 2, x > 6 \tag{56}$$

而定理3就是要证明:当 $x \to \infty$ 时

$$E(x)=o(x) \tag{57}$$

我们实际上要证明一个更强的结果.

定理 4 对任给的正数 A,一定有

$$E(x)\ll x\log^{-A}x \tag{58}$$

其中 $\ll$ 常数和 A 有关.

目前最好的结果是由蒙哥马利和伏岗证明的存在一个可计算的正常数 δ,使得

$$E(x)\ll x^{1-\delta} \tag{59}$$

陈景润和潘承洞①具体定出了这里的常数 δ 的值.

为了证明式 ㊸,代替式 ① 所定义的 $D(n)$ 我们来考虑 $D(n,x)$:n 表为不超过 x 的两个奇素数之和的表法个数.显有

$$\begin{aligned}&D(n,x)=0,\text{当 } n\leqslant 4 \text{ 或 } n>2x\\&D(n,x)=D(n),\text{当 } n\leqslant x\end{aligned} \tag{60}$$

以及

$$D(n,x)=\int_0^1 S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha \tag{61}$$

其中 $S(\alpha,x)$ 由式 ⑤ 给出.

对于由式 ⑧,⑪ 和 ⑫ 给出的法雷分割,有

$$D(n,x)=D_1(n,x)+D_2(n,x) \tag{62}$$

其中

$$\begin{aligned}D_i(n,x)&=\int_{E_i}S^2(\alpha,x)\mathrm{e}(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha=\\&\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}S_i^2(\alpha,x)\mathrm{e}(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha,\ i=1,2\end{aligned} \tag{63}$$

$S_i(\alpha,x)(i=1,2)$ 是 α 的以 1 为周期的周期函数,当 $s\in\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$ 时

$$S_i(\alpha,x)=\begin{cases}S(\alpha,x), & \alpha\in E_i\\0, & \alpha\notin E_i\end{cases},\ i=1,2 \tag{64}$$

这样,$D_i(n,x)(-\infty<n<\infty)$ 可以看做是周期函数 $S_i^2(\alpha,x)$(变量是 α)的傅里叶系数.因而由傅里叶级数理论中的帕塞瓦尔定理推出

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|D_1(n,x)|^2=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}|S_1(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha=\int_{E_1}|S(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha \tag{65}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|D_2(n,x)|^2=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}|S_2(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha=\int_{E_2}|S(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha \tag{66}$$

帕塞瓦尔(Parseval des Chênes, Marc Antoine, 1755—1836),法国数学家.生于罗西耶尔-欧萨利讷,卒于巴黎.

① 中国科学,(A),1983,第4期,327-342.

设 λ 是待定正常数，现取

$$Q = \log^{\lambda} x, \tau = x\log^{-\lambda} x \tag{67}$$

利用线性素变数三角和估计，立刻推出

引理 8 当 Q,τ 由式 ⑰ 给出时，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_2(n,x)|^2 \ll x^3 Q^{-1}\log^3 x \tag{68}$$

进而，若设 $M(x)$ 是全体整数 n 中满足

$$|D_2(n,x)| > xQ^{-\frac{1}{3}} \tag{69}$$

的 n 的个数，则

$$M(x) \ll xQ^{-\frac{1}{3}}\log^3 x \tag{70}$$

证明 由引理 1 及定理 19.1.1 可推出

$$S(\alpha,x) \ll xQ^{-\frac{1}{2}}\log^2 x, \alpha \in E_2 \tag{71}$$

由此及式 ⑱ 可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_2(n,x)|^2 \ll x^2 Q^{-1}\log^4 x\int_0^1 |S(\alpha,x)|^2 \mathrm{d}\alpha$$

由此及式 ㊸ 就证明了式 ⑱. 进而由式 ⑱ 及 $M(x)$ 的定义可得

$$M(x)x^2 Q^{-\frac{2}{3}} \ll x^3 Q^{-1}\log^3 x$$

这就得到了式 ⑳.

这引理给出了 $D_2(n,x)$ 的一个(对 n 的)平均估计. 式 ⑲,⑳ 表明：取“大值”的 $|D_2(n,x)|$ 是比较少的. 如果证明中用定理 19.2.2，或定理 19.3.1 或定理 19.4.7 来代替定理 19.1.1 时，引理的表述要作相应改变，但对式 ㊿ 的证明不起影响. 请读者自己作这样的改变.

下面要用计算 $T_1(N)$ 的类似的方法来计算 $D_1(n,x)\left(\frac{x}{2} < n \leqslant x\right)$ 的渐近公式.

引理 9 设整数 $n \geqslant 4$. 我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\right| \ll \log\log n \tag{72}$$

式中 $C_q(l)$ 是由式(13.3.10) 给出的拉马努金和.

证明 由推论 13.3.2 可得

$$\sum_{q\leqslant Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\right| = \sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\varphi((n,q)) =$$

$$\sum_{d|n}\varphi(d)\sum_{\substack{q\leqslant Q\\(n,q)=d}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} = \sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\sum_{\substack{v\leqslant Q/d\\(v,n/d)=1}}\frac{\mu^2(v)}{\varphi^2(v)} \ll$$

$$\sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}=\frac{n}{\varphi(n)} \tag{73}$$

由此及熟知不等式

$$\frac{n}{\varphi(n)}\ll \log\log n \tag{74}$$

即得式 ⑫.

引理 10 设整数 $n\geqslant 4$.我们有

$$\sum_{q>Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\right|\ll d(n)Q^{-1}(\log\log Q)^2\log\log n \tag{75}$$

其中 $d(n)$ 是除数函数.

证明 和引理 9 证明一样,由推论 13.3.2 和式 ⑭ 得到

$$\sum_{q>Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\right| = \sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\sum_{\substack{v>Q/d\\(v,n/d)=1}}\frac{\mu^2(v)}{\varphi^2(v)}\ll$$

$$Q^{-1}(\log\log Q)^2\sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)d}{\varphi(d)}\ll$$

$$Q^{-1}(\log\log Q)^2 2^{\omega(n)}\log\log n$$

由此及 $2^{\omega(n)}\leqslant d(n)$ 就证明了式 ⑮.

引理 11 设整数 $n\geqslant 4$.那么,级数

$$\mathfrak{S}_2(n)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n) \tag{76}$$

绝对收敛,且

$$\mathfrak{S}_2(n)=\frac{n}{\varphi(n)}\prod_{p\nmid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \tag{77}$$

证明 由引理 7 或 9 均可推出级数绝对收敛.由此及式(㉙ 就得到式 ⑰).容易看出

$$\mathfrak{S}_2(n)=0,2\nmid n \tag{78}$$

$$\frac{n}{\varphi(n)}>\mathfrak{S}_2(n)>\frac{n}{\varphi(n)}\prod_{m\geqslant 3}\left(1-\frac{1}{(m-1)^2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{\varphi(n)}\geqslant 1,2\mid n$$

通常 $\mathfrak{S}_2(n)$ 称为是关于偶数的哥德巴赫猜想中的奇异级数.

引理 12 设 Q,τ 由式 ⑰ 给出,$\lambda\geqslant 3$.那么,当$\frac{1}{2}x<n\leqslant x$ 时有

$$D_1(n,x)=\frac{n}{\log^2 n}\left(\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\right)+O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right) \tag{79}$$

证明 证明和式 ㊲ 相类似,由式 ㉑ 得

$$D_1(n,x)=\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\Big)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\Big(\sum_{m=2}^{[x]}\frac{e(zm)}{\log m}\Big)^2\cdot$$

$$e(-zn)\mathrm{d}z+O(xe^{-C_{11}\sqrt{\log x}}) \tag{80}$$

再由式㉞和㉟得

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\Big\{\Big(\sum_{m=2}^{[x]}\frac{e(zm)}{\log m}\Big)^2-\Big(\sum_{m=2}^{[x]}\frac{e(zm)}{\log[x]}\Big)^2\Big\}e(-zn)\mathrm{d}z\ll$$

$$\frac{x^2}{\log^3 x}\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\min\Big(1,\frac{1}{x\mid z\mid}\Big)\mathrm{d}z\ll\frac{x}{\log^3 x}\Big\{1+\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\tau}}\frac{\mathrm{d}z}{z}\Big\}\ll\frac{x\log\lg x}{\log^3 x} \tag{81}$$

最后一步用到了 $\tau=x\log^{-\lambda}x$. 由以上两式及引理 9 推出

$$D_1(n,x)=\Big(\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\Big)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\Big(\sum_{m=2}^{[x]}\frac{e(zm)}{\log[x]}\Big)^2\cdot$$

$$e(-zn)\mathrm{d}z+O\Big(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\Big) \tag{82}$$

利用 $\lambda\geqslant 3,\frac{x}{2}<n\leqslant x$,有

$$\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{m=2}^{[x]}e(zm)\Big)^2e(-zn)\ll\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z^2}\ll\tau\ll\frac{x}{\log^3 x}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{\tau}}\Big(\sum_{m=2}^{[x]}e(zm)\Big)^2e(-zn)\ll\frac{x}{\log^3 x}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{m=2}^{[x]}e(zm)\Big)^2e(-zn)\mathrm{d}z=\sum_{\substack{n=m_1+m_2\\2\leqslant m_1,m_2\leqslant[x]}}1=n+O(1)$$

以及引理 9,从式㊷就证明了式⑲.

定理 4 的证明 取 $\lambda=3A+9,Q,\tau$ 由式⑰给出,由引理 10 和 12 得到:当 $\frac{x}{2}<n\leqslant x$ 时

$$D_1(n,x)=\mathfrak{S}_2(n)\frac{n}{\log^2 n}+O\Big(\frac{x}{\log^2 x}\mathrm{d}(n)Q^{-1}\cdot(\log\log x)^3\Big)+$$

$$O\Big(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\Big) \tag{83}$$

由熟知估计式

$$\sum_{n\leqslant x}\mathrm{d}(n)\ll x\log x$$

知,在不超过 x 的正整数 n 中,使 $\mathrm{d}(n)>Q\log^{-1}x$ 的 n 的个数远远小于 $xQ^{-1}\log^2 x$. 因此,对满足 $\frac{x}{2}<n\leqslant x$ 的偶数 n 中,除了远远小于 $xQ^{-1}\log^2 x$ 个例

外值外有

$$D_1(n,x) = \mathfrak{S}_2(n)\frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{x(\log\log x)^3}{\log^3 x}\right) \quad ⑧④$$

对所取的 λ 和 Q,由此及引理 8,式 ⑥②,式 ⑦⑧ 推出:在满足 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$ 的偶数 n 中,除了远远小于

$$xQ^{-\frac{1}{3}}\log^3 x = x\log^{-A}x \quad ⑧⑤$$

个例外值外,有

$$D(n,x) = \mathfrak{S}_2(n)\frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{x(\log\log x)^3}{\log^3 x}\right) \quad ⑧⑨$$

这就证明了:对充分大的 x 有

$$E(x) - E\left(\frac{x}{2}\right) \ll x\log^{-A}x \quad ⑨⓪$$

为了证明式 ⑤⑧,设 K 是正整数使得 $2^K < \sqrt{x} \leqslant 2^{K+1}$. 由式 ⑨⓪ 得

$$E\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - E\left(\frac{x}{2^k}\right) \ll \frac{x}{2^{k-1}}\log^{-A}x,\ k = 1,\cdots,K+1 \quad ⑨①$$

由此就立即推出式 ⑤⑧.

顺便指出,式 ⑧⑨ 表明:在 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$ 中,除了那些例外值外,偶数 n 表为两个奇素数之和的表法个数应是

$$D(n) = D(n,n) \sim \mathfrak{S}_2(n)\frac{n}{\log^2 n} \quad ⑨②$$

所以,如果关于偶数的哥德巴赫猜想成立,且表法个数有渐近公式的话,那么一定就是式 ⑨②.

5 Goldbach's Famous Conjecture[①]

——Paulo Ribenboim

In a letter of 1742 to Euler, Goldbach expressed the belief that:

(G) *Every integer $n > 5$ is the sum of three primes.*

Euler replied that this is easily seen to be equivalent to the following statement:

① 原载于 Paulo Ribenboim《The Book of prime Number Kecords》Springer-Verlag world publishiug corp, 1987.

[注]当时中国的一般读者还见不到国外原版书.只有在诸如中科院数学所的资料室中才可见到这种翻印本,书后标明只限在中华人民共和国销售,书名译为《素数论题》.定价:19.60 元.

(G′) *Every even integer* $2n \geqslant 4$ *is the sum of two primes*.

indeed, if (G′) is assumed to be true and if $2n \geqslant 6$, then $2n - 2 = p + p'$ so $2n = 2 + p + p'$, where p, p' are primes. Also $2n + 1 = 3 + p + p'$, which proves (G).

Conversely, if (G) is assumed to be true, and if $2n \geqslant 4$, then $2n + 2 = p + p' + p''$, with p, p', p'' primes; then necessarily $p'' = 2$ (say) and $2n = p + p'$.

Note that it is trivial that (G′) is true for infinitely many even integers: $2p = p + p$ (for every prime).

It was also shown by Schinzel in 1959, using Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions, that given the integers $k \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, there exist infinitely many pairs of primes (p, q) such that $2k \equiv p + q \pmod m$. Of course, this falls short of proving Goldbach's conjecture, since it would still be necessary to show that if an even number is congruent, modulo every $m \geqslant 2$, to a sum of two primes, then it is itself a sum of two primes.

Very little progress was made in the study of this conjecture before the development of refined analytical methods and sieve theory. And despite all the attempts, the problem is still unsolved.

There have been three main lines of attack, reflected, perhaps inadequately, by the keywords "asymptotic," "almost primes," "basis."

An asymptotic statement is one which is true for all sufficiently large integers.

The first important result is due to Hardy & Littlewood in 1923 – it is an asymptotic theorem. Using the circle method and a modified form of the Riemann hypothesis, they proved that there exists n_0 such that every odd number $n \geqslant n_0$ is the sum of three primes.

Later, in 1937, Vinogradov gave a proof of Hardy & Littlewood's theorem, without any appeal to the Riemann hypothesis – but using instead very sophisticated analytic methods. A simpler proof was given, for example, by Estermann in 1938. There have been calculations of n_0, which may be taken to be $n_0 = 3^{3^{15}}$.

The approach via almost-primes consists in showing that there exist $h, k \geqslant 1$ such that every sufficiently large even integer is in the set $P_h + P_k$ of sums of integers of P_h and of P_k. What, is intended is, of course, to show that h, k can be taken to be 1.

In this direction, the first result is due to Brun (1919, *C. R. Acad. Sci. Paris*): every sufficiently large even number belongs to $P_9 + P_9$.

Much progress has been achieved, using more involved tyeps of sieve, and I note papers by Rademacher, Estermann, Ricci, Buchstab, and Selberg, in 1950, who

showed that every sufficiently large even integer is in $P_2 + P_3$.

While these results involved summands which were both composite, Rényi proved in 1947 that there exists an integer $k \geqslant 1$ such that every sufficiently large even integer is in $P_1 + P_k$. Subsequent work provided explicit values of k. Here I note papers by Pan, Pan (no mistake – two brothers, Cheng Dong and Cheng Biao), Barban, Wang, Buchstab, Vinogradov, Halberstam, Jurkat, Richert, Bombieri (see detailed references in Halberstam & Richert's book *Sieve Methods*).

The best result to date – and the closest one has come to establishing Goldbach's conjecture – is by Chen (announcement of results in 1966; proofs in detail in 1973, 1978). In his famous paper, Chen proved:

Every sufficiently large even integer may be written as $2n = p + m$, *where* p *is a prime and* $m \in P_2$.

As I mentioned before, Chen proved at the same time, the "conjugate" result that there are infinitely many primes p such that $p + 2 \in P_2$; this is very close to showing that there are infinitely many twin primes.

The same method is good to show that for every enen integer $2k \geqslant 2$, there are infinitely many primes p such that $p + 2k \in P_2$; so $2k$ is the difference $m - p$ ($m \in P_2$, p prime) in infinitely many ways.

A proof of Chen's theorem is given in the book of Halberstam & Richert. See also the simpler proof given by Ross (1975).

The "basis" approach began with the famous theorem of Schnirelmann (1930), proved, for example, in Landau's book (1937) and in Gelfond & Linnik's book (translated in 1965):

There exists a positive integer S, such that every sufficiently large integer is the sum of at most S primes.

It follows that there exist a positive integer $S_0 \geqslant S$ such that every integer (greater than 1) is a sum of at most S_0 primes.

S_0 is called the Schnirelmann constant.

I take this opportunity to spell out Schnirelmann's method, which is also useful in a much wider context. Indeed, it is applicable to sequences of integers $A = \{0, a_1, a_2, \cdots\}$ with $0 < a_1 < a_2 < \cdots$.

Schnirelmann defined the density of the sequence A as follows. Let $A(n)$ be the number of $a_i \in A$, such that $0 < a_i \leqslant n$. Then the density is

$$d(A) = \inf_{n \geqslant 1} \frac{A(n)}{n}$$

So if $1 \notin A$, then $d(A)=0$. so $d(A) \leqslant 1$ and $d(A)=1$ exactly when $A=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

Some densities may be easily calculated:

If $A=\{0,1^2,2^2,3^2,\cdots\}$, then $d(A)=0$, if $A=\{0,1^3,2^3,3^3,\cdots\}$, the $d(A)=0$, and more generally, if $k \geqslant 2$ and $A=\{0,1^k,2^k,3^k,\cdots\}$, then $d(A)=0$.

Similarly, if $A=\{0,1,1+m,1+2m,1+3m,\cdots\}$ (where $m>0$ is an integer), then $d(A)=1/m$.

If $A=\{0,1,a,a^2,a^3,\cdots\}$ (where $a>1$ is any integer), then $d(A)=0$.

All the preceding examples were trivial. How about the sequence $P'=\{0,1,2,3,5,7,\cdots,p,\cdots\}$ of primes (to which 0,1 have been added)? It follows from Tschebycheff's estimates for $\pi(n)$ that P' has density $d(P')=0$.

Many problems in number theory are of the following kind: to express every natural number (or every sufficiently large natural number) as sum of a bounded number of integers from a given sequence. Because sums are involved, these problems constitute the so-called "additive number theory". Hardy & Littlewood studied such questions systematically, already in 1920, and called this branch "partitio numberorum".

Goldbach's problem is a good example: to express every integer $n>5$ as sum of three primes.

If $A=\{a_0=0,a_1,a_2,\cdots\}$, $B=\{b_0=0,b_1,b_2,\cdots\}$, consider all the numbers of the form $a_i+b_j(i,j \geqslant 0)$ and write them in increasing order, each one only once. The sequence so obtained is called $A+B$. This is at once generalized for several sequences

$$A_1=\{0,a_{11},a_{12},\cdots\},\cdots,A_n=\{0,a_{n1},a_{n2},\cdots\}$$

In particular, taking $A=B$, then $A+B$ is written $2A$; taking $A_1=\cdots=A_n=A$, then $A_1+\cdots+A_n$ is written nA.

A sequence $A=\{0,a_1,a_2,\cdots\}$ is called a basis of order $k \geqslant 1$ if $kA=\{0,1,2,3,\cdots\}$; that is, every natural number is the sum of k numbers of A (some may be 0). And A is called an asymptotic basis of order $k \geqslant 1$ if there exists $N \geqslant 1$ such that $\{N,N+1,N+2,\cdots\} \subseteq kA$.

For example, Lagrange showed that every natural number is the sum of 4 squares (some may be 0); in this terminology, the sequence $\{0,1^2,2^2,3^2,\cdots\}$ is a basis of order 4.

It is intuitively reasonable to say that the greater the density of a sequence is, the more likely it will be a basis. I proceed to indicate how this is in fact ture.

Schnirelmann showed the elementary, but useful fact: If A, B are sequences as in-

dicated, then

$$d(A+B) \geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B)$$

This is rewritten as

$$d(A+B) \geqslant 1-(1-d(A))(1-d(B))$$

and may be at once generalized to

$$d(A_1+\cdots+A_n) \geqslant 1-\prod_{i=1}^{n}(1-d(A_i))$$

for any sequences $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

Here is an immediate corollary.

If $d(A)=\alpha>0$, then there exists $h \geqslant 1$ such that A is a basis of order h.

Proof. By the above inequality, if $k \geqslant 1$, then $d(kA) \geqslant 1-(1-\alpha)^k$. Since $\alpha>0$, there exists k such that $d(kA)>\frac{1}{2}$, thus, for every $n \geqslant 1$, $s=(kA)(n)=\#\{a_i \in kA \mid 1 \leqslant a_i \leqslant n\}>n/2$. But $2s+1>n$, so the integers $0, a_1, \cdots, a_s, n-a_1, n-a_2, \cdots, n-a_s$, cannot all be distinct. So $n=a_{i_1}=a_{i_2}$. This shows that every natural number is a sum of two integers of kA, so A is a basis of order $h=2k$.

Thus, from Schnirelmann's inequality and its corollary, the only sequences which remain to be considered are those with density 0, like $P'=\{0,1,2,3,5,7,\cdots\}$, or better, $P=\{0,2,3,5,7,\cdots\}$.

Even though $d(P')=0$, Schnirelmann proved that $d(P'+P')>0$ and therefore he concluded that P' is a basis, so P is an asymptotic basis (of some order S) for the set of natural numbers.

One extra digression, which will not be further evoked, is about the sharpening of Mann (1942) of Schnirelmann's density inequality:

$$d(A_1+\cdots+A_n) \geqslant \min\{1, d(A_1)+\quad+d(A_n)\}$$

In his small and neat book (1947), Khinchin wrote an interesting and accessible chapter on Schnirelmann's ideas of bases and density of sequences of numbers, and he gave the proof by Artin & Scherk (1943) of Mann's inequality.

In respect to Goldbach's problem, I note that, according to the theorems of Hardy & Littlewood and Vinogradov (which avoids the Riemann hypothesis), Schnirelmann's theorem holds with $S=3$. But the point is that the proof of Schnirelmann's theorem is elementary and based on totally different ideas.

With his method, Schnirelmann estimated that $S \leqslant 800,000$. Subsequent work, at an elementary level, has allowed Vaughan to show in 1976 that $S \leqslant 6$. As for S_0, the best values to date are by Deshouillers (1976): $S_0 \leqslant 26$, and later by Riesel & Vaughan (1983): $S_0 \leqslant 19$.

In 1949, Richert proved the following analogue of Schnirelmann's theorem: every integer $n > 6$ is the sum of distinct primes.

Here I note that Schinzel showed in 1959 that Goldbach's conjecture implies (and so, it is equivalent to) the statement:

Every integer $n > 17$ is the sum of exactly three distinct primes.

Thus, Richert's result will be a corollary of Goldbach's conjecture (if and when it will be shown true).

Now I shall deal with the number $r_2(2n)$ of representations of $2n \geqslant 4$ as sums of two primes, and the number $r_3(n)$ of representations of the odd number $n > 5$ as sums of three primes. *A priori*, $r_2(2n)$ might be zero (until Goldbach's conjecture is established), while $r_3(n) > 0$ for all n sufficiently large.

Hardy & Littlewood gave, in 1923, the asymptotic formula below, which at first relied on a modified Riemann's hypothesis; later work of Vinogradov removed this dependence:

$$r_3(n) \sim \frac{n^2}{2(\log n)^3}\left(\prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right) + o(1)\right)$$

With sieve methods, it may be shown that

$$r_2(2n) \leqslant C \frac{2n}{(\log 2n)^2} \log \log 2n$$

On the other hand, Powell proposed in 1985 to give an elementary proof of the following fact (problem in *Mathematics Magazine*): for every $k > 0$ there exist infinitely many even integers $2n$, such that $r_2(2n) > k$. A solution by Finn & Frohliger was published in 1986.

For every $x \geqslant 4$ let

$$G'(x) = \#\{2n \mid 2n \leqslant x, 2n \text{ is not a sum of two primes}\}$$

Van der Corput (1937), Estermann (1938), and Tschudakoff (1938) proved independently that $\lim G'(x)/x = 0$, and in fact, $G'(x) = O(x/(\log x)^{\alpha})$, for every $\alpha > 0$.

Using Tschebycheff's inequality, it follows that there exist infinitely many primes p such that $2p = p_1 + p_2$, where $p_1 < p_2$ are primes; so p_1, p, p_2 are in arithmetic progression (this result was already quoted in Section IV, while discussing strings of primes in arithmetical progressions).

The best result in this direction is the object of a deep paper by Montgomery & Vaughan (1975), and it asserts that there exists an effectively computable constant α, $0 < \alpha < 1$, such that for every sufficiently large x, $G'(x) < x^{1-\alpha}$. In 1980, Chen &

Pan(Cheng Dong) showed that $1-\alpha=\frac{1}{100}$ is a possible choice. In a second paper (1983), Chen succeeded in taking $\alpha=\frac{1}{25}$(also done independently by Pan). The finding of a sharp upper bound for $G'(x)$ – a delicate problem, full of pitfalls – has eluded many gifted mathematicians(see Pintz, 1986).

Concerning numerical calculations about Goldbach's conjecture, Stein & Stein (1965) calculated $r_2(2n)$ for every even number up to 200,000 and conjectured that $r_2(2n)$ may take any integral value.

In 1964, Shen used a sieving process and verified Goldbach's conjecture up to 33 000 000.

Record

The record belongs to Stein & Stein (1965), and if it were not for Te Riele (thanks for the information), I would have missed it. Indeed, it is hidden in a note added at the end of the paper. Stein & Stein verified Goldbach's conjecture up to 10^8. Four other people (Light, Forrest, Hammond & Roe), unaware of the elusive note, have done the calculations again up to 10^8, but much later – in 1980.

To conclude this brief discussion of Goldbach's conjecture, I would like to mention the recent book of Wang(1984), which is a collection of selected important articles on this problem, (including the article by Chen), and contains a good bibliography.

VII. The Waring – Goldbach Problem

I will discuss the problem of expressing natural numbers as sums of kth powers of primes (where $k\geqslant 2$). This is a problm of the same kind as Goldbach's problem – which concerned primes, instead of their kth powers. It is also a problem of the same type as Waring's problem, which concerns kth powers of integers(whether prime or not) and how economically they may generate additively all integers. It is normal first to consider Waring's problem. Before I enter into any more explanation, I ask to be forgiven for going beyond the prime numbers; but to please the record lovers, I will include plenty of records from a very keen and challenging competition.

6 "1+2"以后——介绍陈景润在解析数论研究中的最新成果

——姚琦

近来有很多同志关心哥德巴赫猜想——"1 + 1"的研究工作进展如何?数

学家陈景润同志在他关于“1 + 2”的著名论文发表之后又有什么出色的新成果?本文向读者简略地介绍陈景润同志发表及即将发表的部分工作.

6.1 “系数 8”的改进

哥德巴赫猜想是说,每一个不小于6的偶数 N 一定可以表示成两个奇素数 p_1, p_2 之和.也就是成立等式 $N = p_1 + p_2$.

我们也可以换一种提法. 首先,让我们研究由两个数组成的“数对”(p_1, p_2).其中第一个数 p_1 取自小于 N 的奇素数,第二个数 p_2 也取自小于 N 的奇素数.对于这样一个“数对”,我们可以求得一个“素数和”:$p_1 + p_2$.这个数显然是一个偶数.例如,对于“数对”(3, 3) 来说,3 + 3 = 6,也就是“素数和”为 6.对应于(3, 5), (3, 7), (5, 5)的“素数和”分别是8,10,10.这些“素数和”都是偶数.试问,当 p_1, p_2 都取小于 N 的奇素数时,所有一切可能得到的“素数和”是否可以取得尽一切在 6 与 N 之间的偶数呢?如果这个问题对于一切偶数 N 来说,回答都是肯定的,那么我们也就证实了哥德巴赫猜想.从上面的例子可以看出,当 N 是一个有限数时,例如,$N = 10$,这是可以办到的.可见这个问题的困难在于当 N 趋向于无穷大时是不是也可以办到.

从素数定理①知道,比 $N/2$ 小的素数个数大约为 $N/2\log\frac{N}{2}$.我们如果限制“数对”(p_1, p_2) 中的两个奇素数 p_1, p_2 都取比 $N/2$ 小的素数,那么由素数定理就可以知道,这样的“数对”的个数约有$\left(N/2\log\frac{N}{2}\right)^2$个.这个数比 $N/2$ 大,当 N 很大时,它比 $N/2$ 要大得多.而不大于 N 的偶数的个数不可能比 $N/2$ 多,可见在 N 很大时,$\left(N/2\log\frac{N}{2}\right)^2$ 比不大于 N 的偶数个数要多得多.但是,我们还不能断言这种“数对”的“素数和”可以取尽一切不大于 N 的偶数.这是因为有许多不同的“数对”的“素数和”是相等的.例如,数对(3,11) 及(7,7) 的“素数和”就是相等的:3 + 11 = 7 + 7 = 14.因而当 p_1, p_2 都取不超过 $N/2$ 的奇素数时,虽然“数对”(p_1, p_2) 的个数很多,比不大于 N 的偶数个数要大得多,但是相应的“素数和”$p_1 + p_2$ 却可以有许多是相同的数,因此,这种“素数和”的全体不一定能够取尽一切不大于 N 的偶数.

从上面的分析可以看出,如果我们将偶数 N 表示成 $p_1 + p_2$,而 p_1, p_2 都是奇素数,对于 N 来说,这种表示方法可能有许多种.我们把表示种数记为 $r(N)$.例如,当 $N = 16$ 时,16 = 13 + 3 = 5 + 11,可见 $r(16) = 2$.许多数学家对

---

① 素数定理是说:小于 x 的素数个数 $\pi(x)$ 为:$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)$,这里 A 为任意正数.事实上 O 项早已得到了改进,为方便起见这里仍这样表达.

于 $r(N)$ 进行了研究.但是,遗憾的是人们对于 $r(N)$ 的了解太少了.在20世纪50年代初,塞尔伯格给出了 $r(N)$ 的一个比较好的上界估计

$$r(N) \leqslant 16C_N \frac{N}{\log^2 N} \qquad ①$$

这里的 C_N 可以表示为下列无穷乘积

$$C_N = \prod_{\substack{p \mid N \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left[1 - \frac{1}{(p-2)^2}\right]$$

($\prod\limits_{p>2}$ 是表示它后面的式子中当 p 取一切大于2的素数时的乘积,而 $\prod\limits_{\substack{p \mid N \\ p>2}}$ 是表示当 p 取一切大于2且能除尽 N 的素数时的乘积),对于每一个固定的 N 来说, C_N 是一个常数.我们很自然地希望 $r(N)$ 的上界估计式中的数字系数小一些.因为它越小估计式就越精确.1965年,达文波特、朋比尼将式①中的系数16改进为8,即成立

达文波特(Davenport, Harold, 1907—1969),英国数学家.生于阿克灵顿.

$$r(N) \leqslant 8C_N \frac{N}{\log^2 N}$$

这个结果就是本节题目中所谓的"系数8".它的证明依赖于著名的朋比尼定理.这将在后面说明.

许多数学家研究了等差级数

$$l, l+q, l+2q, \cdots, l+aq, \cdots \qquad ②$$

中有多少个不超过 x 的素数的问题.首先我们将不超过 x 的正整数按其除以 q 后得到的余数 $0,1,\cdots,q-1$ 来分类,即

$$\left.\begin{array}{l} 0\text{类}: q, 2q, \cdots, a_0 q \leqslant x \\ 1\text{类}: 1, 1+q, 1+2q, \cdots, 1+a_1 q \leqslant x \\ \vdots \\ q-1\text{类}: q-1, q-1+q, \cdots, q-1+a_{q-1} q \leqslant x \end{array}\right\} \qquad ③$$

很容易证明其中有些类是没有素数的.如果 l 与 q 大于1的公因子,那么第 l 类中就没有素数.我们设这个公因子为 a, a 可以除尽 l 及 q,那么 a 就一定可以除尽第 l 类中所有的数.在这 q 类中去掉这些类以后还剩下的类数记为 $\varphi(q)$.这里的 $\varphi(q)$ 就是著名的欧拉函数.

在本文中我们已经提到过素数定理.如果将不超过 x 的素数个数记为 $\pi(x)$,那么 $\pi(x)$ 可以用 $\frac{x}{\log x}$ 来近似地表示.这里所谓近似是指 $\pi(x)$ 与 $\frac{x}{\log x}$ 之差的绝对值是一个比 $\frac{x}{\log x}$ 小得多的数.例如,我们可以把这绝对值表示为①

① 事实上,根据前面所述,这个误差早已可以估计得更小些.但为方便起见,本文中都取这种形式.

$$\left|\pi(x)-\frac{x}{\log x}\right|<C\frac{x}{\log^{A}x} \qquad ④$$

这里的 C 是一个常数，而 A 可以取任意大于1的正数. 因而 $C\frac{x}{\log^{A}x}$ 一定比 $\frac{x}{\log x}$ 小. 式④表示 $\pi(x)$ 用 $\frac{x}{\log x}$ 作为近似值时，误差不超过 $C\frac{x}{\log^{A}x}$. 可见这确实是一种合乎情理的近似.

现在我们再回到等差级数中的素数问题上来. 我们已经知道，不超过 x 的素数近似的有 $\frac{x}{\log x}$ 个，如果这些素数在式③中被选出的 $\varphi(q)$ 个类中分布得很均匀的话，那么每一个等差级数中就近似的有 $\frac{x}{\varphi(q)\log x}$ 个素数. 我们已经指出，作为近似值来说，一定要讨论它的误差是多少. 如果记等差级数

$$l, l+q, \cdots, l+aq \leqslant x \qquad ⑤$$

中素数个数为 $\pi(l, q, x)$，我们得到下面的不等式，即

$$\frac{x}{\varphi(q)\log x}-C\frac{x}{\log^{A}x}<\pi(l,q,x)<\frac{x}{\varphi(q)\log x}+C\frac{x}{\log^{A}x} \qquad ⑥$$

如果我们能够证明不等式⑥左边大于0，就可以得到 $\pi(l,q,x)>0$. 由于素数个数 $\pi(l,q,x)$ 一定是正整数或0，但当 $\pi(l, q, x)>0$ 时，$\pi(l,q, x)$ 不为0，那么，$\pi(l,q,x)$ 至少是1，故而等差级数⑤中一定有素数. 在这种情况下，我们将式⑥改写为

$$\left|\pi(l,q,x)-\frac{x}{\varphi(q)\log x}\right|<C\frac{x}{\log^{A}x} \qquad ⑦$$

我们看到，这时用 $\frac{x}{\varphi(q)\log x}$ 作为 $\pi(l,q,x)$ 的近似值，误差不超过 $C\frac{x}{\log^{A}x}$. 这种近似是合理的，同时我们注意到式⑦只不过是给出了这种情况下误差的上界，对于不同的 q 来说，所产生的误差各不相同，有的可能会比这个上界小得多.

对于充分大的 x 来说，我们虽然还不能就任意的 q 来证明式⑥左边大于0，或者差值 $\left|\pi(l,q,x)-\frac{x}{\varphi(q)\log x}\right|$ 的上界比 $\frac{x}{\varphi(q)\log x}$ 小得多，但是我们却能证明使得这个差值比较大的那些 q 的个数不是很多. 也就是说，我们可以对 q 取某一范围内的数值时的误差总和进行估计，由此得到的结果，我们称为“均值定理”. 为什么称为“均值定理”呢?因为在一般情况下，用这种方法虽然不能改进关于每一个 q 的误差估计的上界，但误差和的估计及关于 q 的个数的“平均值”却得到了改进. 在我们研究的问题中，如果能够证明这样一个均值定理：当 q 取不超过 $x^{\alpha}/\log^{A}x$ 的一切正整数时（α 是小于1的正数，A 是大于1的正数），假若 $x/\varphi(q)\log x$ 与 $\pi(l,q,x)$ 之差的绝对值之和能够小于 $Cx/\log^{B}x$（B

是大于 2 的正数),那么,我们应用筛法就可以证明

$$r(N) \leqslant \frac{4}{\alpha} C_N \frac{N}{\log^2 N}$$

1962 年潘承洞证明了 $\alpha \leqslant 1/3$ 时的均值定理,从而得到 $r(N) \leqslant 12 C_N \cdot \frac{N}{\log^2 N}$. 1963 年潘承洞又在 $\alpha \leqslant 3/8$ 时证得均值定理,从而 $r(N) \leqslant \frac{32}{3} C_N \frac{N}{\log^2 N}$, 1965 年朋比尼得到 $\alpha \leqslant 1/2$ 时的均值定理,从而证得 $r(N) \leqslant 8 C_N \frac{N}{\log^2 N}$.

如果我们承认广义黎曼猜想是正确的,即容易证得 $\alpha \leqslant 1/2$ 时的均值定理. 这就是说,朋比利证得了在广义黎曼猜想成立时能够得到的结果,因而被数学家们公认是一项了不起的成就,他也因此而获得菲尔兹奖. 同时,人们认为这个结果很难改进. 但是陈景润绕过了朋比尼定理,改进了 $r(N)$ 的上界估计,从而得到

$$r(N) \leqslant 7.834\,2 C_N \frac{N}{\log^2 N}$$

这项出色的工作已在国际数论界得到了极高的评价.

6.2 林尼克常数的改进

在上一节中我们已经讨论了等差级数

$$l, l+q, \cdots, l+aq, \cdots \qquad ⑧$$

中有多少个不超过 x 的素数的问题. 我们已经知道,当 l, q 有大于 1 的素因子时,级数 ⑧ 中没有素数. 当 l, q 没有大于 1 的因子时,也就是 l, q 互素时,人们已经证明了级数 ⑧ 中一定有素数. 我们进一步考察此时级数 ⑧ 中的第一个素数出现在什么位置. 也就是问 x,当 x 取多大时,在级数 ⑧ 的不超过 x 的那些项中至少有一个素数?林尼克在 1950 年证明:存在这样一个常数 C,如果 $x = q^C$,那么一定可以在 ⑧ 中那些数值不超过 x 的项

$$l, l+q, \cdots, l+bq$$

(这里 $l + bq \leqslant x$,而 $l + (b+1)q > x$) 中找到素数. 由第一节式 ⑥ 可以看出:当 $x = q^C$ 时,如果 $\varphi(q)$ 很大,式 ⑥ 左边可能是一个负值. 可见这并不是素数定理的一个自然推论.

上面所说的常数 C 究竟是多少呢?林尼克并没有告诉我们,他只是指出:一定存在这样一个常数. 因而人们就把这个常数称为林尼克常数. 当然,C 取得越小,级数 ⑧ 中不超过 q^C 的项就越少,问题的难度也就越大.

1959 年潘承洞首次定出 $C \leqslant 5\,448$,以后有许多数学家陆续改进了这个结果. 1977 年芬兰数学家裘地拉(Jutila)证明了 $C \leqslant 60$ 及 $C \leqslant 36$. 1979 年美国的一位数学家又证明了 $C \leqslant 20$,但在他的论文尚未发表时陈景润已经得到 $C \leqslant$

17,因而这位美国数学家的结果就不再发表了.最近,陈景润又进一步证明 $C \leqslant 15$.这个结果得到了国内外数论界的一致赞赏.

6.3 其他方面的成果

(1) 哥德巴赫数的例外集.

如果我们将能够写成两个奇素数之和的偶数叫做哥德巴赫数,那么,哥德巴赫猜想成立就等价于:每一个大于 6 的偶数都是哥德巴赫数.我们当然还不能证明这一点,但是我们可以证明几乎所有的偶数都是哥德巴赫数.这就是说,可能不是哥德巴赫数的偶数并不很多.这里还应指出,我们说"可能不是哥德巴赫数的偶数",是指我们尚不能判别是不是哥德巴赫数的那些偶数(如果你确实能够找到一个偶数不是哥德巴赫数,那么哥德巴赫猜想就已经被推翻了).我们把这样的偶数全体称为"例外集".这些偶数中小于 x 的个数记为 $E(x)$.

早在 1937 年,华罗庚教授就证明了 $E(x)$ 不很大,它比起 x 来是很小的,用极限来表示,可以写为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{E(x)}{x}=0$. 这也就是说,几乎所有的偶数都是哥德巴赫数.同时他还对 $E(x)$ 的上界作了估计

$$E(x) \leqslant \frac{Cx}{\log^A x}$$

(C 是常数而 A 是任意正数).我们当然希望 $E(x)$ 的上界估计越小越好.很多数学家研究了这个问题,对于这个上界作了多次改进.1974 年,蒙哥马利和伏肖证明了 $E(x) < Cx^{1-\delta}$,这里的 δ 是一个正的常数,至于它的数值可以取多少,他们没有给出.但是不论 δ 多么小,$x^{1-\delta}$ 比起 $x/\log^A x$ 来是小得多了.1979 年陈景润、潘承洞求得 $\delta \leqslant 0.01$.最近,他们又进一步改进了这个结果.

希思(Heath, Thomas Little, 1861—1940),英国数学家.生于英国林肯,卒于萨里·阿什特德.

(2) 区间中的殆素数.

当 x 充分大时,A 取多大的数可使 x 与 $x+A$ 之间一定有素数呢?这就是"区间中的素数"问题.如果我们能证明 $A = x^{1/2}$ 时 x 与 $x+A$ 之间一定有素数,那么,特别取 $x = n^2$ 时就可知 n^2 与 $(n+1)^2$ 之间一定有素数,这就是杰波夫(Desboves)猜想.但是,在黎曼猜想成立的前提下,我们尚且只能做到 $A = x^{1/2}\log x$. 到目前为止的最好结果是因凡涅斯(Inweniec)与希思-布朗(Heath-Brown)在 1979 年得到的 $A = x^{\theta}, \theta > 0.55$.

关于这个问题,有许多数学家研究它的减弱形式:A 取多大值时,x 与 $x+A$ 之间有不超过两个素因子的数?这种数我们称为"殆素数",这个问题称为"区间中的殆素数问题".1975 年陈景润就已经证得 $A = x^{1/2}$ 时 x 与 $x+A$ 之间必有殆素数.1978 年希思-布朗得到 $A = x^{0.4965}$,1979 年陈景润又进一步证明当 $A = x^{0.477}$ 时 x 与 $x+A$ 之间就已经有殆素数了.

(3)"1 + 2" 系数估计的改进.

在陈景润关于"1 + 2" 的著名论文中证明了

$$P_x(1,2) \geqslant 0.67 \frac{xC_x}{\log^2 x}$$

这里 $P_x(1,2)$ 是大偶数 x 写成两个素数之和或者一个素数加上一个有两个素因子的殆素数的表示种数.上面的不等式是说,这样的表示种数不小于右边的数.我们看到,如果能将 0.67 这数再改得大一些,就说明这样的表示种数更多一些,x 表示为两个素数之和这种表示法存在的可能性就相对地大一些.1974 年海伯斯顿(Halberstam)、里歇特宣布他们将 0.67 改进为 0.689,1978 年陈景润将这数改进为 0.81.

里歇特(Richert, Hans-Egon, 1924—),德国数学家.生于汉堡.

从上面的介绍可以看出,陈景润同志在发表了"1 + 2" 以后在解析数论的许多领域中硕果累累,在很多方面的研究工作中取得了世界领先地位.我们相信陈景润同志在新长征中一定会取得更大的成绩.

序言与书评

第三章

1 《哥德巴赫猜想》序①

——潘承洞

哥德巴赫猜想是1742年提出来的,它是解析数论的中心问题之一,二百多年来,许多数学家为之付出了艰苦的劳动.然而,仅在最近七十年,对这个著名数学难题的研究才取得了一系列成果,并大大推动了整个解析数论的发展,但是,这一猜想迄今仍然没有被证明.看来,离到达这一问题的最终解决还有一段漫长的路.或许可以认为,目前对哥德巴赫猜想乃至整个解析数论的研究,正处于一个期待着新突破的相对停滞阶段,哥德巴赫猜想的研究差不多涉及了解析数论中所有的重要方法.因此,对过去的工作做一个阶段性的总结以利于今后的研究,是十分必要的.当然,这一重要的工作不是我们力所能及的.但基于上述原因,并抱着抛砖引玉的愿望,我们写了这一本书.希望能把有关哥德巴赫猜想的最重要的研究成果,特别是研究这一问题的最重要的方法做一尽可能系统的介绍,以供有志于研究哥德巴赫猜想和解析数论的数学工作者参考.

① 原载《哥德巴赫猜想》,科学出版社,1981.

早在20世纪30年代，华罗庚教授就开始了对于这一猜想及其他著名解析数论问题的研究，并得到了许多重要成果；解放后不久，他就在中国科学院数学研究所组织了一批青年数学工作者继续从事这方面的研究，稍后，我的导师闵嗣鹤教授在北京大学数学力学系开设了解析数论专门化课程.在他们的热情指导和精心培养下，我国年轻的数学工作者对解析数论中许多著名问题的研究做出了重要贡献.可以认为，解析数论是迄今为止我国在近代数学中取得重大进展的最突出的分支之一，其中对哥德巴赫猜想的研究所取得的成就尤其引人瞩目.总结我国数学工作者的这些成就，正是本书的主要目的之一.

在本书的写作过程中，始终得到了山东大学党组织的热情关怀和大力支持，我们谨致以深切的谢意.

我们衷心感谢华罗庚教授对撰写本书所给予的宝贵指导；衷心感谢陈景润教授，王元教授和丁夏畦教授，他们对本书的写作提供了极为有益的帮助和意见.我们还要对裘卓明、楼世拓、姚琦和于秀源等同志所给予的帮助表示诚挚的谢意.最后，我们要感谢科学出版社的同志，他们为本书的编辑出版作了大量的工作，没有他们的帮助，这本小册子是不可能这样快与读者见面的.

由于我们水平所限，书中缺点、错误和遗漏之处在所难免，切望读者不吝指教.

2 《哥德巴赫猜想》引言①

——潘承洞（与潘承彪合作）

1742年，德国数学家哥德巴赫(1690—1764)在和他的好朋友、大数学家欧拉(1707—1783)的几次通信中，提出了关于正整数和素数之间关系的两个推测，用现在确切的话来说，就是：

(A)每一个不小于6的偶数都是两个奇素数之和；

(B)每一个不小于9的奇数都是三个奇素数之和.

这就是著名的哥德巴赫猜想.我们把猜想(A)称为“关于偶数的哥德巴赫猜想”，把猜想(B)称为“关于奇数的哥德巴赫猜想”.由于

$$2n+1=2(n-1)+3$$

所以，从猜想(A)的正确性就立即推出猜想(B)亦是正确的.欧拉虽然没有能够证明这两个猜想，但是对它们的正确性是深信不疑的.1742年6月30日，在给

① 原载《哥德巴赫猜想》1-18，科学出版社，1981.

哥德巴赫的一封信中他写道：我认为这是一个肯定的定理，尽管我还不能证明出来.

哥德巴赫猜想提出到今天已经有二百多年了，可是至今还不能最后地肯定它们的真伪.人们积累了许多宝贵的数值资料①，都表明这两个猜想是合理的.这种合理性以及猜想本身所具有的极其简单、明确的形式，使人们和欧拉一样，也不由得不相信它们是正确的.因而，二百多年来这两个猜想一直吸引了许许多多数学工作者和数学爱好者，特别是不少著名数学家的注意和兴趣，并为此作出了艰巨的努力.但是，直至本世纪，对这两个猜想的研究才取得了一系列引人瞩目的重大进展.迄今得到的最好结果是：

(1)1937 年，前苏联数学家 И.М.Виноградов 证明了，每一个充分大的奇数都是三个奇素数之和；

(2)1966 年，我国数学家陈景润证明了，每一个充分大的偶数都可以表为一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和.

这是两个十分杰出的成就.Виноградов 的结果基本上证明了猜想(B)是正确的②.所以，现在说到哥德巴赫猜想时，总是只指猜想(A)，即关于偶数的哥德巴赫猜想.

下面我们简要地谈一谈研究哥德巴赫猜想的历史.

从提出哥德巴赫猜想到 19 世纪结束这一百余年中，虽然许多数学家对它进行了研究，但并没有得到任何实质性的结果和提出有效的研究方法.这些研究大多是对猜想进行数值的验证，提出一些简单的关系式或一些新的推测(见 L. E. Dickson: History of theTheory of Numbers, 1, 421 - 425).总之，数学家们还想不出如何着手来对这两个猜想进行哪怕是有条件的极初步的有意义的探讨.但我们也应该指出：古老的筛法，以及在此期间内 Euler, Gauss, Dirichlet, Riemann, Hadamard 等在数论和函数论方面所取得的辉煌成就，为 20 世纪的数学家们对猜想的研究提供了强有力的工具，奠定了不可缺少的坚实基础.

1900 年，在巴黎召开的第二届国际数学会上，德国数学家希尔伯特在其展望 20 世纪数学发展前景的著名演讲中，提出了二十三个他认为是最重要的没有解决的数学问题，作为今后数学研究的主要方向，并期待在这新的一个世纪里，数学家们能够解决这些难题.哥德巴赫猜想就是希尔伯特所提出的第八个问题的一部分.但是，在此以后的一段时间里，对哥德巴赫猜想的研究并未取得什么进展.1912 年，德国数学家朗道在英国剑桥召开的第五届国际数学会上十

---

① 例如，Shen Mok Kong 验证了猜想(A)对于所有不超过 33×10^6 的偶数都是正确的.

② 后来，Бороздкий 具体计算出，当奇数 $N\geq e^{e^{16.038}}$ 时，就一定可以表为三个奇素数之和.$e^{e^{16.038}}$ 是一个比 10 的 400 万次方还要大的数(目前知道的最大素数是 Mersenne 素数 $2^{21\,701}-1$，这只是一个 6 533 位数).而对于如此巨大的数字，我们根本没有可能来一一验证对所有小于它的每一个奇数来说，猜想(B)是否一定成立.所以，BhhorpaдoB 是基本上解决了猜想(B).

分悲观地说:即使要证明下面较弱的命题(C),也是当代数学家所力不能及的:

(C)存在一个正整数 k,使每一个大于等于 2 的整数都是不超过 k 个素数之和.

1921 年,英国数学家哈代在哥本哈根数学会作的一次讲演中认为:哥德巴赫猜想可能是没有解决的数学问题中的最困难的一个.

就在一些著名数学家作出悲观预言和感到无能为力的时候,他们没有料到,或者没有意识到对哥德巴赫猜想的研究正在开始从几个不同方向取得了为以后证明是重大的突破,这就是:1920 年前后,英国数学家 Hardy, Littlewood 和印度数学家 Ramanujan 所提出的"圆法";1920 年前后,挪威数学家 Bruin 所提出的"筛法";以及 1930 年前后,前苏联数学家 Шнирельман 所提出的"密率".在不到 50 年的时间里,沿着这几个方向对哥德巴赫猜想的研究取得了十分惊人的丰硕成果,同时也有力地推进了数论和其他一些数学分支的发展.

2.1 圆法

首先我们来谈谈圆法.从 1920 年开始,Hardy 和 Littlewood 以总标题为 Some problems of"Partitio numerorum"发表了七篇论文.在这些文章中,他们系统地开创与发展了堆垒素数论中的一个崭新的分析方法.其中 1923 年发表的第Ⅲ,Ⅴ两篇文章就是专门讨论哥德巴赫猜想的.这个新方法的思想在 1918 年 Hardy 和 Ramanujan 的文章中已经出现过.后来人们就称这个新方法为 Hardy-Littlewood-Ramanujan 圆法.对于哥德巴赫猜想来说,圆法的思想是这样的:设 m 为整数,由于积分

$$\int_0^1 e(m\alpha)\mathrm{d}\alpha = \begin{cases}1, m = 0\\0, m \neq 0\end{cases} \tag{①}$$

其中 $e(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x}$,所以方程

$$N = p_1 + p_2, p_1, p_2 \geqslant 3 \tag{②}$$

的解数

$$D(N) = \int_0^1 S^2(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{③}$$

方程

$$N = p_1 + p_2 + p_3, p_1, p_2, p_3 \geqslant 3 \tag{④}$$

的解数

$$T(N) = \int_0^1 S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{⑤}$$

其中

$$S(\alpha, N) = \sum_{2<p\leqslant N} e(\alpha p) \tag{⑥}$$

这样，猜想(A)就是要证明：对于偶数 $N \geqslant 6$ 有

$$D(N) > 0 \qquad ⑦$$

猜想(B)就是要证明：对于奇数 $N \geqslant 9$ 有

$$T(N) > 0 \qquad ⑧$$

因此，哥德巴赫猜想就被归结为讨论关系式③及⑤中的积分了．显然，为此就需要研究由⑥所确定的以素数为变数的三角和．他们猜测三角和⑥有如下的性质：当 α 和分母"较小"的既约分数"较近"时，$S(\alpha, N)$ 就取"较大"的值；而当 α 和分母"较大"的既约分数"接近"时，$S(\alpha, N)$ 就取"较小"的值（这里的"较小"、"较大"、"较近"的确切含义将在下面作进一步的说明）．进而他们认为，关系式③及⑤中积分的主要部分是在以分母"较小"的既约分数为中心的一些"小区间"（即那些和它距离"较近"的点组成的区间）上，而在其余部分上的积分可作为次要部分而忽略．这就是圆法的主要思想．为了实现这一方法，首先就要把积分区间分为上述的二部分，其次把主要部分上的积分计算出来，最后要证明在次要部分上的积分相对于前者来说可以忽略不计．下面我们更具体地来加以说明．

设 Q, τ 为二个正数，

$$1 \leqslant Q \leqslant \tau \leqslant N \qquad ⑨$$

考虑法雷数列

$$\frac{a}{q}, (a, q) = 1, 0 \leqslant a < q, q \leqslant Q \qquad ⑩$$

并设①

$$I(q, a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{\tau}\right] \qquad ⑪$$

以及②

$$E_1 = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant Q} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a, q) = 1}} I(q, a) \qquad ⑫$$

$$E_2 = \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right] \setminus E_1 \qquad ⑬$$

容易证明，满足条件

$$2Q^2 < \tau \qquad ⑭$$

时，所有的小区间 $I(q, a)$ 是两两不相交的．我们称 E_1 为基本区间或优弧（Basic intervals 或 Major arcs），E_2 为余区间或劣弧（Supplementary ~ 或

---

① 有时亦取 $I(q, a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right]$．

② $\bigcup$ 与 $\setminus$ 是集合的和与差的符号．由于被积函数的周期为 1，为方便起见，我们把积分区间 $[0,1]$ 改为 $\left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right]$．

Minor ~).如果一个既约分数的分母不超过 Q,我们就说它的分母是"较小"的,反之就说是"较大" 的.如果两个点之间的距离不超过 τ^{-1},我们就说是"较近"的.显然,当 $\alpha \in E_1$ 时,它就和一分母"较小"的既约分数"接近".可以证明,当 $\alpha \in E_2$ 时,它一定和一分母"较大" 的既约分数"接近".这样,利用法雷数列就把积分区间$\left[-\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right]$分成了圆法所要求的二部分 E_1 和 $E_2$①.因而,我们有

$$D(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha = D_1(N) + D_2(N) \qquad ⑮$$

其中

$$D_i(N) = \int_{E_i} S^2(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha, i = 1,2$$

以及

$$T(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha = T_1(N) + T_2(N) \qquad ⑯$$

其中

$$T_i(N) = \int_{E_i} S^3(\alpha, N)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha, i = 1,2$$

圆法就是要计算出 $D_1(N)$ 及 $T_1(N)$,并证明它们分别为 $D(N)$ 及 $T(N)$ 的主要项,而 $D_2(N)$ 及 $T_2(N)$ 分别可作为次要项而忽略不计.

Hardy-Littlewood 首先证明了一个重要的假设性结果:如果存在一个正数 $\theta < \frac{3}{4}$,使得所有的 Dirichlet L – 函数的全体零点都在半平面 $\sigma \leqslant \theta$ 上,则充分大的奇数一定可以表为三个奇素数之和,且有渐近公式

$$T(N) \sim \frac{1}{2}\mathscr{D}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N}, N \to \infty \qquad ⑰$$

其中

$$\mathscr{D}_3(N) = \prod_{p \mid N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p \nmid N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \qquad ⑱$$

同时他们猜测,对于偶数 N 应该有

$$D(N) \sim \mathscr{D}_2(N)\frac{N}{\log^2 N}, N \to \infty \qquad ⑲$$

其中

① 这种方法通常称为 Farey 分割

$$\mathscr{D}_2(N) = 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid N\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2} \tag{20}$$

Hardy-Littlewood 还证明了一个假设性结果：如果广义 Riemann 猜测成立，那么几乎所有的偶数都能表为二个奇素数之和. 更精确地说，若以 $E(x)$ 表示不超过 x 且不能表为二个奇素数之和的偶数个数，他们在 *GRH* 下证明了

$$E(x) \ll x^{\frac{1}{2}+\epsilon} \tag{21}$$

其中 ϵ 为一任意小的正数.

可以看出，圆法如果成功的话，是十分强有力的. 因为它不但证明了猜想的正确性，而且进一步得到了表为奇素数之和的表法个数的渐近公式，这是至今别的方法都不可能做到的. 虽然 Hardy-Littlewood 没有证明任何无条件的结果，但是他们所创造的圆法及其初步探索是对研究哥德巴赫猜想及解析数论的至为重要的贡献，为人们指出了一个十分有成功希望的研究方向.

1937 年，T. Esterman 证明：每一个充分大的奇数一定可以表为两个奇素数及一个不超过两个素数的乘积之和.

1937 年，利用 Hardy-Littlewood 圆法，И. M. Виноградов 终于以其独创的三角和估计方法无条件地证明了：每一个充分大的奇数都是三个奇素数之和，且有渐近公式 ⑰ 成立. 这就基本上解决了猜想(B)，是一个重大的贡献. 通常把这一结果称为哥德巴赫 -Виноградов 定理，简称三素数定理. Page 在 1935 年及 Siegel 在 1936 年证明了关于 L - 函数例外零点的两个十分重要的结果，由此可推出相应的算术级数中素数分布的重要定理. Виноградов 首先利用这两个结果之一(用任意一个结果都可以) 证明了：对适当选取的 Q 及 τ，有

$$T_1(N) \sim \frac{1}{2}\mathscr{D}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N}, N \to \infty \tag{22}$$

而他的主要贡献是在于利用他自己创造的素变数三角和估计方法，证明了 Hardy-Littlewood 关于三角和 $S(\alpha, N)$ 性质的猜测. 简单地说，他证明了：对适当选取的 Q 和 τ，当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S(\alpha, N) \ll \frac{N}{\log^3 N} \tag{23}$$

由此容易推出

$$T_2(N) \ll \frac{N}{\log^3 N}\int_0^1 |S^2(\alpha, N)|\,\mathrm{d}\alpha \ll \frac{N^2}{\log^4 N} \tag{24}$$

这表明相对于 $T_1(N)$ 来说，$T_2(N)$ 是可以忽略的次要项. 这样，由 ⑯，㉒，㉔ 就证明了三素数定理.

Виноградов 创造和发展了一整套估计三角和的方法，利用他的强有力的方法使解析数论的许多著名问题得到了重要的成果. 他对数论的发展做出了重要

贡献.

1938 年,华罗庚证明了更一般的结果:对任意给定的整数 k,每一个充分大的奇数都可表为 $p_1 + p_2 + p_3^k$,其中 p_1, p_2, p_3 为奇素数.

在 Виноградов 的证明中,有一点稍为不调和的地方.他创造的线性素变数三角和估计方法,从本质上来说是一种筛法.这样一来,处理基本区间 E_1 上的积分 $T_1(N)$ 用的是分析方法,而处理余区间 E_2 上的积分 $T_2(N)$ 用的却是初等的非分析方法①.为了消除这种不一致性,就需要用分析方法来得到线性素变数三角和 $S(\alpha, N)$ 的估计式㉓.1945 年,Ю.В.Линник 提出了所谓 L - 函数零点密度估计方法,他利用这一方法同样证明了估计式㉓,从而对三素数定理给出了一个有价值的新的完全分析的证明.Линник 的方法在解析数论的许多问题中都有重要应用.他原来的证明是十分复杂的,后来一些数学家进一步简化了 Линник 的证明,但也仍然是利用零点密度估计方法并要用到比较复杂的分析结果.1975 年,Vaughan 不用 L - 函数零点密度估计方法,给出了估计式㉓一个分析证明,但他仍需用到复杂的 L - 函数的四次中值公式.1977 年,潘承彪仅利用 L - 函数的初等性质及简单的复变积分法对估计式㉓给出了一个新的简单的分析证明.

一些作者还讨论了有限制条件的三素数定理.例如,证明了充分大的奇数可以表为三个几乎相等的素数之和.吴方及一些数学工作者还讨论了其他形式的推广.

由上所述,圆法对于猜想(B)的研究是极为成功的.而用它来研究猜想(A)却收效甚微,得不到任何重要的结果.在 Виноградов 证明了三素数定理后不久,利用他的思想,一些数学家差不多同时证明了:几乎所有的偶数都可以表为二个奇素数之和.确切地说,他们证明了,对任给的正数 A,我们有

$$E(x) \ll \frac{x}{\log^A x} \qquad ㉕$$

华罗庚的结果比旁人要强,他还证明了对任意给定的正整数 k,几乎所有的偶数都可表为 $p_1 + p_2^k$, p_1, p_2 为奇素数.

1972 年 Vaughan 证明了:存在正常数 c 使

$$E(x) \ll x\exp(-c\sqrt{\log x}) \qquad ㉖$$

1973 年,Ramachandra 把结果㉕推广到了小区间上.

1975 年,Montgomery 和 Vaughan 进一步改进了㉖,证明存在一个正数 $\Delta > 0$,使

$$E(x) \ll x^{1-\Delta} \qquad ㉗$$

① 最近 R.C.Vaughan(C.R.Acad.Sc.Paris,Sér.A,285(1977),981 - 983)又给出了一个漂亮的初等证明.

这是一个很漂亮的结果.在这里他们第一次把大筛法应用于对圆法中基本区间的讨论.为了证明这一结果几乎用到了 L - 函数零点分布的全部知识.最近在文献中,定出了常数 $\Delta > 0.01$.

通常我们把可以表为两个奇素数之和的偶数称为哥德巴赫数,而 $E(x)$ 称为不超过 x 的哥德巴赫数的例外集合.以上关于猜想(A)的结果是证明了:几乎所有的偶数都是哥德巴赫数,并逐步改进了对哥德巴赫数的例外集合 $E(x)$ 的阶的估计.

此外,还应该提到的是,Линник 首先利用圆法研究了相邻哥德巴赫数之差这一有趣的问题.

2.2 筛法

其次我们来谈谈筛法.在提出圆法的同时,为了研究猜想(A),数论中的一个应用广泛的强有力的初等方法——筛法也开始发展起来了.要解决猜想(A)实在是太困难了,因此人们设想能否先来证明每一个充分大的偶数是两个素因子个数不多的乘积(通常这种数称为殆素数)之和,由此通过逐步减少素因子的个数的办法来寻求一条解决猜想(A)的道路.设 a,b 是两个正整数,为方便起见,我们以命题 $\{a,b\}$ 来表示下述命题:每一个充分大的偶数是一个不超过 a 个素数的乘积与一个不超过 b 个素数的乘积之和.这样,如果证明了命题 $\{1,1\}$,也就基本上解决了猜想(A).

大家知道,筛法本是一种用来寻找素数的十分古老的方法,是二千多年前的希腊学者 Eratosthenes 所创造的,称为 Eratosthenes 筛法.我们的素数表基本上就是用这种方法编造的.但是,由于这种原始的筛法没有什么理论上的价值,所以在很长的时期里都没有进一步的发展.用现在的语言简单地来说,我们可以这样描述筛法:以 $\mathscr{A}$ 表示一个满足一定条件的由有限多个整数组成的集合(元素可重复),以 $\mathscr{P}$ 表示一个满足一定条件的无限多个不同的素数组成的集合,$z \geqslant 2$ 为任一正数.令

$$P(z) = \prod_{\substack{p < z \\ p \in \mathscr{P}}} p \qquad ㉘$$

我们以 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 表示集合 $\mathscr{A}$ 中所有和 $P(z)$ 互素的元素的个数,即

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ (a,P(z))=1}} 1 \qquad ㉙$$

这里 $P(z)$ 好像是一个"筛子",凡是和它不互素的数都被"筛掉",而和它互素的数将被留下,这正是"筛法"这一名称的含意.这里的"筛子"是和集合 $\mathscr{P}$ 及 z 有关,z 愈大"筛子"就愈大,被"筛掉"的数也就越多,而 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 就是集合 $\mathscr{A}$ 经过"筛子" $P(z)$ "筛选"后所"筛剩"的元素个数.我们把 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 称为筛

函数. 粗略地说,筛法就是研究筛函数的性质与作用,它的一个基本问题就是要估计筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 的上界和正的下界(因为 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 总是非负的).

现在,我们先来看一下命题$\{a,b\}$是怎样和筛函数联系起来的. 设 N 为一大偶数,取集合

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}(N)=\{n(N-n),2\leqslant n\leqslant N-2\} \quad ㉚$$

$\mathscr{P}$为所有素数组成的集合. 再设 $\lambda\geqslant 2$,取 $z=N^{1/\lambda}$. 如果能证明

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{1/\lambda})>0 \quad ㉛$$

则显然就证明了命题$\{a,a\}$,这里

$$a=\begin{cases}\lambda-1, & \lambda\text{ 是正整数}\\ [\lambda], & \lambda\text{ 不是正整数}\end{cases} \quad ㉜$$

若当 $\lambda=2$ 时,㉛ 成立,则证明了命题$\{1,1\}$. 另一方面,若求得 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{1/\lambda})$ 的一个上界,那么我们就相应地得到了一个大偶数表为两个素因子个数不超过 a 个的数之和的表法个数的上界.

如果我们取集合

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}(N)=\{N-p,p\leqslant N-2\} \quad ㉝$$

那么,如果能证明

$$S(\mathscr{B};\mathscr{P},N^{1/\lambda})>0 \quad ㉞$$

则显然就证明了命题$\{1,a\}$. 同样,若求得 $S(\mathscr{B};\mathscr{P},N^{1/\lambda})$ 的一个上界,那么我们亦就相应地得到了偶数表为一个素数与一个素因子不超过 a 个的数之和的表法个数的上界.

由以上的讨论可清楚地看出,命题$\{a,b\}$和求筛函数的正的下界及上界这一问题是紧密相关的. 而且必须着重指出的是,这里要求 z 所取的值相对于 N 来说不能太小,一定要取 $N^{1/\lambda}$ 那么大的阶,显然 λ 能取得越小越好. 如果一种筛法理论仅能对较小的 z(相对于 N),比如说取 $\log^c N$ 大小时才能证明筛函数有正的下界估计,那么这种筛法理论对于我们的问题来说是无用的. 而古老的 Eratosthenes 筛法却正是这样一种筛法.

直到1920年前后,才由 Brun 首先对 Eratosthenes 筛法作了具有理论价值的改进,并利用他的方法证明了命题$\{9,9\}$这一惊人的结果,从此开辟了利用筛法研究猜想(A)及其他许多数论问题的极为广阔且富有成果的新途径. Brun 对数论做出了重大的贡献. 人们称他的方法为 Brun 筛法. Brun 筛法有很强的组合数学的特征. 比较复杂,而且应用起来并不方便. 不过 Brun 的思想是很有启发性的,可能仍有进一步探讨的必要.

1950年前后,A. Selberg 利用求二次型极值的方法对 Eratosthenes 筛法作了另一重大改进,由他的方法可得到筛函数的上界估计. 这种筛法称为 Selberg 筛法. 把这种方法和 Бухштаб 恒等式结合起来就可得到筛函数的下界估计.

Selberg 筛法不仅便于应用,而且迄今为止它总是比 Brun 筛法得到更好的结果.目前,对某种筛函数(也是我们的问题所需要的)所得到的最好的上界及下界估计是由 Jurkat-Richert 利用 Selberg 筛法所得到的.本书将仅讨论 Selberg 筛法,主要目的是证明 Jurkat-Richert 的结果,为证明命题{1,2}作准备.

这里还要指出一点,在前面的讨论中,我们是把命题{a, b}和对一个筛函数的估计直接相联系的,而这样做使我们所得到的结果是比较弱的.1941 年,Kuhn 首先提出了所谓"加权筛法",利用这种方法使我们可以在同样的筛函数上、下界估计的基础上得到更强的结果.后来许多数学工作者对各种形式的"加权筛法"进行了深入的研究,从而不断提高了筛法的作用.陈景润正是由于提出了他的新的加权筛法才证明了命题{1,2},现在所有的最好结果都是利用加权形式的 Selberg 筛法得到的.

下面我们简述命题{a, b}的发展历史.

1920 年,Brun 证明了命题{9,9};

1924 年,Rademacher 证明了命题{7,7};

1932 年,Estermann 证明了命题{6,6};

1937 年,Ricci 证明了命题{5,7},{4,9},{3,15}以及{2,366};

1938 年,Бухштаб 证明了命题{5,5};

1939 年,Тартаковский 及 1940 年,Бухштаб 都证明了命题{4,4};

Kuhn 在 1941 年提出了"加权筛法",后来证明了命题{a, b}, $a+b\leqslant 6$.

以上的结果都是利用 Brun 筛法得到的.

1950 年,Selberg 宣布用他的方法可以证明命题{2,3},但在长时期内没有发表他的证明.以下的结果都是利用 Selberg 筛法得到的.

1956 年,王元证明了命题{3,4};

1957 年,А.И.Виноградов 证明了命题{3,3};

1957 年,王元证明了命题{2,3}以及命题{a, b}, $a+b\leqslant 5$.

但是,以上这些结果中,都有一个共同的弱点,就是我们还不能肯定两个数中至少有一个为素数.为了得到这种结果——即要证明命题{1, b},如前所述,我们就需要估计筛函数 $S(\mathscr{B};\mathscr{P},z)$.在估计筛函数的上界和下界时,同圆法一样,也要计算主要项和估计余项,并证明相对于主项来说,余项是可以忽略的.在证明以上的命题{a, b}时,余项的估计是初等的比较简单的.但为了证明命题{1, b},在余项估计上碰到了很大的困难.这个困难实质上就是要估计下面的和式,即

$$\mathscr{R}(x,\eta)=\sum_{d\leqslant x^{\eta}}\mu^2(d)\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\psi(y;d,l)-\frac{y}{\phi(d)}\right| \qquad ㉟$$

为了估计这一和式,就需要利用复杂的解析数论方法.这种类型的估计通常称

为算术级数中素数分布的均值定理.

1948 年①,匈牙利数学家 A. Rényi 首先在这方面作出了开创性的极为重要的推进.他利用 Линник 所创造的大筛法研究 L - 函数的零点分布,从而证明了:一定存在一个正常数 η_0,使对任意的正数 $\eta < \eta_0$ 及任意正数 A,有估计式

$$\mathscr{B}(x,\eta) \ll \frac{x}{\lg^A x} \qquad ㊱$$

成立.进而,他利用 Brun 筛法和这一结果证明了命题{1, b}.但这里的正数 η_0 和正整数 b 都是没有定出具体数值的常数,所以这是一个有趣的定性结果.若用他原来的方法去确定常数,η_0 将会很小而 b 将是很大的.这样,具体地定出尽可能大的 η_0,并确定 b 和 η_0 之间的联系,就是证明命题{1, b} 的关键问题了.

1962 年,潘承洞证明了当 $\eta_0 = \frac{1}{3}$ 时,估计式㊱成立,并由此得到命题{1,5};

1962 年,王元从进一步改进筛法着手,由 $\eta_0 = \frac{1}{3}$ 推出了命题{1,4}.同时,他还得到了 η_0 和 b 之间的一个非显然联系:从 $\eta_0 = \frac{1}{3.327}$ 及 $\eta_0 = \frac{1}{2.475}$ 可分别推出命题{1,4} 及{1,3}. 1963 年,Левин 把这一结果改进为 $\eta_0 = \frac{1}{3.27}$ 及 $\eta_0 = \frac{1}{2.495}$;

1962 年潘承洞及 1963 年 Барбан 互相独立地证明了 $\eta_0 = \frac{3}{8}$ 时估计式㊱成立,并利用较为简单的筛法就证明了命题{1,4};

1965 年,Бухштаб 由 $\eta_0 = \frac{3}{8}$ 推出了命题{1,3};

1965 年,А.И.Виноградов 及 E. Bombieri 都证明了 $\eta_0 = \frac{1}{2}$ 时估计式㊱成立,Bombieri 的结果要稍强些,这一结果通常称为 Bombieri-Виноградов 定理,它的重要性是在于它在某些数论问题中起到了可以代替 GRH 的作用.由这一结果再利用王元或 Левин 的工作,他们就得到了命题{1,3}.这里应该指出的是,Bombieri 的工作对大筛法,特别是大筛法在数论中的应用做出了重要的贡献.

1966 年,陈景润宣布他证明了命题{1,2},当时没有给出详细证明,仅简略地概述了他的方法. 1973 年,他发表了命题{1,2} 的全部证明.应该指出的是,在他宣布结果到发表全部证明的整整七年之中,没有别的数学家给出过命题{1,2} 的证明,而且似乎国际数学界仍然认为命题{1,3} 是最好的结果.因此,

① 在此之前,Estermann 在 GRH 下证明了命题{1,6},Бухштаб 亦证明了一个有趣的结果.后来王元在 GRH 下证明了命题{1,4} 及{1,3}.

当陈景润在 1973 年发表了他的很有创造性的命题{1,2} 的全部证明后，立即在国际数学界引起了强烈的反响，公认为这是一个十分杰出的结果，是对哥德巴赫猜想研究的重大贡献，是筛法理论的最卓越运用，并且一致地将这一结果称为陈景润定理. 由于这一结果的重要性，在很短的时间内，国内外先后至少发表了命题{1,2} 的五个简化证明.

陈景润的贡献，就方法上来说，在于他提出并实现了一种新的加权筛法. 我们将会看到，为了实现他的加权筛法，在估计余项上出现了 Bombieri-Виноградов 定理所不能克服的困难. 后来，利用陈景润的加权筛法证明命题{1,2} 的基础是证明下面新的一类均值定理：

$$\sum_{d\leqslant x^{1/2}\log^{-B}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{a\in E(x)}g(a)\left(\phi(y;a,l,d)-\frac{y}{\phi(d)a}\right)\right|\ll\frac{x}{\log^{A}x} \qquad ㊲$$

这亦是陈景润最近改进 $D(N)$ 上界估计的基础.

2.3 密率

最后，我们极简单地谈谈密率. 密率是 Л.Г.Шнирельман 在 1930 年所首先提出的关于自然数集合的一个十分重要的基本概念. 密率理论后来有广泛的发展和应用.

在 Landau 提出猜想(C)，并预言证明它是当代数学家力所不及的之后，仅仅过去了二十年，Шнирельман 在 1933 年就利用他的密率理论和 Brun 筛法证明了猜想(C). 但他没有定出其中的常数 k. 如果我们以 s 表示最小的整数，使每一个充分大的正整数都可表为不超过 s 个素数之和(s 通常称为 Шнирельман 常数)，从 Шнирельман 的方法可以证明 $s\leqslant 800\,000$，这一结果后来得到了不断的改进.

1935 年，Романов 证明了 $s\leqslant 2\,208$；

1936 年，Heilbronn，Landau 及 Sekerk 证明了 $s\leqslant 71$；

1936 年，Ricci 证明了 $s\leqslant 67$；

1950 年，Shapio 证明了 $s\leqslant 20$；

1956 年，尹文霖证明了 $s\leqslant 18$.

以上结果都是用初等的密率理论结合筛法得到的. 如再利用解析数论的一些高深的结果，可对 s 的数值作进一步的改进. 这方面的结果是：

1968 年，Siebert 及 Кузяшев，Чечуро 都证明了 $s\leqslant 10$；

1976 年，Vaughan 证明了 $s\leqslant 6$.

还应该提出的是，一些作者定出了猜想(C) 中的常数 k，这方面的结果是：

1972 年，Климов，Пильтяй 及 Шептицкая 证明了 $k\leqslant 115$；

1975 年，Климов 证明了 $k\leqslant 55$；

1977 年，Vanghan 证明了 $k \leqslant 27$①.

由于从三素数定理立即可推出 $s \leqslant 4$，所以本书将不讨论密率及其所得到的结果.当然，关于常数 k 的结果，目前只有用密率的方法才能得到.

以上我们简单地回顾了二百多年来研究哥德巴赫猜想的历史，介绍了主要的研究方法和取得的主要成果.对哥德巴赫猜想的研究有力地推动了数论、函数论等一些数学分支的发展.它和无数例子一样，再一次生动地证明了合理的假设在科学发展中的重要地位和作用.一个有价值的假设，不管它最终被证明是正确的，错误的，或是部分正确，部分错误，都将引导人们去探索新的科学真理，推动科学的向前发展.

从 1966 年陈景润宣布他证明了命题{1,2}，到今天已经过去十三个年头了.应该说在这时期中，对哥德巴赫猜想的研究没有重大的实质性的进展.事情往往是如此，对于研究一个问题来说，迈出开创性的第一步和走上彻底解决它的最后一步都同样是最困难的.虽然，表面上命题{1,2}和命题{1,1}—— 哥德巴赫猜想的基本解决 —— 仅"1"之差，但是，看来完成这最后的一步所要克服的困难可能并不比我们已经走过的道路要来得容易.我们也没有多少把握可以肯定，沿着现有的方法一定可以最终解决哥德巴赫猜想.至今对于猜想(A)，我们甚至还不能给出一个假设性的证明.

只要稍微看一下现有的解析数论的基础理论就不难发现，我们对于 Dirichlet 特征，素数分布，ζ 函数，L - 函数理论等方面的知识仍然了解得非常之少.圆法，在对余区间上的积分 $D_2(N)$ 的处理 —— 也就是对线性素变数三角和 $S(\alpha,N)$ 的估计 —— 碰到了巨大的困难.初等的筛法和密率(也需要筛法)虽然和解析方法相结合使它变得十分强有力，但现在的筛法毕竟是十分粗糙的，也许这种方法有其天然的局限性.我们对素数的算术性质同样也知道得极其肤浅.或许可以认为，今天对猜想的研究正处于一个相对的停滞阶段.这就是说，需要我们对原有的方法和结果做出重大的改进，或提出新的方法才有可能使哥德巴赫猜想的研究得到新的推进.因此，把迄今为止研究哥德巴赫猜想的主要方法和得到的主要成果作一总结是必要的和有益的.

二百多年来，许许多多的数学家对哥德巴赫猜想从各个不同角度做了大量的研究，从方法到结果都是极其丰富的.要作一个全面的、恰如其分的、有创见和启发性的总结，显然是不容易的.这不是本书的任务，也是我们力所不及的.在这一本小书中，我们打算讨论一下圆法和筛法(Selberg 筛法)，以及与其有关的大筛法、ζ 函数、L - 函数理论、线性素变数三角和估计、复变积分法等.我们要证明的主要结果，是三素数定理和命题{1,2}，同时介绍一下 $D(N)$ 上界估计

① 目前最好的结果是 J.M.Deshouiuers(见 Math. Reciews,57 5933) 证明的 $k \leqslant 26$.

的改进及有关哥德巴赫数的若干结果.就方法和结果来说,我们比较侧重于基本方法的介绍.有一些结果(如线性素变数三角和估计,算术级数中素数分布的均值定理等)可以用不同的方法加以证明,我们认为这些方法都是重要的,所以都作了介绍.有时,对所用的方法作更细致,技巧更复杂的讨论后,可以得到更强的结果,但为了把基本方法介绍清楚,我们宁可使这里所证明的结果不是最好的(如命题{1,3}{1,2}中的系数,$D(N)$上界估计中的系数等).我们希望本书中所介绍的方法不仅对研究哥德巴赫猜想,而且对整个解析数论都是重要的.有些数学家把哥德巴赫猜想看做是一个更广泛的猜想的一部分,本书将丝毫不涉及这种推广,从目前来看,我们认为猜想的最原始、最简单的形式也是最重要的.大家知道,关于偶数哥德巴赫猜想的每一个结果都可相应地推广到孪生素数上去,但本书亦将不讨论这一著名问题.

3 评潘承洞、潘承彪著《哥德巴赫猜想》①

——潘承洞

潘承洞、潘承彪的专著《哥德巴赫猜想》(科学出版社,纯粹数学与应用数学专著丛书,第7号,1981)出版以来,在国内外已有相当影响与高度评价②③.

哥德巴赫猜想导源于哥德巴赫在1742年给欧拉的一封信,在这封信中,他提出了表整数为素数和的两个猜想,用略为修改的语言可以将它们表述为:

(A)每一偶数大于等于6都是两个奇素数之和.

(B)每一奇数大于等于9都是三个奇素数之和.

命题(B)是命题(A)的推论.

在1900年第二届国际数学大会上,希尔伯特在他的著名演讲中,首先阐明了寻找一个好的数学问题,作为数学研究的对象与源泉,对于推动数学的发展是何等重要!他特别列举费马猜想为例子,他指出“这样一个非常特殊,似乎不十分重要的问题会对科学产生怎样令人鼓舞的影响.受费马问题的启发,库默尔引进了理想数,并发现了把一个分圆域的数分解为素理想因子的唯一分解定理,这定理今天已被戴德金与克隆尼克推广到任意代数数域,在近代数论中占着中心地位,其意义已远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域”④.为此,希尔伯特向20世纪的数学家提出了二十三个问题.历史的发展证明了这

① 原载《数学进展》,2,1987,207-210.
② Kee Wai Lau, Math. Rev; 1984, h: 10064.
③ P. Shiu, Zent, für Math; 4, 1984, 7, 10040.
④ 康斯坦西·瑞德·希尔伯特.上海:上海科学技术出版社,1982.

些问题的重要性.恰如上述,它们在相当程度上,推动了纯粹数学的发展,其根本意义在于伴随着这些问题研究的进展,一些重要的数学概念与强有力的并带有一般性的数学方法产生了.

到19世纪末,分析方法,特别是复变函数论用于数论,使数论产生了深刻的变化而进入一个新的阶段.解析数论趋于成熟并有相当深度,特别是素数分布理论方面的成就更为突出.例如,切比雪夫证明了不超过 x 的素数个数 $\pi(x)$ 的无穷大阶为 $\frac{x}{\log x}$,迪利克雷证明了任何公差与首项互素的算术级数中含有无穷多素数,黎曼更指出了有关素数分布的一些问题与一个半纯函数 $\zeta(s)$ 的零点分布之间有着各种深刻的内在联系,此处 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}(s=\sigma+\mathrm{i}t,\sigma>1)$.当 $\sigma\leqslant 1$ 时,可以用解析延拓来定义 $\zeta(s)$.黎曼特别指出,$\zeta(s)$ 在半平面 $\sigma>0$ 上的零点皆位于直线 $\sigma=1/2$ 上.这个猜想已被愈来愈多的数学家认为是纯数学中最有挑战性的问题之一.除这个猜想外,黎曼的其他猜想均被阿达玛与冯·曼哥尔德证明了.从而阿达玛与德·拉·瓦里·普桑独立地证明了高斯与勒让德尔的猜想:$\pi(x)\sim\frac{x}{\lg x}$,这又称为"素数定律",证明过程中,大量用到复变函数论,特别是整函数理论.

希尔伯特高瞻远瞩,预见到黎曼猜想的研究将导致数论,甚至数学的巨变.他也预见到素数变数不定方程的重要性.最简单的情况为两个素数变数的一次方程

$$ap+bq=c$$

此处 a,b,c 为给定整数,要求 p,q 为素数的解.分别取 $a=b=1$ 及 $c=2n$,与 $a=1,b=-1$ 及 $c=2$,则得

$$2n=p+q \text{ 及 } 2=p-q$$

对于任意 $n\geqslant 3$,前者皆有奇素数解 p,q 就是猜想(A).后者有无穷多组素数解答(p,q) 就是孪生素数猜想,即存在无穷多对相差为2的孪生素数对.这两个猜想是姐妹问题,她们与黎曼猜想一起构成了希尔伯特第八问题.

在1912年,第五届国际数学大会上,朗道又将命题(A)与孪生素数猜想作为四个素数论中待解决的两个难题加以推荐①.又在1921年哥本哈根数学会上,哈代在其演讲中宣称猜想(A)的"困难程度是可以和任何数学中未解决的问题相比拟的"②.这么多大数学家瞩目哥德巴赫猜想,正是预见与期望这个问题作为推动数学发展的动力.

---

① E.Landau, Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion, Proc. 5 - th Intern Congs、Math; camb; 1, 1912, 93-108.

② G.H.Hardy, Golbrach's conjecture, Math、Tid; B, 1922, 1-16.

果然不出所料，在19世纪素数论伟大成就的基础上，从1920年开始，哥德巴赫猜想的研究有了重大突破.伴随着这一问题本身成果的获得，一些新的数学概念与崭新的强有力的数学方法产生出来了，其意义远比这个问题本身的结果重要得多.哈代与李特伍德的"圆法"与维诺格拉多夫的素数变数的指数和估计方法就是研究哥德巴赫猜想的产物(推动这两个方法产生的另一个问题为希尔伯特异常重视的华林问题).这两个方法最终导致维诺格拉多夫于1937年证明了"三素数定理"，即猜想(B)对于充分大的奇数成立.命(a,b)表示命题："每一充分大的偶数都是一个不超过a个素数的乘积与一个不超过b个素数的乘积之和."布朗在对古老的埃拉托塞尼筛法作了重大改进后，首先用于猜想(A)，并证明了(9,9)，这些强有力的数学方法的发展，不仅对数论，而且对不少数学分支都有重要应用.

早在20世纪30年代，华罗庚就证明了几乎所有的偶数，猜想(A)成立.详言之，命不超过x，使(A)不成立的偶数个数为$E(x)$，则对于任何$c>0$皆有$E(x)=O(x/\log^c x)$.20世纪50年代初，在他主持数学研究所工作时，高瞻远瞩地预见到哥德巴赫猜想的可能发展，亲自组织了这个问题的讨论班，由于他的坚强领导与富于见地的计划，使一系列重要的数论结果都出自中国数论学家之手.特别在筛法与猜想(A)方面的成就，得到国内外高度评价.早在20世纪50年代初，笔者就证明了(2, 3)，首次打破了布赫夕塔布保持的1940年的纪录(4, 4).20世纪60年代初，潘承洞证明了(1, 4)，大大改进了瑞尼的著名结果$(1,c)$，其中c是一个大常数.特别是陈景润在1966年，发表了(1,2)，被国际上称为"陈氏定理"，并被认为是"筛法发展的顶峰"①.看来，圆法与筛法均已山穷水尽，用它们几乎是不可能证明猜想(A)的.数学家殷切地期望新思想与新方法的产生.

处于这个时期，总结好以往的成就，使后来者能较快掌握以往的成就，少走弯路，继续前进，肯定是十分必要的.上述重要成就与方法，虽已散见于众多专著，但潘承洞与潘承彪的专著却是全面系统论述哥德巴赫猜想的第一本著作，其出版引起国内外数学界的注目是可想而知的.国外正期待着其英文版早日问世.

仅仅只用三百几十页篇幅，全面总结哥德巴赫猜想研究六十多年来的大量杰出成就，确是十分艰巨的事.两位作者出色地完成了写作任务.本书绝非材料的简单堆积，而是一个再创造的研究工作专著.该书是在假定读者已经了解初等数论与素数分布论的基础上撰写的.

该书第一、二章中，讲述了特征与高斯和后，即开门见山，引入朋比尼与罗

① H. Halberstam and H. E. Richert, Sieve Methods, Acad. Press, 1974.

斯关于林尼克与瑞尼的大筛法的重大改进的阐述.第三、四章讨论了 ζ - 函数与 L - 函数的性质,特别是它们的中值公式与零点分布性质.第五、六章即进入"圆法"与素数变数指数和的估计方法的讨论,从而证明了"三素数定理".对于素数变数指数和的估计,书中讲述了初等方法与分析方法,其中最初等的分析证明方法则是潘承彪给出的.书中对"三素数定理"给出了有效的与非有效的两种证明.所谓有效证明,即可以给出 n_0,当 $n > n_0$ 时,猜想(B)成立.第六章还包括了华罗庚关于猜想(B)的推广:任何充分大的奇数 N 均可表为 $N = p_1 + p_2 + p_3^k$,此处 k 为任意给予正整数.第七章为赛尔伯格筛法,这里讲的是黎切尔特与朱尔开特的形式,即系数有明显表达式的精密筛法.第八章为关于算术级数素数定理重要的朋比尼 - 维诺格拉多夫中值公式.在不少素数论的问题中,这一公式可以用来代替未经证明的广义黎曼猜想.在本章中还讲了潘承洞等建立的一个新的中值公式,一方面这一公式包有朋比尼 - 维诺格拉多夫公式,另一方面可以用这一公式来统一处理一系列重要的问题,其中包括下一章讲的陈景润的两条重要定理①.这个中值公式的想法是潘承洞提出的,他的出发点是下面的恒等式,即

$$-\frac{L'}{L} = -\frac{L'}{L}(1 - LG) - L'G = \left(-\frac{L'}{L} - F\right)(1 - LG) - L'G + F - FLG$$

沃恩也独立地提出这个想法并加以发展.第九章为陈景润的两条著名定理,即"陈氏定理"与将偶数表示为两个素数之和的表法小于等于 $7.928_c(N)\dfrac{N}{\log^2 N}$.恰如上述,书中基于"潘氏公式"给出了这两条定理的证明,比原来的证明有实质性的化简.第十章再一次深入讨论 L - 函数的零点估计.第十一、十二两章,则研究哥德巴赫数(即使(A)成立的偶数),其中包括沃恩与蒙哥玛利关于 $E(x)$ 的进一步改进:存在 $\epsilon > 0$ 使 $E(x) = O(x^{1-\epsilon})$,陈景润与潘承洞首先给出 ϵ 的数值.作者还研究了小区间 $[x, x + f(x)]$ 中哥德巴赫数的存在性问题,此处 $f(x) = O(x)$.作者讲了凯蒂的结果:在黎曼猜想之下,取 $f(x) = O(\log x)^2$ 即可保证小区间中有哥德巴赫数.在 ξ - 函数的密度猜想之下或不作任何猜想,潘承洞提出了统一处理哥德巴赫数的方法,它包有现有的重要结果.书中阐述了这个方法.

书的最前面有一个详细的导论,阐述问题的历史及方法概要,指引读者对哥德巴赫问题研究的全貌有所了解.书末有一个经挑选过的详细而有用的参考文献.恰如彼得·肖指出:"书中每一章的材料都是很好地加以组织并具备一个

① Pan cheng Dong(潘承洞),A new mean value theorem and its applications, "Receut progress in analytic number theory" I, Edilid by H. Halberstam and C. Hooley, Acad. press, 1981, 275 - 288.

好的导引,包有许多有价值的评述,指出真正困难所在及各种结果之间有启发性的内在联系.写作风格透彻并具启发性,诸定理的证明是秀美的.最近几年,在解析数论方面已出现了一系列很有影响的书(例如,德文波特的《乘积数论》,蒙哥玛利的《乘积数论选论》与黎切尔特及哈贝斯坦的《筛几法》).这本书是这个文库的一个重要添加者.作为一个教程,本书不仅对中国初从事解析数论研究的数学家有重要影响,它的英文版本对西方世界亦具有同样的教益."这绝非溢美之词,两位作者是当之无愧的.

任何书都有一定的范围,本书未讨论史尼尔曼的整数"密率"概念,史尼尔曼结合他自己的密率及布朗筛法,于1930年证明了正整数大于1,都是不超过 c 个素数之和,其中 c 为常数.这是第一个堆垒素数论定理,具有重大的历史意义,但用这个方法是达不到"三素数定理"的深度的,现在不讨论是可以的.本书未论及哥德巴赫问题的推广,将这一猜想与华林问题结合起来可以研究方程

$$N = p_1^k + \cdots + p_s^k$$

的各种可解性问题,其中 $p_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 为素数.还可以研究更为广泛的堆垒素数论问题.读者可以读华罗庚的优秀专著①,我们还可以在代数数域上建立类似的哥德巴赫猜想.三井孝美将"三素数定理"推广至任意代数数域②.另外,有兴趣阅读与本书有关的各重要原始文献的读者,请参阅笔者编辑的书③.

4 哥德巴赫著名猜想④

——[加拿大]P.里本伯姆

哥德巴赫在1742年给欧拉的信中,表示他相信:

(A) 每个整数 $n > 5$ 均是三个素数之和.

欧拉回信说,容易看出这等价于:

(A′) 每个偶数 $2n \geqslant 4$ 均是两个素数之和.

因为若(A′)成立,而 $2n \geqslant 6$,则 $2n - 2 = p + p'$,其中 p 和 p' 为素数.从而 $2n + 1 = 3 + p + p'$,即(A)成立.反之若(A)成立,则当 $2n \geqslant 4$ 时 $2n + 2 = p + p' + p''$,其中 p, p', p'' 均为素数.然后可知这三个素数中一定有一个(比如说是 p'')为2.于是 $2n = p + p'$.

---

① Hua Loo Keng(华罗庚),Additive theory of prime numbers, Trud. Inst. Mat,Steklov,22,1947.

② T. Mitsui(三井孝美),On the Goldbach problem in an algebraic number field,I.II.J.Math.Soc.Japan, 1960,290-372.

③ Wang yuan(王元),Goldbach conjecture,World Sci.pub.comp;1984.

④ 原载[加拿大]P.里本伯姆.博大精深的素数.孙淑玲,冯克勤,译.北京:科学出版社,2007年1月.

注意(A′)对无穷多个偶数 $2p = p + p$ 是对的(p 为所有素数).

一个有关的但是比较弱的问题是:是否每个大于 5 的奇数均为三素数之和?这叫做奇哥德巴赫猜想.由它可推出:每个大于 6 的整数均可表示成不超过 4 个素数之和.

在精细的解析方法和筛法研究出来之前,这些猜想的进展甚微.虽然已经作了许多努力,这些问题至今仍未解决.

人们的努力分成三条主线,它们可以(也许不适当)用三个关键词来表达:"渐近"、"殆素数"、"基".

(1) 渐近性命题是指对充分大整数均成立的命题.

这方面的第一个重要结果是 Hardy 和 Littlewood 在 1923 年的一个渐近定理.用圆法和黎曼猜想的一个修改的形式,他们证明了存在 n_0,使每个奇数 $n \geqslant n_0$ 均为三个素数之和.

后来在 1937 年,Vinogradov 不用黎曼猜想证明了上述结果.1985 年 Heath-Brown 给出了另一个证明,但是常数 n_0 不是有效的.

Borodzkin 仔细研究了 Vinogradov 的证明,在 1956 年给出 n_0 可取 $3^{3^{15}} \approx 10^{7\,000\,000}$.1989 年陈景润和王天泽得到 $n_0 = 10^{43\,000}$, 1996 年他们又得到 $n_0 = 10^{7\,194}$.但是这仍旧太大,不足以能使计算机来验证小于 n_0 的奇数.

1997 年,Deshouillers,Effinger,te Riele 和 Zinoview 解决了这个问题:每个大于 5 的奇整数均是三个素数之和,但是需要假设类似于黎曼猜想的一个猜想成立.

(2) 对于 $k \geqslant 1$,不超过 k 个素数的乘积(素因子可以相同)叫作 k - 殆素数.所有 k - 殆素数组成的集合表示成 P_k.

用殆素数的方式考虑问题是去证明存在 $h, k \geqslant 1$,使得每个充分大的偶数都可表示成一个 k - 殆素数与一个 h - 殆素数之和.人们希望的当然是 k 和 h 均为 1.

在这个方向,第一个结果是由 Brun(1919,C.R.Acad.Sci.Paris)给出的:每个充分大的偶数都是两个 9- 殆素数之和.利用不断改进的筛法,这个问题也不断进展.1950 年 Selbery 证明了每个充分大的偶数都在集合 $P_2 + P_3$ 中,即是 P_2 中一个整数和 P_3 中一个整数之和.1947 年 Rényi 证明了:存在整数 $k \geqslant 1$,使得充分大的偶数均在 $P_1 + P_k$ 之中.后来的工作是给出 k 的值.

目前最好的结果是陈景润给出的(1966 年宣布,证明细节发表于 1973 年和 1978 年).在他的著名文章中给出最接近于哥德巴赫猜想的如下结果:

每个充分大的偶整数 $2n$ 都可表示成 $2n = p + m$,其中 p 为素数而 $m \in P_2$.

与此同时,陈景润还证明了一个"伴随"结果:存在无穷多个素数 p,使得 $p + 2 \in P_2$.这十分接近于孪生素数有无穷多的猜想.用同样方法还可以证明:

对每个偶数 $2k \geqslant 2$，均有无穷多个素数 p，使得 $p+2k \in P_2$. 所以 $2k$ 可以用无穷多种方式表示成 $m-p$，其中 p 为素数，而 $m \in P_2$.

陈氏定理的证明可见 Halberstam 和 Richart 的书，也可见 Ross(1975) 给出的简化证明.

(3)"基"方法始于 Schnirelmann(1930) 一个著名的定理，证明可见 Landau 的书(1937) 或 Gelfond 和 Linnik 的书(1965 年英译本)：

存在一个正整数 S，使得每个充分大的整数都不超过 S 个素数之和.

由此可以推出，存在一个正整数 $S_0 \geqslant S$，使得每个大于 1 的整数都是不超过 S_0 个素数之和. S_0 叫作 Schnirelmann 常数. 哥德巴赫猜想可表示成：$S_0=3$.

Khinchin 在他短小精练的书(1947) 中对于 Schnirelmann 思想和数列密度用一章作了有趣和通俗易懂的介绍.

Schnirelmann 常数的有效决定方面有许多计算结果.

记录

目前最好估计 $S_0 \leqslant 6$ 是 Ramaré 于 1995 年给出的. 在此之前的最好结果是 Riesel 和 Vaugham(1983) 的 $S_0 \leqslant 19$.

1949 年，Richert 证明了 Schnirelmann 定理的一个类比：每个整数 $n>6$ 均可表成不同素数之和. 请读者注意：Schinzel 于 1959 年证明了哥德巴赫猜想可以推出(从而等价于)：每个整数 $n>17$ 都可表示成恰好三个不同素数之和. 所以 Richert 的结果为哥德巴赫猜想的一个推论.

(4) 表法个数.

现在讨论 $2n \geqslant 4$ 表成两个素数和表法个数 $r_2(2n)$. 在哥德巴赫猜想被证明之前，$r_2(2n)$ 可能为 0.

Hardy 和 Littlewood 于 1923 年给出下面的渐近公式. 他们的证明要假定黎曼猜想一个变化的形式，后来由 Vinogradov 去掉了这个假定

$$r_2(2n) \leqslant C\frac{2n}{(\lg 2n)^2}\lg\lg 2n$$

对于 $n>2$，以 $\pi^*(n)$ 表示满足 $n/2 \leqslant p \leqslant n-2$ 的素数 p 的个数. 显然 $r_2(n) \leqslant \pi^*(n)$. Deshouillers, Granville, Narkiewicz 和 Pomerance 于 1993 年证明了 $n=210$ 是使 $r_2(n)=\pi^*(n)$ 的最大整数.

1985 年，Powell 在数学期刊 Mathematics Magazine 中提出一个问题：是否有初等方法，证明对每个 $k>0$ 均存在无穷多偶数 $2n$ 使得 $r_2(2n)>k$? Finn 和 Frohliger 于 1986 年给出一个解法. 下面是我给出的证明. 只用到以下事实：在不超过 x 的整数中至少有 $x/(2\lg x)$ 个素数，这是比切比雪夫不等式要弱的命题.

证明 取 x 使 $x/(2\lg x) > \sqrt{2kx}+1$. 以 P 为不超过 x 的所有奇素数组成

的集合.则 $|P| \geqslant x/(2\lg x)$. 又令 $P_2 = \{(p,q) \mid p,q \in P, p < q\}$,则

$$|P_2| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2\lg x}\left(\frac{x}{2\lg x} - 1\right)$$

现在令 $f(p,q) = p + q$,则 f 的像是不超过 $2x - 2$ 的偶数,所以 f 的像集合最多有 $x - 4$ 个元素. 于是存在 $n \leqslant 2x - 2$,使得集合 $\{(p,q) \in P_2 \mid p + q = n\}$ 的元素个数至少为

$$\frac{P_2}{x-4} > \frac{1}{2x}\left(\frac{x}{2\lg x} - 1\right)^2 > k$$

(5) 例外集合.

对每个 $x \geqslant 4$,令

$$G'(x) = \#\{2n \mid 2n \leqslant x, 2n \text{ 不为两个素数之和}\}$$

van der Corput(1937),Estermann(1938) 和 Tschudakoff(1938) 各自独立地证明了 $\lim G'(x)/x = 0$,并且事实上对每个 $\alpha > 0$ 均有 $G'(x) = O(x/(\lg x)^\alpha)$. Heath-Brown 于 1985 年给出另一个证明.

在这方面的最好结果是 Montgomery 和 Vaugham(1975) 在一篇深刻论文中给出的:存在有效可计算的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$,使得对每个充分大的 x, $G'(x) < x^{1-\alpha}$. 1980 年,陈景润和潘承洞证明了 α 可取为 1/100,而陈景润(1983) 又改成 $\alpha = 1/25$(潘承洞也独立地证明此结果).

关于哥德巴赫猜想的数值结果,下面是目前的记录.

记录

(1) 先考虑三个素数问题. Saouter 于 1998 年验证了每个小于 10^{20} 的奇数均不超过三个素数之和.

(2) 对于哥德巴赫猜想. Deshouilliers, te Riele 和 Saouter 于 1998 年验证了哥德巴赫猜想对于 10^{14} 以内的偶数成立. Richstein(2001) 又把计算扩大到 4×10^{14}. 最近 T. Oliveira e Silva 进一步验证到 8×10^{15},并且还在继续他的计算工作.

在此之前,Sinisalo(1993) 验证到 4×10^{11}, Granville, van de Lune 和 te Riele(1989) 验证到 2×10^{10}.

哥德巴赫问题的一个变异

这次的问题是把每个奇数表成一个素数与 2 的一个方幂之和. 从而它既像哥德巴赫问题,又像孪生素数问题. 这个问题由 Prince A. de Polignac 提出. 他在 1849 年宣称:每个奇自然数均为一个素数和一个 2 的方幂之和. 但很快他发现自己的证明有错误,因为 959 就没有这种表示方法. 详见 Dickson 的《数论史》第 I 卷第 424 页.

于是仍需要研究集合 $A = \{p + 2^k \mid p$ 为素数, $k \geqslant 1\}$. 我这里只介绍一部分结果. Romanoff 于 1934 年证明了 A 具有正密度, 即存在 $C > 0$, 使得对每个 $x \geqslant 1$, $\#\{m \in A \mid m \leqslant x\}/x > C$.

Erdös 于 1950 年研究了此问题. 首先由素数定理得到 $\#\{m \in A \mid m \leqslant x\} = O(x)$. 他还证明了存在由奇整数组成的一个算术级数, 其中不包含任何形如 $p + 2^k \in A$ 的整数.

整数 $n = 7, 15, 21, 45, 75, 105$ 满足以下性质: 对每个 $2^k < n$, $n - 2^k$ 均为素数. Erdös 猜想不再有正整数满足此性质. 令 $R(n) = \#\{(p, k) \mid p$ 为奇素数, $k \geqslant 1, p + 2^k = n\}$. Erdös 证明了存在 $C > 0$, 使得有无穷多个 n 满足 $R(n) > C\lg\lg n$.

第二部分

中国解析数论群英谱



须尼尔曼密率论与华罗庚、闵嗣鹤

第四章

1 须尼尔曼密率[①]

——华罗庚

华罗庚（1910.11.12—1985.6.12）中国数学家．生于江苏省金坛县，卒于日本东京．

1.1 密率之定义及其历史

本文之目的在于证明以下之二重要定理：

"有一正整数 c 存在，凡正整数必可表为不超过 c 个素数之和．"

"命 k 表一正整数，有一正整数 c_k（仅与 k 有关）存在，凡正整数必可表为不超过 c_k 个正整数之 k 方之和．"

此二定理与 Goldbach 及 Waring 问题之关系乃属显然．并可说：此二定理乃哥德巴赫问题及 Waring 问题最基本但也最初步之结果．此二定理各名为 Goldbach-Шнирельман 定理及 Waring-Hilbert 定理．

本文中将引进 Шнирельман 所创造之密率概念．此概念极为初等，但借此概念证明了以上所述之历史上著名定理，本章关于 Goldbach-Шнирельман 定理之证明稍异于 Шнирельман 之原证．今将引用 Selberg 之方法以代替原来之 Brun 筛法．

在证明 Waring-Hilbert 定理时，亦不用 Hilbert 原证及 Шнирельман 之证明．而将根据 Линник 在 1943 年之证明，加以

① 摘自：华罗庚．数论导引．北京：科学出版社，1979 年．

简化及改变而得者.

在此二证明中 Шнирельман 之密率皆居重要地位,密率之定义如次:

定义1 命 u 表一由一些互不相同的非负整数 a 所成之集合.命 $A(n)$ 表 u 中不大于 n 之正整数之个数,即

$$A(n) = \sum_{1 \leqslant a \leqslant n} 1$$

若有正数 α 存在,使对任一正整数 n 常有 $A(n) \geqslant \alpha n$,则此集合称为有正密率之集合.有此性质的最大的 α 称为此集合之正密率.

显然有次之简单性质:

(i) 由于 $A(n) \leqslant n$,故得 $\alpha \leqslant 1$.

(ii) 若 $\alpha = 1$,则 $A(n) = n$,故 u 中包有全部正整数.

习题1 命 τ 表一实数大于等于1,求出集合

$$1 + [\tau(n-1)], n = 1,2,\cdots$$

之密率.

1.2 和集及其密率

令引入记号 $B, b, B(n), \beta$ 及 $D, c, C(n), \gamma$,其间之关系一如 $u, a, A(n)$, α 之间之关系,即 $b \in B, B(n) = \sum\limits_{1 \leqslant b \leqslant n} 1$,而 β 是 B 集之正率等.

定义2 所有的形如 $a + b(a \in u, b \in B)$ 之整数所成之集合称为 u, B 之和集,以 D 表之.并表为 $u + B = D$.

定理1 若 $D = u + B$,及 $0 \in u$,则 $\gamma \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta$.

证明 由于 $\beta > 0$,故1在 B 中.则下面三类数均为 D 中之正整数,不大于 n 且互不相同.

(i) 将 B 中之 $b_1 = 1, b_2, \cdots, b_{B(n)}$ 依进增之次序排列,因 $0 \in u$,故 b_1, $b_2, \cdots, b_{B(n)}$ 均在 D 中,此种正整数共 $B(n)$ 个.

(ii) 对每一 $v, 1 \leqslant v \leqslant B(n) - 1$,当 $a \in u$ 且 $1 \leqslant a \leqslant b_{v+1} - b_v - 1$ 时,诸 $a + b_v$ 均为正整数,在 D 中,不大于 n 且互不相同.尽因

$$a + b_v \leqslant (b_{v+1} - b_v - 1) + b_v = b_{v+1} - 1 \leqslant b_{B(n)} - 1 \leqslant n - 1$$

且

$$a + b_v \geqslant 1 + b_v$$

故

$$1 + b_v \leqslant a + b_v \leqslant b_{v+1} - 1$$

显然,(i)与(ii)中之诸正整数互不相同.对每一 $v, 1 \leqslant v \leqslant B(n) - 1$,共有 $A(b_{v+1} - b_v - 1)$ 个 $a + b_v$.

(iii) 当 $a \in u, 1 \leqslant a \leqslant n - b_{B(n)}$ 时,诸 $a + b_{B(n)}$ 均为正整数,在 D 中,不

大于 n 且互不相同. 因 $a + b_{B(n)} \geqslant 1 + b_{B(n)}$,故(iii) 中之诸正整数亦与(i),(ii)中者不同,且诸 $a + b_{B(n)}$ 共有 $A(n - b_{B(n)})$ 个.

由(i),(ii),(iii) 之结果,可知

$$
\begin{aligned}
C(n) \geqslant B(n) + \sum_{v=1}^{B(n)-1} A(b_{v+1} - b_v - 1) + A(n - b_{B(n)}) \geqslant \\
B(n) + \sum_{v=1}^{B(n)-1} \alpha(b_{v+1} - b_v - 1) + \alpha(n - b_{B(n)}) = \\
B(n) + \alpha(b_{B(n)} - b_1 - (B(n) - 1) + n - b_{B(n)}) = \\
B(n) + \alpha(n - B(n)) \geqslant (1 - \alpha)\beta n + \alpha n = \\
n(\alpha + \beta - \alpha\beta)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\frac{C(n)}{n} \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta, \gamma \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta
$$

附记:此并非和集密率之最佳定理. 而最佳之结果应为 $\gamma \geqslant \min(1, \alpha + \beta)$. 此结果在 1942 年为 Mann 所证明. 其证明较为复杂,并对本文之主要结果无基本上之改进,故不列入本书之范围. 今取 u 及 B 皆为与 1 同余之正整数,mod q. 并假定 u 还包有 0,则 $u + B$ 包有所有的与 1,2 同余的正整数 mod q. 显然 u,B 之密率为 $\frac{1}{q}$ 及 $u + B$ 之密率为 $\frac{2}{q}$. 故 Mann 之结果不能再改进了.

定理 2 若 $0 \in u, \alpha + \beta \geqslant 1$,则 $D = u + B$ 之密率 γ 为 1,即 D 中包有所有的正整数.

证明 假设 $\gamma \neq 1$,则 $\gamma < 1$,故有一最小的正整数 $n \notin D$. 因 $\beta > 0$,故 $1 \in B$,又 $0 \in u$,故 $1 \in D$,而有 $n \geqslant 2$. 又因 $0 \in u$ 故知 $n \notin B$.

考虑下面诸不大于 $n - 1$ 的自然数 a 及 $n - b$

$$
a, 1 \leqslant a \leqslant n - 1, a \in u
$$

$$
n - b, 1 \leqslant b \leqslant n - 1, b \in B
$$

诸 a 与 $n - b$ 互不相同,否则必有 $a = n - b$,即 $n = a + b \in D$,此为一矛盾. 又诸 a 与 $n - b$ 均不大于 $n - 1$,故其个数不大于 $n - 1$.

另一方面,诸 a 与 $n - b$ 之个数为 $A(n - 1) + B(n - 1)$. 因

$$
A(n - 1) \geqslant \alpha(n - 1)
$$

$$
B(n - 1) = B(n) \geqslant \beta n > \beta(n - 1)
$$

而有

$$
A(n - 1) + B(n - 1) > \alpha(n - 1) + \beta(n - 1) = (\alpha + \beta)(n - 1) \geqslant n - 1
$$

此与诸 a 与 $n - b$ 之个数不大于 $n - 1$ 矛盾. 定理已明.

定理 3 若 u 包有 0,则任一正整数可以表为 u 中之

$$
s_0 = 2\left[\frac{\log 2}{-\log(1 - \alpha)}\right] + 2
$$

个元素之和.若 u 不包有 0,则任一正整数可以表为 u 中不多于 s_0 个元素之和.

证明 定理后半段可由前半段立即得出,尽因将元素 0 加于 u 中形成新的集合 $\overline{u}$ 后,再利用定理前半段即可.今往证明定理之前半段.

$0 \in u$.令 $u_h = u + \cdots + u$,式中共 h 个 u 相加.u_h 之正密率以 α_h 表之.u 之正密率为 α,则有 $\alpha_h \geqslant 1-(1-\alpha)^h$.今用归纳法,当 $h=1$ 时,有 $\alpha_1 = \alpha$.设当 $h-1$ 时有

$$\alpha_{h-1} \geqslant 1-(1-\alpha)^{h-1}$$

则因 $u_h = u + u_{h-1}$,由定理 1

$$\begin{aligned}\alpha_h &\geqslant \alpha + \alpha_{h-1} - \alpha\alpha_{h-1} = \alpha + (1-\alpha)\alpha_{h-1} \geqslant \\ &\alpha + (1-\alpha)\{1-(1-\alpha)^{h-1}\} = \\ &1-(1-\alpha)^h\end{aligned}$$

故当 $h = 1,2,\cdots$ 时,恒有 $\alpha_h \geqslant 1-(1-\alpha)^h$.今

$$\frac{s_0}{2} = \left[\frac{\log 2}{-\log(1-\alpha)}\right] + 1 > \frac{\log 2}{-\log(1-\alpha)}$$

故有

$$(1-\alpha)^{s_0/2} \leqslant (1-\alpha)^{\frac{\log 2}{-\log(1-\alpha)}} = \mathrm{e}^{-\frac{\log 2}{\log(1-\alpha)}\cdot\log(1-\alpha)} = \frac{1}{2}$$

于是

$$\alpha_{s_0/2} \geqslant 1-(1-\alpha)^{s_0/2} \geqslant 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

因 $0 \in u_{s_0/2}$ 由定理 2,集合 $u_{s_0} = u_{s_0/2} + u_{s_0/2}$ 包有所有的正整数,故任一正整数可以表为 u 中之 s_0 个元素之和.

定理 4 命 u^* 表一非负整数之集合,其中允许重复.命 u 为 u^* 中不同元素所成之最大集合.命 $r(a)$ 表示 a 在 u^* 中出现之次数.若对诸 $n \geqslant 1$ 常有

$$\frac{1}{n}\frac{\left(\sum\limits_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)\right)^2}{\sum\limits_{1\leqslant a\leqslant n} r^2(a)} \geqslant a'(>0)$$

则 u 有正密率 $\alpha \geqslant \alpha'$.

证明 由 Буняковский-Schwarz 不等式可知

$$\left(\sum_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)\right)^2 \leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant n} r^2(a) \sum_{1\leqslant a\leqslant n} 1^2 = A(n) \sum_{1\leqslant a\leqslant n} r^2(a)$$

故得

$$\frac{A(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)\right)^2 \Big/ \sum_{1\leqslant a\leqslant n} r^2(a) \geqslant \alpha'$$

定理已明.

1.3 Goldbach-Шнирельман 定理

在 1.3 到 1.5 中 $c, c_1, c_2, \cdots$ 皆表绝对正常数. 1.3 到 1.5 之目的在于证明:

定理 5 有一正整数 c 存在,凡大于 1 之整数皆可表为不超过 c 个素数之和.

定义 u^* 为 1 及所有的 $p_1 + p_2$ 之集合,此处 p_1, p_2 过所有的素数. 因之, u^* 中可能有重复之元素. 再定义 u 为 u^* 中不同元素之最大集合. 欲证定理 5 只须证明:

定理 6 u 有正密率 c_1.

由定理 2.3①可知任一正整数 m 可以表为最多 s_0 个 u 中之元素之和(即若干个 1 及若干个形如 $p_1 + p_2$ 之整数之和). 即 m 是最多 $2s_0$ 个素数或 1 之和. 故对任一 $n > 2$, 可以有

$$n = 2 + (n - 2) = 2 + b \cdot 1 + \sum p$$

在此和号内素数 p 之个数小于等于 $2s_0 - b$. 又易知 $2 + b$ 可以表为不超过 $b + 1$ 个素数之和. 因此, n 可以表为不超过 $2s_0 + 1$ 个素数之和. 故得定理 5.

又命 $r(1) = 1$ 及 $r(a)$ 为 u^* 中 a 出现之次数. 故

$$r(a) = \begin{cases} 1, & a = 1 \\ \sum\limits_{p_1 + p_2 = a} 1, & a \geqslant 2 \end{cases}$$

定理2.4建议,今后之目的在于寻求 $\sum\limits_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a)$ 之下限及 $\sum\limits_{1 \leqslant a \leqslant n} r^2(a)$ 之上限, 前者不难获得,后者将为下节之主题.

定理 7 若 $n \geqslant 2$, 即

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a) \geqslant c_2 n^2 / \log^2 n \qquad ①$$

证明 设 $n \geqslant 4$. 由定理 5.6.2 得

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a) = 1 + \sum_{4 \leqslant a \leqslant n} \sum_{p_1 + p_2 = a} 1 \geqslant$$

$$\sum_{p_1 + p_2 \leqslant n/2} 1 = \pi^2\left(\frac{1}{2} n\right) \geqslant \left(c_3 \frac{n}{2} / \log \frac{n}{2}\right)^2 \geqslant \frac{c_3^2}{4} \frac{n^2}{\log^2 n}$$

若 $n = 2$ 或 3, 易知 $\sum r(a) = 1$. 故只须取 $c_2 = \min\left(\frac{c_3^2}{4}, \frac{\log^2 2}{4}, \frac{\log^2 3}{9}\right)$, 即得定理.

由定理 2.4 及 $r(1) = 1$, 可知问题之焦点在于证明

定理 8 若 $n \geqslant 2$, 则

① 本文中未涉及的定理请参考原文.

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant n} r^2(a) \leqslant c_4 \frac{n^3}{\log^4 n} \tag{②}$$

换言之,若定理 8 已证明,则由

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{1\leqslant a\leqslant n} r(a)\right)^2}{\sum\limits_{1\leqslant a\leqslant n} r^2(a)} \geqslant \frac{1}{n}\,\frac{(c_2 n^2/\log^2 n)^2}{c_4 n^3 \log^4 n} = \frac{c_2^2}{c_4}$$

及定理 2.4 即得出定理 6.

因此,今后仅须证明定理 8 即可.

1.4 Selberg 不等式

本节中虽然可以不用,但是读者不可不知以下之定理:

定理 9 设 $a_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 及 $b_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是固定的实数.在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$ 之下,$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ 之极小值为 $\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_i^2}{a_i}}$,且当

$$x_i = \frac{\dfrac{b_i}{a_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b_i^2}{a_i}}$$

时取极值.

证明 由 Буняковекий-Schwarz 不等式得知

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 a_i^{-1}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right)^2 = 1$$

故得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \geqslant \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 a_i^{-1}} \tag{③}$$

又由定理 18.7.1 知式 ③ 等号成立之充要条件为有一实数 t_0 存在使

$$\sqrt{a_i}\, x_i = t_0 b_i \frac{1}{\sqrt{a_i}}, i = 1,2,\cdots,n$$

即

$$x_i = b_i a_i^{-1} t_0, i = 1,2,\cdots,n$$

故得

$$1 = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 a_i^{-1} t_0$$

即

$$t_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2 a_i^{-1}}$$

故得

$$x_i = \frac{b_i a_i^{-1}}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2 a_i^{-1}}, i = 1,2,\cdots,n \qquad ④$$

定理已明.

定理10(A.Selberg)　设给一 M 个整数的集合 $\{b\}$,能被正整数 k 所整除的 b 的个数是

$$\sum_{k \mid b} 1 = g(k)M + R(k) \qquad ⑤$$

此处 $R(k)$ 是余项,而 $g(k)$ 是正值的积性函数,且 $g(p) < 1$.

令 N_ξ 表示 $\{b\}$ 中不能被小于等于 ξ 的素数所整除的 b 的个数,则

$$N_\xi \leqslant \frac{M}{\sum_{1 \leqslant k \leqslant \xi} \frac{\mu^2(k)}{f(k)}} + \sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant \xi} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} R\left\{\frac{k_1, k_2}{(k_1, k_2)}\right\}$$

此处

$$f(k) = \sum_{d \mid k} \mu(d) / g\left(\frac{k}{d}\right)^{①} \qquad ⑥$$

$$\lambda_k = \frac{\mu(k)}{f(k) g(k)} \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant \xi/k \\ (m,k)=1}} \frac{\mu^2(m)}{f(m)} \Big/ \sum_{1 \leqslant m \leqslant \xi} \frac{\mu^2(m)}{f(m)} \qquad ⑦$$

证明　令 $1 = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{[\xi]}$ 为实数. 因 k_1, k_2 之最小公倍数为 $\frac{k_1 k_2}{(k_1, k_2)}$,由⑤得

$$N_\xi = \sum_{p \mid b \Rightarrow p > \xi} 1 = \sum_{p \mid b \Rightarrow p > \xi} 1 \Big(\sum_{\substack{k \mid b \\ 1 \leqslant k \leqslant \xi}} \lambda_k \Big)^2 \leqslant \sum_b \Big(\sum_{\substack{k \mid b \\ 1 \leqslant k \leqslant \xi}} \lambda_k \Big)^2 =$$

$$\sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant \xi} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \sum_{\substack{k_1 \mid b \\ k_2 \mid b}} 1 = \sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant \xi} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \sum_{\substack{k \mid b \\ (k_1, k_2) \mid b}} 1 =$$

$$\sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant \xi} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \left(g\left\{\frac{k_1 k_2}{(k_1, k_2)}\right\} M + R\left\{\frac{k_1 k_2}{(k_1, k_2)}\right\} \right)$$

此处 $p \mid b \Rightarrow p > \xi$ 表示 b 的素因子皆大于 ξ,由定理6.2.4,有

$$N_\xi \leqslant MQ + \sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant \xi} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} R\left\{\frac{k_1 k_2}{k_1, k_2}\right\} \qquad ⑧$$

---

① 当 k 无平方因子时,$f(k) = \frac{1}{g(k)} \prod_{p \mid k} (1 - g(p)) > 0$.

此处

$$Q=\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant\xi}\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\frac{g(k_1)g(k_2)}{g\{(k_1,k_2)\}}$$

由 ⑥ 及定理 6.4.1,有

$$Q=\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant\xi}\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}g(k_1)g(k_2)\sum_{d\mid(k_1,k_2)}f(d)=$$

$$\sum_{1\leqslant d\leqslant\xi}f(d)\sum_{\substack{1\leqslant k_1\leqslant\xi\\ d\mid k_1}}\lambda_{k_1}g(k_1)\sum_{\substack{1\leqslant k_2\leqslant\xi\\ d\mid k_2}}\lambda_{k_2}g(k_2)=$$

$$\sum_{1\leqslant d\leqslant\xi}f(d)\Big\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant\xi\\ d\mid k}}\lambda_k g(k)\Big\}^2 \qquad ⑨$$

由 ⑦ 及定理 6.2.1 可知 $\lambda_1=1$(如此选择的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{[\xi]}$,使 Q 最小,读者可用定理 9 自证之).

令

$$s=\sum_{1\leqslant m\leqslant\xi}\frac{\mu^2(m)}{f(m)} \qquad ⑩$$

定理 6.2.2 可知 $f(n)$ 也是积性的,故由 ⑦ 得

$$\lambda_k g(k)=\frac{\mu(k)}{sf(k)}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant\xi/k\\ (m,k)=1}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}=\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant\xi/k\\ (m,k)=1}}\mu(m)\frac{\mu(mk)}{sf(mk)}=$$

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant\xi/k}\mu(m)\frac{\mu(mk)}{sf(mk)}$$

由定理 6.3.2 有

$$\frac{\mu(m)}{sf(m)}=\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi/m}\lambda_{km}g(km)=\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant\xi\\ m\mid r}}\lambda_r g(r)$$

因此,由 ⑨,⑩ 有

$$Q=\sum_{1\leqslant d\leqslant\xi}f(d)\Big\{\frac{\mu(d)}{sf(d)}\Big\}^2=\frac{1}{s^2}\sum_{1\leqslant d\leqslant\xi}\frac{\mu^2(d)}{f(d)}=\frac{s}{s^2}=\frac{1}{s}$$

于是,由 ⑧,⑩,定理已明.

定理 11 在定理 10 的条件下,若 $g_1(n)$ 为完全积性函数,且 $g_1(p)=g(p)$,则

$$N_\xi\leqslant\frac{M}{\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}g_1(k)}+\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant\xi}\left|R\Big\{\frac{k_1k_2}{(k_1,k_2)}\Big\}\right|\prod_{p\mid k_1}\{1-g_1(p)\}^{-1}\prod_{p\mid k_2}\{1-g_1(p)\}^{-1}$$

证明 由 ⑥,有

$$f(p)=\frac{\mu(1)}{g(p)}+\frac{\mu(p)}{g(1)}=\frac{1}{g(p)}-1=\frac{1-g(p)}{g(p)}$$

则

$$\frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \mu^2(k)\prod_{p|k}\frac{g_1(p)}{1-g_1(p)} = \mu^2(k)g_1(k)\prod_{p|k}\{1-g_1(p)\}^{-1} \quad ⑪$$

因此

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}\frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}\mu^2(k)g_1(k)\prod_{p|k}\{1-g_1(p)\}^{-1} =$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}\mu^2(k)g_1(k)\prod_{p|k}\left(\sum_{l=0}^{\infty}g_1(p^l)\right)$$

此式包有所有的 $g_1(k)(1\leqslant k\leqslant\xi)$. 因为如果

$$k = p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}\leqslant\xi$$

则 $g_1(p_1\cdots p_s), g_1(p_1^{m_1-1}),\cdots,g_1(p_s^{m_s-1})$ 皆出现在此式的各因子中,因此

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\geqslant\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}g_1(k)$$

再则

$$|\lambda_k|\leqslant\frac{\mu^2(k)}{f(k)g(k)} = \frac{\mu^2(k)}{f(k)g_1(k)} = \prod_{p|k}(1-g_1(p))^{-1}$$

因此得本定理.

定理 12 命 $A\geqslant 0, M\geqslant 3$. 记在 A 与 $A+M$ 间的素数个数为 $\pi(A;M)$. 则

$$\pi(A;M)\leqslant\frac{2M}{\log M}\left(1+O\left(\frac{\log\log M}{\log M}\right)\right)$$

此处与 O 有关之常数与 A 及 M 无关.

证明 由于

$$\pi(A;M) = \sum_{A<p\leqslant A+M^{\frac{1}{2}}}1+\sum_{A+M^{\frac{1}{2}}<p\leqslant A+M}1\leqslant M^{\frac{1}{2}}+S(A;M) \quad ⑫$$

现在取整数集合 $\{b\}$ 为适合 $A<n\leqslant A+M$ 的全体整数. 用定理 10 的记号可知

$$S(A;M)\leqslant N_\xi, 1<\xi\leqslant\sqrt{M} \quad ⑬$$

对所有的 $A\geqslant 0$ 皆成立. 现在来估计 N_ξ. 因为

$$\sum_{\substack{k|b\\A<b\leqslant A+M}}1 = \left[\frac{A+M}{k}\right]-\left[\frac{A}{k}\right] = \frac{M}{k}+R(k), \ |R(k)|\leqslant 1$$

故 $g_1(k) = \frac{1}{k}$. 因此

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi}g_1(k) = \log\xi+O(1)$$

由定理 5.9.3 可知

$$\prod_{p|k}(1-g_1(p))^{-1} = \prod_{p|k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\leqslant\prod_{p\leqslant k}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = O(\log k)$$

故

$$\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant\xi}\left|R\left(\frac{k_1k_2}{(k_1,k_2)}\right)\right|\prod_{p\mid k_1}(1-g_1(p))^{-1}\prod_{p\mid k_2}(1-g_1(p))^{-1}=$$

$$O\Big(\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant\xi}\log k_1\log k_2\Big)=O(\xi^2\log^2\xi)$$

故

$$N_\xi\leqslant\frac{M}{\log\xi+O(1)}+O(\xi^2\log^2\xi)$$

取

$$\xi=M^{\frac{1}{2}}/\log^2 M$$

则得

$$N_{M^{\frac{1}{2}}/\log^2 M}\leqslant\frac{2M}{\log M}\left(1+O\left(\frac{\log\log M}{\log M}\right)\right)$$

以此代入⑫,⑬,即明所欲证.

1.5 Goldbach-Шнирельман 定理之证明

定理 13 若 $a\geqslant 2$,则

$$r(a)\leqslant c_5\frac{a}{\log^2 a}\sum_{k\mid a}\frac{\mu^2(k)}{k}$$

证明 $a=2$ 或 $a=3$ 时,因为 $r(a)=0$,定理已成立.又若 a 是奇数,而 $p_1+p_2=a$,则必 $p_1=2$ 或 $p_2=2$.此时 $r(a)\leqslant 2$.定理显然成立.

以下设 $a\geqslant 4$ 且为偶数.易得

$$r(a)=\sum_{p_1+p_2=a}1\leqslant\sum_{\substack{p_1+p_2=a\\p_1,p_2>\sqrt{a}}}1+\sum_{\substack{p_1+p_2=a\\p_1\leqslant\sqrt{a}}}1+\sum_{\substack{p_1+p_2=a\\p_2\leqslant\sqrt{a}}}1\leqslant S(a)+2\sqrt{a} \quad ⑭$$

此处

$$S(a)=\sum_{\substack{p_1+p_2=a\\p_1,p_2>\sqrt{a}}}1$$

现在给一整数集合 $b_c=c(a-c)(c=1,2,\cdots,a)$.若 $p_1+p_2=a$ 而 p_1, $p_2>\sqrt{a}$,则 $p_1(a-p_1)=p_2(a-p_2)=p_1p_2$ 不能被小于等于 $\sqrt{a}$ 的素数所整除.若用 1.4 的记号,则得

$$S(a)\leqslant N_\xi,1<\xi\leqslant\sqrt{a} \quad ⑮$$

命 $M(k)$ 表示同余式 $x(a-x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ k)(0\leqslant x<k)$ 的解数,则

$$\sum_{k\mid b}{}_b 1=\sum_{\substack{c=1\\c(a-c)\equiv 0(\mathrm{mod}\ k)}}^{a}1=\left[\frac{a}{k}\right]M(k)+T(k)$$

此处 $0\leqslant T(k)\leqslant M(k)$.故得

$$\sum_{k|b} {}_b 1 \leqslant \frac{M(k)}{k}a + M(k)$$

及

$$\sum_{k|b} {}_b 1 \geqslant \left[\frac{a}{k}\right]M(k) > \left(\frac{a}{k} - 1\right)M(k) = \frac{M(k)}{k}a - M(k)$$

命

$$g(k) = \frac{M(k)}{k} \qquad ⑯$$

则

$$\sum_{k|b} {}_b 1 = g(k)a + R(k) \qquad ⑰$$

此处

$$|R(k)| \leqslant M(k) \leqslant k \qquad ⑱$$

由定理 2.8.1 知 $M(k)$ 是 k 的积性函数，故 $g(k)$ 亦然．又

$$M(p) = \begin{cases} 1, & p \mid a \\ 2, & p \nmid a \end{cases} \qquad ⑲$$

故由 ⑯ 得

$$g_1(p) = g(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & p \mid a \\ \dfrac{2}{p}, & p \nmid a \end{cases} \qquad ⑳$$

因为 $2 \mid a$，故 $g(2) = \dfrac{1}{2}$；因此 $0 < g(p) < 1$，故可应用定理 4.3，若 $k = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$，则由式 ⑯ 及式 ⑲ 得

$$g_1(k) = \prod_{s=1}^{r} \{g_1(p_s)\}^{a_s} = \prod_{s=1}^{r} \frac{\{M(p_s)\}^{a_s}}{p_s^{a_s}} = \frac{1}{k}\prod_{\substack{s=1 \\ p_s \nmid a}}^{r} 2^{a_s} \geqslant$$

$$\frac{1}{k}\prod_{\substack{s=1 \\ p_s \nmid a}}^{r} (1 + a_s) = \frac{h(k)}{k}$$

此处

$$h(p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}) = \prod_{\substack{s=1 \\ p_s \nmid a}}^{r} (1 + a_s), p_1, \cdots, p_r \text{ 为不同的素数} \qquad ㉑$$

由定理 4.4 得

$$\prod_{p|a}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant \xi} g_1(k) \geqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant \xi} h(k)\frac{1}{k}\prod_{p|a}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant$$

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \xi} \frac{1}{k} \sum_{\substack{m|k \\ p \left| \frac{k}{m} \Rightarrow p \right| a}} h(m)$$

若书 k 为 $k = p_1^{a_1}\cdots p_t^{a_t}q_1^{b_1}\cdots q_u^{b_u}$，其中诸 p_T 与 q_U 均为互不相同的素数，且 $p_T \mid a$，$q_U \nmid a$. 则 m 可取所有如下形式的整数，即

$$m = \frac{k}{p_1^{c_1}\cdots p_t^{c_t}} = p_1^{a_1-c_1}\cdots p_t^{a_t-c_t}q_1^{b_1}\cdots q_u^{b_u}$$

其中 $0 \leqslant c_1 \leqslant a_1,\cdots,0 \leqslant c_t \leqslant a_t$. 对于这种 m，由㉑知

$$h(m) = (1+b_1)\cdots(1+b_u)$$

故由习题6.5.1得

$$\prod_{p\mid a}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\sum_{1\leqslant k\leqslant \xi}g_1(k) \geqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant \xi}\frac{1}{k}\sum_{c_1=0}^{a_1}\cdots\sum_{c_t=0}^{a_t}(1+b_1)\cdots(1+b_u) =$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \xi}\frac{1}{k}(1+a_1)\cdots(1+a_t)(1+b_1)\cdots(1+b_u) =$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \xi}\frac{d(k)}{k} \geqslant c_6\log^2\xi$$

故

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \xi}g_1(k) \geqslant c_6\log^2\xi\prod_{p\mid a}\left(1-\frac{1}{p}\right) = c_6\log^2\xi\prod_{p\mid a}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p\mid a}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant$$

$$c_6\log^2\xi\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p\mid a}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \geqslant$$

$$c_7\log^2\xi\left\{\sum_{k\mid a}\frac{\mu^2(k)}{k}\right\}^{-1} \qquad ㉒$$

其次，若 $k = \prod_{p\mid k}p^c$. 则由

$$\prod_{p\mid k}\{1-g_1(p)\}^{-1} \leqslant \{1-g_1(2)\}^{-1}\{1-g_1(3)\}^{-1}\prod_{5\leqslant p\mid k}\{1-g_1(p)\}^{-1} \leqslant$$

$$2\cdot 3\prod_{5\leqslant p\mid k}\left(1-\frac{2}{5}\right)^{-1} < 6\prod_{p\mid k}(1+c) = 6d(k) \leqslant 6k$$

故由定理4.3，⑱及㉒得

$$S(a) \leqslant N_\xi \leqslant \frac{1}{c_7}\cdot\frac{a}{\log^2\xi}\sum_{k\mid a}\frac{\mu^2(k)}{k} + \sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant \xi}\frac{k_1k_2}{(k_1,k_2)}6k_1\cdot 6k_2 \leqslant$$

$$\frac{1}{c_7}\cdot\frac{a}{\log^2\xi}\sum_{k\mid a}\frac{\mu^2(k)}{k} + 36\xi^6$$

取 $\xi = a^{1/10}$，由式⑭即得定理.

定理3.4之证明　$n \geqslant 2$ 时，有

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant n}r^2(a) \leqslant 1 + \sum_{4\leqslant a\leqslant n}c_5^2\frac{a^2}{\log^4 a}\sum_{k_1\mid a}\frac{\mu^2(k_1)}{k_1}\sum_{k_2\mid a}\frac{\mu^2(k_2)}{k_2} \leqslant$$

$$1 + c_5^2\frac{n^2}{\log^4 n}\sum_{4\leqslant a\leqslant n}\sum_{\substack{k_1\mid a\\ k_2\mid a}}\frac{1}{k_1k_2} \leqslant$$

$$1+c_5^2\frac{n^2}{\log^4 n}\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant \xi}\frac{1}{k_1k_2}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\ \frac{k_1k_2}{(k_1,k_2)}\mid a}}1\leqslant$$

$$1+c_5^2\frac{n^2}{\log^4 n}\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant \xi}\frac{1}{k_1k_2}\cdot\frac{n}{\frac{k_1k_2}{(k_1,k_2)}}$$

因为$(k_1,k_2)\leqslant\min\{k_1,k_2\}\leqslant\sqrt{k_1k_2}$,故

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant n}r^2(a)\leqslant 1+c_5^2\frac{n^2}{\log^4 n}\sum_{1\leqslant k_1,k_2\leqslant n}\frac{n}{(k_1k_2)^{3/2}}\leqslant$$

$$1+c_5^2\frac{n^3}{\log^4 n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\right)^2\leqslant c_4\frac{n^3}{\log^4 n}$$

即得定理.

习题 2 设 x,k,l 都是正整数,且$(k,l)=1$. $\pi(x;k,l)$ 表示算术级数 $a_n=kn+l(n=1,2,\cdots)$ 所包含的不超过 x 的素数的个数,又命 δ 是满足 $0<\delta<1$ 的固定常数,求证当 $k<x^\delta$ 时,有

$$\pi(x;k,l)\leqslant\frac{2x}{\varphi(k)\log\frac{x}{k}}\left(1+O\left(\frac{(\log\log x)^2}{\log x}\right)\right)$$

此处 O 中所含之常数与 k 无关,但与 δ 有关.

习题 3 若 $p,p+2$ 同时为素数,则 p 与 $p+2$ 就称做一对"孪生素数".以 $Z_2(N)$ 表示小于或等于 N 的"孪生素数"的对数.则

$$Z_2(N)\leqslant c_8\frac{N}{\log^2 N}$$

并证明级数

$$\sum_{p^*}\frac{1}{p^*}$$

收敛,此处 p^* 经过所有的"孪生素数",即 p^* 与 p^*-2 是一对"孪生素数".

1.6 Waring-Hilbert 定理

在 1.6 ~ 1.7 中,$c,c_1,c_2,\cdots$ 皆表仅与 k 有关之正常数.与 O 有关之常数亦仅与 k 有关. 1.6 ~ 1.7 之目的在于证明:

定理 14(Hilbert) 对任一整数 $k(k\geqslant 1)$,有一正整数 c 存在,凡正整数必为不多于 c 个正整数之 k 乘方和.

今定义 U_t^* 为整数

$$x_1^k+\cdots+x_t^k$$

所成之集合,此处 x_m 各过所有的非负整数,定义 U_t 为 U_t^* 中不同元素所成之最

大分集合.命

$$c_1 = c_1(k) = \frac{1}{2}8^{k-t}$$

证明之环节在于证明：

定理 15 若 $k \geqslant 2$,则 U_{c_1} 有正密率.

由定理 2.3 可知定理 14 可由定理 15 直接推得.

定义 $r(a)$ 为不定方程

$$x_1^k + \cdots + x_{c_1}^k = a, x_m \geqslant 0$$

之解数.今先证明

定理 16 若 $n \geqslant 1$,则

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a) \geqslant c_2(k) n^{c_1/k}$$

证明 显然可假定 $n > c_1$.有

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r(a) = -1 + \sum_{0 \leqslant a \leqslant n} \sum_{\substack{x_1^k + \cdots + x_{c_1}^k = a \\ x_m \geqslant 0}} 1 \geqslant$$

$$-1 + \sum_{0 \leqslant x_1 \leqslant (n/c_1)^{1/k}} \cdots \sum_{0 \leqslant x_{c_1} \leqslant (n/c_1)^{1/k}} 1 \geqslant$$

$$\left(\frac{n}{c_1}\right)^{c_1/k} - 1 \geqslant c_3(k) n^{c_1/k}$$

由定理 16 及定理 2.4 可知,中心环节在于证明

定理 17 若 $k \geqslant 2$ 及 $n \geqslant 1$,则

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant n} r^2(a) \leqslant c_4(k) n^{2c_1/k-1}$$

盖若此定理证明,则由定理 2.4 及定理 16 即可得出定理 15.

今将定理 17 略变其形式.

定理 18 若 $k \geqslant 2$ 及 $P \geqslant 1$,则

$$\int_0^1 \left| \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i x k_a} \right|^{2c_1} d\alpha \leqslant c_5(k) P^{2c_1-k}$$

取 $P = [n^{1/k}]$,显然当 n 大时,$c_1 P^k > n$.

对一整数 q,有

$$\int_0^1 e^{2\pi i q\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, q = 0 \\ 0, q \neq 0 \end{cases}$$

2 须尼尔曼的密率论①

——闵嗣鹤

闵嗣鹤(Mǐn Sìhè, 1913—1973)中国数学家.生、卒于北京.

2.1 堆垒数论的问题

Waring 问题与哥德巴赫问题是堆垒数论中有代表性的两个著名问题, Waring 问题所要讨论的是:是不是能找到一个只与 n 有关的常数 C_n,使当 $k > C_n$ 时,每一个正整数都可以表成 k 个非负整数的 n 次方幂之和.哥德巴赫问题所要讨论的是:

(1) 是不是每一个大于 4 的偶数都能表成两个奇素数之和.

(2) 是不是每一个大于 7 的奇数都能表成三个奇素数之和.

由于哥德巴赫问题的解决是非常难的,我们退一步讨论一个比较容易的问题(弱型哥德巴赫问题):是不是每一个自然数都可以表成不超过一定个数的素数之和. Waring 问题和弱型哥德巴赫问题都包含在下列更具一般性的问题之中.

设有 k 个递增的整数序列所组成的集合:

$$\begin{aligned}
&(A^{(1)})\ 0 = a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \cdots, a_n^{(1)}, \cdots \\
&(A^{(2)})\ 0 = a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \cdots, a_n^{(2)}, \cdots \qquad (a_v^{(k)} < a_{v+1}^{(k)}) \\
&\vdots \\
&(A^{(k)})\ 0 = a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \cdots, a_n^{(k)}, \cdots
\end{aligned} \tag{①}$$

我们要问是不是每一个非负整数 n 都可以表成下列形式

$$n = a_{n_1}^{(1)} + a_{n_2}^{(2)} + \cdots + a_{n_k}^{(k)} \tag{②}$$

在这里,我们最好引进集合 $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(k)}$ 的和的概念.我们把所有能表成②的形式的非负整数所组成的集合称为 $A^{(1)}, \cdots, A^{(k)}$ 的 Шнирельман 和,或简称它们的和,记作

$$A = A^{(1)} + \cdots + A^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} A^{(i)} \tag{③}$$

有了以上的定义②,我们的一般性问题就可以叙述为:是不是 k 个集合①的和③包含全体自然数.在本文里面,以后所谓集合都指非负整数的集合.

① 摘自:闵嗣鹤.数论的方法(上册).北京:科学出版社,1983 年.

② 对于不包含 0 的整数集合,应该先把 0 加进去然后求和,所得的和仍称为原来各集合的 Шнирельман 和.

2.2 密率的引进

为了研究上述一般性的问题,Л.Г.Шнирельман 首先引进了密率的概念.考虑任何一个集合

$$(A)0 = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots (a_n < a_{n+1}, a_n \text{是整数})$$

用 $A(n)$ 代表 A 中不超过 $n(n \geqslant 1)$ 的正整数的个数(注意 0 不计算在内),即

$$A(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant v \leqslant n \\ v \in A}} 1$$

则 $0 \leqslant A(n) \leqslant n$,而

$$0 \leqslant \frac{A(n)}{n} \leqslant 1$$

我们定义 $\frac{A(n)}{n}(n = 1,2,\cdots)$ 的下确界为 A 的密率,记作 $d(A)$,即

$$d(A) = \inf_{n \geqslant 1} \frac{A(n)}{n} \tag{④}$$

从这个定义立刻可以推出以下的一些简单结果:

(1) 当 $a_1 > 1$(即 A 不包含 1) 时, $d(A) = 0$.

(2) 当 $a_n = 1 + r(n - r)$(即 A 从 a_1 起是以 1 为首项, r 为公差的等差级数)时

$$d(A) = \frac{1}{r}$$

(3) 每一个等比级数所成集合的密率是 0.

(4) 所有完全平方所组成集合的密率是 0.

(5) 若 $d(A) = 0$,而 A 包含 1 则任给 $\varepsilon > 0$ 一定可找到 $N \geqslant 1$ 使得

$$A(N) < \varepsilon N$$

(6) 集合 A 包含自然数全体的充要条件是 $d(A) = 1$.

从以上最后一条性质看来,我们就知道上节最后所提出的问题,就是要问 k 个集合之和 A 的密度 $d(A)$ 是不是 1.因此,下面的定理有着重要的意义.

定理 1 (Шнирельман) 设 A, B 是两个集合,则

$$d(A + B) \geqslant d(A) + d(B) - d(A)d(B) \tag{⑤}$$

证明 设 $A + B = C$,而

$$A(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant v \leqslant n \\ v \in A}} 1, B(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant v \leqslant n \\ v \in B}} 1, C(n) = \sum_{\substack{1 \leqslant v \leqslant n \\ v \in C}} 1$$

及

$$d(A) = \alpha, d(B) = \beta, d(C) = \gamma$$

在自然数的一段 $(1, n)$ 中含有 A 内的 $A(n)$ 个整数.设用 a_k 及 a_{k+1} 表其中依次

相邻的两个数,则在这两数之间有 $a_{k+1} - a_k - 1 = l$ 个数不属于 A,它们是

$$a_k + 1, a_k + 2, \cdots, a_k + l = a_{k+1} - 1$$

以上各数中间凡可以写成 $a_k + b(b \in B)$ 这种形式的数都是属于 C 的,它们的个数等于 B 在$(1, l)$ 一段中所包含整数的个数,这当然就是 $B(l)$.

因此,在 A 的每相邻两数之间,如果所包含的一段自然数的长度(即个数)是 l,就至少有 $B(l)$ 个数属于 C.因此在自然数的一段$(1, n)$中,C 所包含整数的个数 $C(n)$ 至少是

$$A(n) + \sum B(l)$$

上式中 $\sum$ 的各项通过$(1, n)$中不含 A 内整数的一段一段的自然数.但根据密率的定义,$B(l) \geqslant \beta l$,故

$$C(n) \geqslant A(n) + \beta \sum l = A(n) + \beta\{n - A(n)\}$$

上面最后一个等式的成立是由于 $\sum l$ 等于$(1, n)$中不落在 A 内的整数的个数,当然它等于 $n - A(n)$.又 $A(n) \geqslant \alpha n$,故

$$C(n) \geqslant A(n)(1 - \beta) + \beta n \geqslant \alpha n(1 - \beta) + \beta n$$

由此立刻得到

$$\frac{C(n)}{n} \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta$$

上式对于所有正整数 n 都成立,故

$$\gamma = d(C) \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta$$

证毕.

上面的不等式又可以写成

$$1 - d(A + B) \leqslant \{1 - d(A)\}\{1 - d(B)\}$$

用归纳法即可推广成

$$1 - d(A_1 + \cdots + A_k) \leqslant \prod_{i=1}^{k}\{1 - d(A_i)\}$$

故得下面的推论.

推论 1

$$d(A_1 + \cdots + A_k) \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{k}\{1 - d(A_i)\}$$

从 Шнирельман 的不等式,可以推出一系列值得称道的结果,其中居首要地位的是下面的定理 2.在叙述这个定理之前,我们先引进一个定义并证明一个引理.

定义 如果一个集合 A 本身与本身相加至一定次数 k 时就包含自然数全体,则称 A 是自然数的一个基.

引理 1 若 $A(n) + B(n) > n - 1$,则 $n \in A + B$.

证明　若 n 在 A 或 B 中，引理显然成立．今设 n 既不在 A 又不在 B 中，于是

$$A(n) = A(n-1), B(n) = B(n-1)$$

而

$$A(n-1) + B(n-1) > n-1$$

设在 $(1, n-1)$ 一段内，A 与 B 所包含的数分别为

$$a_1, a_2, \cdots, a_r$$

$$b_1, b_2, \cdots, b_s$$

则

$$r = A(n-1), s = B(n-1)$$

而

$$a_1, a_2, \cdots, a_r$$

$$n - b_1, n - b_2, \cdots, n - b_s$$

都在 $(1, n-1)$ 一段中，它们的总个数是

$$r + s = A(n-1) + B(n-1) > n-1$$

所以其中至少有两个相等，设为 $a_i = n - b_k$，则 $n = a_i + b_k$，故 n 在 $A + B$ 中．

从上面的引理很容易推出下面的推论．

推论 2　若 $C = A + B$，而 $d(A) + d(B) \geqslant 1$，则 $d(C) = 1$．

定理 2　(Шнирельман) 每一个密率是正的集合都是自然数的基．

证明　设 $d(A) = \alpha > 0$ 而

$$A_k = A + A + \cdots + A（共 k 项）$$

则由推论 1 得

$$d(A_k) \geqslant 1 - (1-\alpha)^k$$

显然当 k 充分大时

$$d(A_k) > \frac{1}{2}$$

故

$$A_k(n) > \frac{1}{2}n > \frac{1}{2}(n-1)$$

即

$$A_k(n) + A_k(n) > n - 1$$

由引理 1，$n \in A_k + A_k = A_{2k}$．但 n 是任意自然数，故定理成立．

从这个简单的定理出发 Шнирельман 得出了一系列有趣的定理．例如，他证明了由 0，1 及一切素数组成的序列 P 是自然数的一个基．其实这个序列 P 的密率是 0，但他却证明了 $P + P$ 的密率是正的，因而推出了：存在一个充分大的 k 使得每一个大于 1 的自然数都可以表成不超过 k 个素数之和．

2.3 Landau-Шнирельман 的假说及其证明

所谓 Landau-Шнирельман 假说就是:在显然必要的条件

$$d(A)+d(B)\leqslant 1$$

之下,可以用不等式

$$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B) \qquad ⑥$$

代替前证的

$$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B)$$

从 ⑥,在 $\sum_{i=1}^{k}d(A_i)\leqslant 1$ 的条件下,容易推出

$$d\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{k}d(A_i) \qquad ⑦$$

上面的假说最初是通过具体的例子,在 1931 年由 Шнирельман 和 Landau 推想出来的,看起来这个假说很简单其实很难证明. Хинчин 在 $d(A_1)=\cdots=d(A_k)$ 的条件之下,首先证明了这个假说的成立.接着有不少的数学家企图证实这个假说,但是都只得到部分的结果.直到 1942 年才由 Mann 完全地证明了这个假说的成立.在 1943 年 Artin 与 Scherk 给出了比较简单的证明. 1954 年 Kemperman 与 Scherk 给了新的更简单的证明,并有所推广,本文的陈述即以他们的论文为根据.但为简单明确起见,只涉及整数.

令 n 为任一固定整数,I_n 为小于或等于 n 的非负整数的集合,A,B,C 是 I_n 的子集.定义

$$A\oplus B=(A+B)\cap I_n \qquad ⑧$$

特别当 A(或 B)只包含一个元素 d 时,我们常把 $A\oplus B$ 写做 $d\oplus B$(或 $A\oplus d$).依照 Hadiwiger,我们又定义 $C\ominus A$ 为满足叙述条件的元素 d 的集合,即 $d\in I_n$ 且 $A\oplus d\subset C$.这样,$C\ominus A$ 就是满足 $A+D\subset C$ 的 I_n 的最大子集 D.显然有(我们用 $\leftrightarrow$ 表示可以彼此互推)

$$A\oplus B\subset C\leftrightarrow B\subset C\ominus A \qquad ⑨$$

现在叙述我们的基本引理如下:

引理 2 设 $A\oplus B\subset C$, $0\in A$, $0\in B$, $n\notin C$,则一定有 $m\in I_n$ 存在,具有下列性质

$$C(n)-C(n-m)\geqslant A(m)+B(m) \qquad ⑩$$

$$m=n\text{ 或 }0<2m<n \qquad ⑪$$

$$n-m\in C\ominus A\quad n-m\in C\ominus B \qquad ⑫$$

摆在我们面前的有两件事,第一是证明这个基本引理,第二是从基本引理导出不等式 ⑥.比较起来,第二件容易得多,因此我们先做第二件.

显然,如果基本引理已建立,则立即推得下面的命题:

对任意自然数 n,存在一数 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 使得

$$C(n) - C(n-m) \geqslant (\alpha+\beta)m$$

式中,α,β 分别表示 A,B 的密率 $d(A)$ 及 $d(B)$. 换句话说,从数列 $(1,n)$ 中可以截下一段 $(n-m+1,n)$(我们用 (a,b) 表数列 $a,a+1,\cdots,b$). 使得在这一段中 C 的平均密度

$$\frac{C(n)-C(n-m)}{m}$$

至少是 $\alpha+\beta$.

上述命题成立是因为当 $n \in C$ 时

$$C(n) - C(n-1) = 1 \geqslant (\alpha+\beta)\cdot 1$$

而当 $n \notin C$ 时,同引理 2,有 m 存在满足

$$C(n) - C(n-m) \geqslant A(m) + B(m) \geqslant (\alpha+\beta)\cdot m$$

利用上述命题,我们可以从 $(1,n)$ 中截取一段 $(n-m+1,n)$ 使得在这段里面 C 的平均密度至少是 $\alpha+\beta$,又同样地可以截下一段 $(n-m-m'+1,n-m)$ 使其中 C 的平均密度至少是 $\alpha+\beta$. 如此反复进行,经有限步骤分 $(1,n)$ 成有限段,每段平均密度至少是 $\alpha+\beta$,故对数列 $(1,n)$ 而言,C 的平均密度至少是

$$\frac{m(\alpha+\beta)+m'(\alpha+\beta)+\cdots}{m+m'+\cdots} = \alpha+\beta$$

又因 n 是任意的,故

$$d(C) \geqslant \alpha+\beta$$

证毕.

剩下只有证明基本引理这一件事,但这是很复杂的一件工作,所以另立一节来讨论.

2.4 基本引理的证明

由于 $B \subset C \ominus A$,只需在较强条件

$$B = C \ominus A \tag{13}$$

的情况下证明基本引理.

设

$$A_0 = A, B_0 = B \tag{14}$$

又设 $e_1 \in A_0$ 是能使下列方程有解的最小元素,

$$e_1 + b_1 + b'_1 = \bar{c}\begin{cases} \leqslant n \\ \notin C \end{cases} \tag{15}$$

其中,b_1, b'_1 均须属于 B_0(若无此类元素存在则在下面的式 ⑳ 中取 h 为 0),取

定 e_1 以后，b_1 与 b'_1 一般不是唯一的. 设 B_1^* 表全部解 b_1, b'_1 的集合而 $A_1^* = e_1 \oplus B_1^*$. 于是 $B_1^* \subset B_0, A_0 \cap A_1^* = 0$，这因为若 $a_1 \in A_1^*$ 则有 $a_1 = e_1 + b_1$，由集合的构成知必有 b'_1 存在，使得 $e_1 + b_1 + b'_1 = \bar{c}$，即 $a_1 + b'_1$ 不属于 C. 由此推出 $a_1 \notin A_0$（否则 $a_1 + b'_1$ 属于 C）.

设 B_1 是 B_1^* 在 B_0 中的余集（即属于 B_0 而不属于 B_1^* 的元素的集合）. 又设 $A_1 = A_0 \cup A_1^*$. 由 ⑮ 有

$$0 \notin B_1^* \qquad ⑯$$

$$0 \in A_1, 0 \in B_1 \qquad ⑰$$

引理 3

$$B_1 = C \ominus A_1$$

证明　由 ⑬ 及 A_1 与 B_1 的定义有

$$C \ominus A_1 \subset C \ominus A_0 = B_0 \qquad ⑱$$

$$B_1 \subset B_0 \qquad ⑲$$

若 $b_1 \in B_1^*$ 则有 b'_1 满足 ⑮，即 $e_1 + b_1 + b'_1 = \bar{c}$ 而 $e_1 + b_1^2 \in A_1^* \subset A_1$. 故 $b_1 \notin C \ominus A_1$. 由此推知 $C \ominus A_1$ 包含于 B_1^* 的余集 B_1 中，即 $C \ominus A_1 \subset B_1$.

反之，设 $b_1 \in B_0$，且 $b_1 \notin C \ominus A_1$，则有 $a_1 \in A_1$ 使 $a_1 + b_1 = \bar{c}$. 由于 $A_0 \oplus b_1 \subset C$，故 $a_1 \in A_1^*$ 即 $a_1 = e_1 + b'_1, b'_1 \in B_1^*$. 由 $a_1 + b_1 = e_1 + b'_1 + b_1 = \bar{c}$ 推知 $b_1 \in B_1^*$，故 $b_1 \notin B_1$，由此

$$B_1 \subset C \ominus A_1$$

证完.

用 A_1, B_1 代替前面的 A_0, B_0，我们可以仿前定义 $e_2, B_2^*, A_2^*, B_2, A_2$，重复运用这种步骤，我们可以定义 $e_3, B_3^*, A_3^*, B_3, A_3 \cdots$. 容易看出 B_v 较 B_{v-1} 中确实减少了若干元素，由于 B_v 中元素的有限性，这一系列的步骤进行至有限次后必将停止，设次数为 $h \geqslant 0$. 此时有

$$A_h \oplus B_h \oplus B_h \subset C \qquad ⑳$$

此外按归纳法易证

$$B_v = C \ominus A_v \qquad ㉑$$

$$0 \notin B_v^*, 0 \in B_v, v = 1, 2, \cdots, h \qquad ㉒$$

故

$$B_h \subset B_h \oplus B_h \subset C \ominus A_h = B_h$$

由此有

$$B_h \oplus B_h = B_h \qquad ㉓$$

引理 4

$$e_1 < e_2 < \cdots < e_k \qquad ⑫$$

证明 只须证 $e_1 < e_2$. 由定义 $e_2 \in A_1 = A_0 \cup A_1^*$. 若 $e_2 \in A_0$, 则由 e_1 的极小性及 B_1^* 的定义即得 $e_1 < e_2$. 若 $e_2 \in A_1^*$ 则 $e_2 = e_1 + b_1, b_1 \in B_1^*$. 又 $0 \notin B_1^*$ 故 $e_1 < e_2$.

证毕.

据 ㉒, B_h 非空集. 设 $n - m$ 是它的最大元素, 我们将证 m 具有 ⑩ ~ ⑫ 所要求的性质.

由 ㉓ 及 $n - m$ 的定义, 我们有

$$2(n - m) = n - m \text{ 或 } 2(n - m) > n \qquad ㉕$$

但 $B_h \subset B = 0 \oplus B \subset A \oplus B \subset C$. 故由 $n \notin C$ 推知 $n \notin B_h$ 故有

$$n - m \neq n \qquad ㉖$$

结合 ㉕ 导出 ⑪. 显然 $n - m \in B_h \subset B = C \ominus A$. 即 ⑫ 的前一部分成立. 又由 $n - m \in B_h$ 推知

$$n - m \notin B_1^* \qquad ㉗$$

再由 e_1 的极小性, 我们可以推出没有 $b'_1 \in B_0$ 能满足

$$0 + (n - m) + b'_1 \begin{cases} \in I_n \\ \notin C \end{cases}$$

这因为否则将得出 $n - m \in B_1^*$. 这又验证了 ⑫ 的后一部分: $n - m \in C \ominus B$.

下面我们用几个引理来证明 ⑩ 这个唯一待验证的性质.

引理 5

$$B(m) = \sum_{v=1}^{h} B_v^*(m)$$

证明 $B = B_h \cup B_1^* \cup \cdots \cup B_h^*$. 又 B_v^* 不相交, 故只须证

$$B_h(m) = 0$$

设 $b \in B_h$ 及 $b > 0$. 由 ㉓, $b + (n - m) \in B_h$ 或大于 n. 由 $n - m$ 的极大性, 第一个可能性不存在. 故 $b > m$ 即

$$B_h(m) = 0$$

证毕.

引理 6

$$C(n) - C(n - m) \geqslant A(m) + \sum_{v=1}^{h} A_v^*(m)$$

证明 $A_h \oplus (n - m) \subset A_h \oplus B_h \subset C$. 故若 $0 < a \leqslant m, a \in A_h$, 则可推出

$$n - m < a + (n - m) \leqslant n, a + (n - m) \in C$$

由此

$$C(n)-C(n-m)\geqslant A_h(m)=A(m)+\sum_{v=1}^{h}A_v^*(m)$$

这因为 $A_h=A\cup A_1^*\cup\cdots\cup A_h^*$ 且 $A,A_1^*,\cdots,A_h^*$ 彼此不相交.

证毕.

引理 7

$$A_v^*(m)=B_v^*(m),v=1,2,\cdots,h$$

证明 $A_v^*=e_v\oplus B_v^*$ 故只须证在

$$b\in B_v^*,0<b\leqslant m \qquad ㉘$$

的条件下,可推出 $e_v+b\leqslant m$.设

$$t=n-m+b \qquad ㉙$$

问题化为证明

$$e_v+t\leqslant n$$

(i) $t\notin B_{v-1}$.由 ㉑ 知存在 $a\in A_{v-1}$ 使

$$a+t=a+(n-m)+b\begin{cases}\leqslant n\\ \notin C\end{cases}$$

又 $n-m\in B_h\subset B_{v-1},b\in B_v^*\subset B_{v-1}$ 由 e_v 的极小性推知 $a\geqslant e_v$,故 $e_v+t\leqslant a+t\leqslant n$.

(ii) $t\in B_{v-1}$.据 ㉘,㉙ 我们有 $t>n-m$,故 $t\notin B_h$.

由此对某一 $\mu(v\leqslant\mu\leqslant h)$,可得 $t\in B_\mu^*$,即有 $b'\in B_\mu^*$ 存在,使 $e_\mu+t+b'\begin{cases}\leqslant n\\ \notin C.\end{cases}$ 由引理 4

$$n\geqslant e_\mu+t+b'>e_\mu+t>e_v+t$$

证毕.

结合引理 5,6,7,我们就得到 ⑩.

3 朗道－须尼尔曼猜测和曼恩定理①

——A.Я.辛钦

辛 钦(Хинчин, Александр Яковлевич, 1894.7.19—1959.11.18)前苏联数学家、教育家.生于康德罗沃,现在的卡卢加州.

3.1

也许你们已听说过著名的拉格朗日定理:每个自然数是不多于四个平方数

① 摘自[苏联]A.Я.辛钦.数论的三颗明珠.王志雄,译.上海:上海科学技术出版社,1984 年.

的和.也就是说:每个自然数或为另一个自然数的平方,或为两个、三个或四个自然数的平方和.稍后,我们将用某种不同的形式表述这个定理的内容.从0开始,写下平方数列

$$0,1,4,9,16,25,\cdots \tag{$*$}$$

这是一个整数列,用 Q 表示,与它完全相同的四个数列,分别记为 Q_1,Q_2,Q_3 和 Q_4.现在,从 Q_1 中任取数 a_1^2,从 Q_2 中任取数 a_2^2,从 Q_3 中任取数 a_3^2,而从 Q_4 中任取数 a_4^2,把这四个数加起来,得到和

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \tag{①}$$

它可能是

(1) 零(如果 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$);

(2) 自然数的平方(如果表达式(1)中的数 a_1,a_2,a_3,a_4 中有三个为0,而第四个不为0);

(3) 两个自然数的平方和(如果表达式(1)中的数 a_1,a_2,a_3,a_4 中有两个为0,而另两个不为0);

(4) 三个自然数的平方和(如果表达式(1)中的数 a_1,a_2,a_3,a_4 中有一个为0,而其他三个不为0);

(5) 四个自然数的平方和(如果表达式(1)中的数 a_1,a_2,a_3,a_4 全不为0).

因此,得到的数 n 或为0,或可表为不多于四个平方数的和的形式;显然,反过来,所有这样的自然数可用我们刚才描述的过程得到.

现在,从刚才给你们指出的过程得到的自然数(即分别取自数列 Q_1,Q_2,Q_3 和 Q_4 的四个数的和),我们把它们依大小排成序列

$$0,n_1,n_2,n_3,\cdots \tag{A}$$

(这里,$0<n_1<n_2<n_3<\cdots$,为此,如果得到的数中,有些相等,则只取其一列入(A)中).这时,拉格朗日定理只是断言数列(A)含有全体自然数,即 $n_1=1$,$n_2=2,n_3=3$ 等.

现在,我们推广这个过程.设有 k 个从0开始的递增整数列

$$0,a_1^{(1)},a_2^{(1)},\cdots,a_m^{(1)},\cdots, \tag{$A^{(1)}$}$$

$$0,a_1^{(2)},a_2^{(2)},\cdots,a_n^{(2)},\cdots, \tag{$A^{(2)}$}$$

$$\vdots$$

$$0,a_1^{(k)},a_2^{(k)},\cdots,a_m^{(k)},\cdots, \tag{$A^{(k)}$}$$

从每个数列 $A^{(i)}(1\leqslant i\leqslant k)$ 中任取一数,并把这 k 个数加起来,这样得到的数的全体排成新的无重复的递增数列,得

$$0,n_1,n_2,\cdots,n_m,\cdots \tag{A'}$$

则我们称它为已知数列 $A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(k)}$ 的和

$$A' = A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} A^{(i)}$$

那么,拉格朗日定理的内容是:和 $Q + Q + Q + Q$ 含全体自然数.

也许,你们知道著名的费马定理:和 $Q + Q$ 含有被4除余1的素数(即数5,13,17,29,…)全体. 也许你们也知道,著名的原苏联学者维诺格拉多夫证明了以下的定理:用 P 表示由0和全体素数组成的数列

$$0,2,3,5,7,11,13,17,\cdots \qquad (P)$$

则和 $P + P + P$ 含有全体充分大的素数. 许多最伟大的数学家曾为这定理进行了两百年无成效的奋斗①.

我在这儿介绍这些例子的唯一的十分简单的目的,是使你们熟悉数列和的概念,并表明:借助这个概念,数论的一些经典定理的阐述是多么方便和简单.

3.2

毫无疑问,你们一定注意到,在上节的所有例子中,我们竭力要确立:一定个数的数列之和是完全或几乎完全含有另一数类(例如,全体自然数,充分大的素数,等等). 在一切其他类似的问题中,查明已知数列的和是否在某种意义上稠密地分布在自然数列中,这恰是我们的研究目的. 这时,经常谈到和含有全体自然数(如我们在第一个例子中看到的). 拉格朗日断言:四个数列 Q 的和含有全体自然数. 一般地,如果 k 个同样的数列 A' 的和含有全体自然数,则称数列 A' 为自然数列的 k 阶基. 这样一来,拉格朗日定理断言:平方数列 Q 是四阶基. 稍后,我们将指明立方数列是九阶基. 容易看出,一切 k 阶基同时也是 $k + 1$ 阶基.

在这些及许多其他的例子中,和的"密率"由被加数列的特殊性质,即这些数列具备的算术性质(它们或是平方,或是素数,或是其他的性质)所决定. 著名的原苏联学者 Л.Г.斯尼列利曼在1930年首先提出这样的问题:数列和的密率在怎样的程度上只决定于被加数列的密率,而与它们的算术性质无关?这个问题不仅意义深远和饶有趣味,而且有助于处理一些经典问题. 它给许多出色的研究提供了有力的工具,也有了丰富的文献资料.

为了能在这领域准确地提出问题并不加引号地书写词"密率",我们必须首先约定应该用怎样的数来度量被研究数列的"密率"(恰如在物理学中,词"热"和"冷"得到准确的科学意义仅在能够量测温度之后).

在我们研究各种问题中采用的"密率",其十分方便的度量是斯尼列利曼提出的. 设数列

---

① 这定理实为著名的哥德巴赫猜想的减弱形式. —— 译者注

$$0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \qquad (A'')$$

如通常所要求的,所有的 a_n 是自然数,$a_n < a_{n+1}(n = 1,2,\cdots)$,用 $A(n)$ 表示数列(A'') 中不超过 n 的自然数的个数(零不算在内),则 $0 \leqslant A(n) \leqslant n$,故

$$0 \leqslant \frac{A(n)}{n} \leqslant 1$$

显然,分数$\frac{A(n)}{n}$对不同的 n 有不同的值,它可视为数列(A'') 在从 1 到 n 的自然数段间的一种平均密度.这些分数全体的最大下界,须尼尔曼建议称之为数列(A'') 在全体自然数列中的“密率”.我们用 $d(A'')$ 来表示它.

为了掌握这个概念的最简单的性质,我建议你们独立证明下列命题:

(1) 如果 $a_1 > 1$(即数列(A'') 不含 1),则 $d(A) = 0$.

(2) 如果 $a_n = 1 + r(n - 1)$(即数列(A) 从 a_1 开始是首项为 1,公差为 r 的算术级数),则

$$d(A) = \frac{1}{r}$$

(3) 一切几何级数的密率是 0.

(4) 平方数列的密率是 0.

(5) 为了数列(A'') 含有全体自然数$(a_n = n, n = 1,2,\cdots)$,必须且只须 $d(A) = 1$.

(6) 如果 $d(A) = 0$ 且(A'') 含数 1,则对任意的 $\varepsilon > 0$,可以找到充分大的数 N,使得

$$A(N) < \varepsilon N$$

如果你们证明了所有这一些命题,那么,就能熟悉密率的概念并能应用它了.现在,我希望你们还能证明下面这个虽简单,但十分著名的斯尼列利曼引理

$$d(A + B) \geqslant d(A) + d(B) - d(A)d(B) \qquad ②$$

这个不等式的意思可理解为:任意两个数列的和的密率不小于它们密率的和减去密率的积.这个斯尼列利曼不等式,对于用被加数列的密率来估计和的密率是第一个意义深远的工具.设 $A(n)$ 表示数列 A 中不超过 n 的自然数的个数,$B(n)$ 是数列 B 中不超过 n 的自然数的个数,为简便起见,令 $d(A) = \alpha$,$d(B) = \beta, A + B = C, d(C) = \gamma$.自然数段$(1, n)$ 中含 $A(n)$ 个数在数列(A) 中,它们也都在数列 C 中,设 a_k 和 a_{k+1} 是这些数中相邻的两个数,在它们之间有 $a_{k+1} - a_k - 1 = l$ 个数不在 A 中,即数

$$a_k + 1, a_k + 2, \cdots, a_k + l = a_{k+1} - 1$$

但它们有一些在 C 中,例如形为 $a_k + r$ 的一切数,其 r 在 B 中(我们将简便地写为 $r \in B$).但是最后这种形式的数恰与段$(1, l)$ 中含数列 B 的数有相同的个数即 $B(l)$,因此,含在数列 A 中相邻两数间长为 l 的一切段,含 C 的数的个数不少

于 $B(L)$,故得段$(1,n)$中在 C 中的数的数目 $C(n)$ 不少于

$$A(n)+\sum B(l)$$

和号取遍上述一切段.依密率定义,$B(l)\geqslant \beta l$,故

$$C(n)\geqslant A(n)+\beta\sum l=A(n)+\beta\{n-A(n)\}$$

因此 $\sum l$ 是端点只在 A 中的各段长的和,即段$(1,n)$中不在 A 的数的个数 $n-A(n)$.但 $A(n)\geqslant \alpha n$,故

$$C(n)\geqslant A(n)(1-\beta)+\beta n\geqslant \alpha n(1-\beta)+\beta n$$

由此得

$$\frac{C(n)}{n}\geqslant \alpha+\beta-\alpha\beta$$

因为这个不等式对任意自然数 n 成立,故

$$\gamma=d(C)\geqslant \alpha+\beta-\alpha\beta$$

这就是所要证明的.

斯尼列利曼不等式 ② 可写成等价形式

$$1-d(A+B)\leqslant\{1-d(A)\}\{1-d(B)\}$$

由这形式不难推广到任意个被加项的情况

$$1-d(A_1+A_2+\cdots+A_k)\leqslant\prod_{i=1}^{k}\{1-d(A_i)\}$$

其证明可用简单的归纳法,你们不难证实它.如果把最后一个不等式写成

$$d(A_1+A_2+\cdots+A_k)\geqslant 1-\prod_{i=1}^{k}\{1-d(A_i)\} \qquad ③$$

则可用被加项密率来估计和的密率.须尼尔曼从他的初等不等式出发,推出一系列十分著名的结论.首先是以下重要的定理.

定理 一切正密率的集合是自然数列的基.

易言之,如果 $\alpha=d(A)>0$,则足够多的数列 A 的和含全部自然数.这个定理的证明是如此简单,尽管它稍微偏离我们原先的问题,我还是想给你们讲讲它的证明.

为简便计,我们用 A_k 表示 k 个与 A 相同的数列的和,则由不等式 ③ 得

$$d(A_k)\geqslant 1-(1-\alpha)^k$$

因 $\alpha>0$,当 k 足够大时

$$d(A_k)>\frac{1}{2} \qquad ④$$

现在,不难证明数列 A_{2k} 含全部自然数.这可从以下一般的引理推出.

引理 1 如果 $A(n)+B(n)>n-1$,则 n 在 $A+B$ 中.

实际上,如果 n 在 A 或在 B 中,则得证.故我们可以假设 n 不在 A 也不在 B

中，则

$$A(n)=A(n-1),B(n)=B(n-1)$$

因而

$$A(n-1)+B(n-1)>n-1$$

设 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 分别是在 A 中和 B 中属于段 $(1,n-1)$ 的数，则所有的数

$$a_1,a_2,\cdots,a_r$$

$$n-b_1,n-b_2,\cdots,n-b_s$$

在段 $(1,n-1)$ 中，它们的数目是

$$r+s=A(n-1)+B(n-1)>n-1$$

故上行的数至少有一个等于下行的某一个数，设 $a_i=n-b_k$，则 $n=a_i+b_k$，即 n 在 $A+B$ 中.

现在回到我们原先的讨论中来. 因 ④，对任意的 n，得

$$A_k(n)>\frac{1}{2}n>\frac{n-1}{2}$$

这表明

$$A_k(n)+A_k(n)>n-1$$

故由刚才证明的引理，n 在 $A_k+A_k=A_{2k}$ 中，但 n 是任意的自然数，故我们的定理证毕.

在须尼尔曼的论文中，由这简单的定理得到一系列重要的推论. 他第一个证明了：由 1 和全体素数组成的数列是自然数的基. 诚然，这个数列 P，正如欧拉证明的，密率是 0，因而不能直接应用刚证明的定理，但斯尼列利曼成功地证明了 $P+P$ 有正密率，即 $P+P$ 是基，故 P 也是基. 由此立即得出：对足够大的 k，除 1 以外的自然数可表为不多于 k 个素数的和的形式. 当时(1930 年)，这是个重大的成果，从而引起了科学界的极大兴趣. 正如我在这节开头跟你们说到的，因为维诺格拉多夫的出色研究，在这方面已有更深入的结果了.

3.3

前面的那些，其目的是尽可能快地把你们引导到数论中独特的和有趣的领域中. 须尼尔曼的著作开创了这领域的研究. 但是，这个领域的一个特殊问题是本文的直接目的. 我现在转而阐述这个问题.

1931 年秋，须尼尔曼从国外出差回来，报告他在哥庭根和朗道的谈话，顺便说到他们发现了如下有趣的事实：在他们能够想到的一切具体例子中，我们在 3.2 中导出的不等式

$$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B)$$

可以用更强(也更简单)的不等式

$$d(A+B) \geqslant d(A)+d(B) \quad ⑤$$

代替，即和的密率永远不小于被加项的密率之和（在这儿当然要求 $d(A)+d(B) \leqslant 1$）.自然的，他们因而猜想不等式⑤是一般规律，但一着手证明这个猜想，开始并未成功.这立即成为很显然的事，如果他们的猜想是正确的，其证明方法一定是很复杂的.我们也将注意到，如果猜想的不等式⑤，实际上是一般的规律，则借助于数学归纳法可立即推广到任意个被加项的情况，即当条件 $\sum_{i=1}^{k} d(A_i) \leqslant 1$ 成立时，则不等式

$$d\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{k} d(A_i) \quad ⑥$$

也成立.

这个问题，因为它的简单和精致，同时，也因为它的初等性及解决它的困难性，自然引起了研究者的注意.当时，我自己也被它迷恋上了，并为它放弃了其他所有的研究.经过几个月的紧张努力之后，在1932年初，我证明不等式⑤在重要的特殊情况 $d(A)=d(B)$ 下成立（应该承认，这种情况是最重要的，因为在许多具体问题中，所有被加项都是一样的）.同时，我证明了一般的不等式⑥当 $d(A_1)=d(A_2)=\cdots=d(A_k)$ 时成立（不难看出，这结果不能从上一个结果用简单的归纳法得到，而要求单独证明）.我用的方法完全是初等的，但很繁.后来，我把证明略为简化一些.

不管怎样，这些都仅是特殊情况.我一直以为，我的方法经某些适当而巧妙的改进，就能完全解决这个问题，但是，我在这方面的一切努力没有任何收效.

当时，我的著作一发表，就吸引了世界上相当多的研究者对朗道－斯尼列利曼猜想的注意，得到许多并非十分有意义的特殊结果，产生了一系列文献.有一些作者把问题从自然数领域扩充到其他领域.总之，问题变得“时髦”了，科学界为它提供了奖金.在1935年，我的英国朋友写信告诉我说：“英国至少有一半的数学家把他们的日常事务搁置一旁，试图解决这个问题.”朗道在论述堆垒数论的最新成就的书中写道，希望“读者把这个问题记在心里”.但它显得很顽固，最能干的研究者经过了好几年的努力也攻克不下它.直到1942年末，年轻的美国数学家曼恩才攻克了它，他找到⑤（从而也得到⑥）的完全的证明.他的方法完全是初等的，依风格而论，接近于我的方法，但是基于完全不同的另一种思想.其证明很繁很长，在此，我不想给你们介绍这个证明.在1943年，阿亭和谢尔克发表了一个新的证明，它完全是基于另一种思想，尽管同样也是初等的，但较为易懂且简短得多.这就是我要向你们介绍的证明，也是我写这一章的目的.它是以下各节的内容.

3.4

设 A 和 B 是两个数列,令 $A + B = C$,$A(n)$ 和 $d(A)$ 等有通常的意义.记住,我们的数列都是从 0 开始,而计算 $A(n)$,$B(n)$,$C(n)$,只考虑到这些数列中的自然数.我们要证明:只要 $d(A) + d(B) \leqslant 1$,则不等式

$$d(C) \geqslant d(A) + d(B) \qquad ⑦$$

成立.以后,为简便计,设 $d(A) = \alpha$,$d(B) = \beta$.

引理 2　对任意自然数 n,存在整数 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 使得

$$C(n) - C(n - m) \geqslant (\alpha + \beta)m$$

也就是说,在段 $(1,n)$ 中存在"末端" $(n - m + 1,n)$,使数列 C 在这末端上的平均密度不小于 $\alpha + \beta$.

现在,我们面临着两个问题:① 证明基本引理;② 从基本引理推出不等式⑦.其中第二个问题比第一个问题简单,因而,首先解决它.

设引理 2 成立,则在段 $(1,n)$ 的某末端 $(n - m + 1,n)$,数列 C 的平均密度小于 $\alpha + \beta$.但在段 $(1,n - m)$ 上,由于引理 2,又有某末端 $(n - m - m' + 1, n - m)$,数列 C 在它上面的平均密度不小于 $\alpha + \beta$.显然,如此继续下去,经过有限次,段 $(1,n)$ 分成有限小段,其每一段上,C 的平均密度不小于 $\alpha + \beta$,故在整段 $(1,n)$ 上,数列 C 的平均密度不小于 $\alpha + \beta$,因 n 是任意的,故有

$$d(C) \geqslant \alpha + \beta$$

这正是所要求证的.

因而,问题归结为证明引理 2.为此,我们要用较长的篇幅和较复杂的技巧.

3.5　正规数列

下面,我们将认为数 n 是固定的,而所研究的数列都是由 0 和段 $(1,n)$ 中的某些数组成.数列 H 认为是正规的,如果它具有下列性质:对段 $(1,n)$ 中不属于 H 的任意数 f 和 f',数 $f + f' - n$ 也不属 H(不排除 $f = f'$ 的情况).

如果数 n 属于数列 C,则

$$C(n) - C(n - 1) = 1 \geqslant (\alpha + \beta) \times 1$$

故引理为真(取 $m = 1$).因此,以后,请记住,我们将假设 n 不在 C 中.

首先,我们不难验证,当 C 是正规数列时,引理 2 成立.实际上,用 m 表示不在 C 中的最小自然数(因为依假设,n 不在 C 中,故 $m \leqslant n$).设 s 是在 $n - m$ 和 n 之间的任意数,$n - m < s < n$,则 $0 < s + m - n < m$,故 $s \in C$.实际上,若不然,则由 C 的正规性,数 $s + m - n$ 不在 C 中,但我们刚才指出,这个数小于 m,而依假设,m 是不在 C 中的最小自然数.

这样一来,段 $n-m<s<n$ 中的所有数 s 在 C 中,故

$$C(n)-C(n-m)=m-1$$

另一方面,因 m 不在 $C=A+B$ 中,由3.2的引理,$A(m)+B(m)\leqslant m-1$.故

$$C(n)-C(n-m)\geqslant A(m)+B(m)\geqslant(\alpha+\beta)m \qquad ⑧$$

即得基本引理.

3.6 典式扩张

现在讨论 $C=A+B$ 不具有正规性的情况.这时,我们将依一定规则,由不在 B 中的某些数组成一个新的集合,并把它附到 B 上,得到扩张集 B_1,显然,$A+B_1=C_1$ 是 C 的扩张集.如上指出,B 和 C 的扩张集(集合 A 不变)是依唯一确定的方式定义,它们当且仅当 C 不是正规时,才可能产生.我们将称这扩张为 B 和 C 的典式扩张.最后,我们将导出典式扩张的一些重要性质,并借助它完成基本引理的证明.

先给集合 B 和 C 的典式扩张以精确的定义.如果 C 不是正规的,则段$(0,n)$中存在数 c 和 c',使得

$$c\notin C,c'\notin C,c+c'-n\in C$$

因 $C=A+B$,故有

$$c+c'-n=a+b(a\in A,b\in B) \qquad ⑨$$

设 β_0 是集合 B 中能在等式⑨中起数 b 作用的最小数.用另一句话说,β_0 是最小的数 $b\in B$,使得在段$(0,n)$中的数 $c\notin C,c'\notin C,a\in A$,经过适当的选择,等式⑨成立.我们称这数为扩张的基.

这样,方程

$$c+c'-n=a+\beta_0 \qquad ⑩$$

一定有解 c,c',a,它们满足条件

$$c\notin C,c'\notin C,a\in A$$

同时,这三个数都属于段$(0,n)$.满足方程⑩及上述条件的数 c 和 c',形成集合 C^*,显然,C 和 C^* 没有公共元素,其并(即或在 C 中,或在 C^* 中的数全体)

$$C\cup C^*=C_1$$

称为 C 的典式扩张.

现在研究表达式 β_0+n-c,如果 c 跑遍刚刚构造的集合 C^* 的所有数,则这表达式的值的全体构成某个集合 B^*.因⑩,每个这样的数 $\beta_0+n-c(c\in C^*)$ 是形如 $c'-a$,其中 $c'\in C^*,a\in A$.

设 b^* 是 B^* 中任意的数,因有形式 β_0+n-c,故它大于等于 $\beta_0\geqslant 0$,又因有形式 $c'-a(c'\in C^*,a\in A)$ 故它小于等于 $c'\leqslant n$,因而,集合 B^* 的数在

$(0,n)$ 中.此外,如果 $b^* \in B^*$,则 $b^* \notin B$.因为否则,由 $b^* = c' - a$ 得 $c' = a + b^* \in A + B = C$,矛盾.这样一来,$B^*$ 在段 $(0,n)$ 中与 B 没有公共元素,令

$$B \cup B^* = B_1$$

我们称 B_1 为集合 B 的典式扩张.

我们首先要验证

$$A + B_1 = C_1$$

先设 $a \in A, b_1 \in B_1$,我们要证明 $a + b_1 \in C_1$.由 $b_1 \in B_1$ 得到:或 $b_1 \in B$,或 $b_1 \in B^*$.如果 $b_1 \in B$,则 $a + b_1 \in A + B = C \subset C_1$;如果 $b_1 \in B^*$,则 $a + b_1$ 或在 C 中或在 C_1 中,或 $a + b_1 \notin C$.这时(因 b_1 是 B^* 的元素,有形式 $\beta_0 + n - c', c' \notin C$)得

$$c = a + b_1 = a + \beta_0 + n - c' \notin C$$

故
$$c + c' - n = a + \beta_0 \in A + B = C$$

而 $c \notin C, c' \notin C$.依集合 C^* 的定义得

$$c = a + b_1 \in C^* \subset C_1$$

这样,我们证明了 $A + B_1 \subset C_1$.

为了证明相反的关系,设 $c \in C_1$,由此得到:或 $c \in C$,或 $c \in C^*$.如果 $c \in C$,则 $c = a + b, a \in A, b \in B \subset B_1$;如果 $c \in C^*$,则我们已知,对某个 $a \in A$,数 $b^* = c - a$ 在 B^* 中,故 $c = a + b^* \in A + B^* \subset A + B_1$.因此 $C_1 \subset A + B_1$.又因前面已证 $A + B_1 \subset C_1$,说明 $C_1 = A + B_1$.

现在,我要提醒你们,照我们原先的假设,$n \notin C$.不难看出(这对后面的论证是重要的),数 n 也不在扩张集 C_1 中.实际上,如果 $n \in C^*$,依 C^* 的定义,在关系式 ⑩ 中,令 $c' = n$,得 $c = a + \beta_0 \in A + B = C$,但依关系式 ⑩ 的意义,$c \notin C$.

如果扩张集 C_1 还不是正规的,则由 $A + B_1 = C_1$ 和 $n \notin C_1$,集合类 A, B_1, C_1 有 A, B, C 一样的性质,可进行新的典式扩张.找到这个扩张的新基,类似于上面的定义,补充集合 B_1^*, C_1^*,并令

$$B_1 \cup B_1^* = B_2, C_1 \cup C_1^* = C_2$$

同理可证 $A + B_2 = C_2$ 和 $n \notin C_2$.这过程显然可以继续下去,直到扩张集 C_h 是正规的.这种情况必定出现的原因在于:每一次扩张时,我们都在集合 B_μ 和 C_μ 中加进段 $(0,n)$ 中不属于 B_μ 和 C_μ 的新数.

因此,得到有限集合列

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_h$$

$$C = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_h$$

同时,一切 $B_{\mu+1}$(相应的 $C_{\mu+1}$) 含有不在 $B_\mu(C_\mu)$ 中的数,这些数组成集合 $B_\mu^*(C_\mu^*)$,使

$$B_{\mu+1} = B_\mu \cup B_\mu^*, C_{\mu+1} = C_\mu \cup C_\mu^*, 0 \leqslant \mu \leqslant h - 1$$

我们用 β_μ 表示从(B_μ, C_μ) 到$(B_{\mu+1}, C_{\mu+1})$ 扩张的基. 而且

$$A + B_\mu = C_\mu, n \notin C_\mu, 0 \leqslant \mu \leqslant h$$

最后,C_h 是正规的,而集合 $C_\mu(0 \leqslant \mu \leqslant h - 1)$ 则不是正规的.

3.7 典式扩张的性质

以后所需的关于典式扩张的性质,我们用三个引理表述出来并给以证明. 证明基本引理只用到最后一个引理,而引理3和引理4仅在证明引理5时用到.

引理3 $\beta_\mu > \beta_{\mu-1}(1 \leqslant \mu \leqslant h - 1)$,即典式扩张列的基是一个递增数列.

实际上,因 $\beta_\mu \in B_\mu = B_{\mu-1} \cup B_{\mu-1}^*$,则或 $\beta_\mu \in B_{\mu-1}^*$,这时,$\beta_\mu$ 有形式

$$\beta_\mu = \beta_{\mu-1} + n - c$$

其中,$c \in C_{\mu-1}^* \subset C_\mu$,因 $c < n$,故 $\beta_\mu > \beta_{\mu-1}$,引理1得证;或 $\beta_\mu \in B_{\mu-1}$,这时,依 β_μ 的定义,存在 $a \in A, c \notin C_\mu, c' \notin C_\mu$,具有关系

$$c + c' - n = a + \beta_\mu \in C_\mu$$

但因 $\beta_\mu \in B_{\mu-1}$,故

$$c + c' - n = a + \beta_\mu \in A + B_{\mu-1} = C_{\mu-1} \quad ⑪$$

而 $c \notin C_{\mu-1}, c' \notin C_{\mu-1}$,由 $\beta_{\mu-1}$ 的最小性得 $\beta_\mu \geqslant \beta_{\mu-1}$,但如 $\beta_\mu = \beta_{\mu-1}$,依集合 $C_{\mu-1}^*$ 的定义和式 ⑪ 得

$$c \in C_{\mu-1}^* \subset C_\mu, c' \in C_{\mu-1}^* \subset C_\mu$$

都不真,故 $\beta_\mu > \beta_{\mu-1}$.

以后,我们将用 m 表示不在 C_h 中的最小正整数.

引理4 如果 $c \in C_\mu^*, 0 \leqslant \mu \leqslant h - 1$,且 $n - m < c < n$,则 $c > n - m + \beta_\mu$,即在段 $n - m < c < n$ 中集合C_μ^* 的所有数含在这段的一部分中,这部分用不等式 $n - m + \beta_\mu < c < n$ 表示.

只须要证明不等式

$$c + m - n > \beta_\mu$$

从 $n - m < c < n$,得

$$0 < m + c - n < m$$

由此,依 m 的定义,得

$$m + c - n \in C_h$$

但
$$C_h = C_\mu \cup C_\mu^* \cup C_{\mu+1}^* \cup \cdots \cup C_{h-1}^*$$

因此，下面分两种情况讨论.

(i) 如果 $m+c-n\in C_\mu$，则

$$m+c-n=a+b_\mu, a\in A, b_\mu\in B_\mu$$

但 $m\notin C_\mu, c\notin C_\mu$(后者因 $c\in C_\mu^*$). 又因 β_μ 的最小性，应有 $b_\mu\geqslant\beta_\mu$. 但当 $b_\mu=\beta_\mu$，依集合 C_μ^* 的定义，$m\in C_\mu^*$，这因 $C_\mu^*\subset C_{\mu+1}\subset C_h$ 和 $m\notin C_h$ 而不真. 因此，$b_\mu>\beta_\mu$，故

$$m+c-n=a+b_\mu\geqslant b_\mu>\beta_\mu$$

引理 4 得证.

(ii) 如果 $c'=m+c-n\in C_v^*(\mu\leqslant v<h-1)$，则依集合 C_v^* 定义，c' 满足方程 ⑩

$$c'-a=\beta_v+n-c''$$

其中 $a\in A, c''\in C_v^*$. 由此 $c'\geqslant c'-a>\beta_v\geqslant\beta_\mu$(后者由引理 3 得出)，仍证得引理 4.

引理 5 $C_\mu^*(n)-C_\mu^*(n-m)=B_\mu^*(m-1)(0\leqslant\mu\leqslant h-1)$. 即在段 $n-m<c<n$ 中，$c\in C_\mu^*$ 的个数恰等于在(等长)段 $0<b<m$ 中 $b\in B_\mu^*$ 的个数.

研究关系式

$$b=\beta_\mu+n-c \tag{⑫}$$

依集合 B_μ^* 和 C_μ^* 的定义，由 $c\in C_\mu^*$ 得 $b\in B_\mu^*$，反之亦然. 且如 $n-m+\beta_\mu<c<n$，则 $\beta_\mu<b<m$，反之亦然. 故

$$C_\mu^*(n)-C_\mu^*(n-m+\beta_\mu)=B_\mu^*(m-1)-B_\mu^*(\beta_\mu)$$

但由引理 4

$$C_\mu^*(n-m+\beta_\mu)=C_\mu^*(n-m)$$

另一方面，由 ⑫ 表示的一切 $b\in B_\mu^*$，因 $c<n$，故大于 β_μ，因此 $B_\mu^*(\beta_\mu)=0$，则得

$$C_\mu^*(n)-C_\mu^*(n-m)=B_\mu^*(m-1)$$

这正是所要证明的.

3.8 基本引理的证明

由 3.5 的结果和刚刚证明的引理 5，现在，我们能够很容易地证明引理 2.

对数列 A, B_h, C_h 应用形为不等式 ⑧ 的结果(因 C_h 的正则性，这是容许的)，得

$$C_h(n)-C_h(n-m)\geqslant A(m)+B_h(m) \tag{⑬}$$

其中 m 是不在 C_h 中的最小正整数. 显然 $m\notin A$ 且 $m\notin B_h$. 故 $A(m)$ 和 $B_h(m)$

分别可写成 $A(m-1)$ 和 $B_h(m-1)$.

因为在每组并

$$C_h = C \cup C^* \cup C_1^* \cup \cdots \cup C_{h-1}^*$$
$$B_h = B \cup B^* \cup B_1^* \cup \cdots \cup B_{h-1}^*$$

中的集合两两之间没有公共元素,故

$$C_h(n) - C_h(n-m) = C(n) - C(n-m) + \sum_{\mu=0}^{h-1}\{C_\mu^*(n) - C_\mu^*(n-m)\}$$
$$B_h(m) = B_h(m-1) = B(m-1) + \sum_{\mu=0}^{h-1} B_\mu^*(m-1)$$

在此,当然 $C_0^* = C^*, B_0^* = B^*$. 由 ⑬ 得

$$C(n) - C(n-m) + \sum_{\mu=0}^{h-1}\{C_\mu^*(n) - C_\mu^*(n-m)\} \geqslant$$
$$A(m) + B(m-1) + \sum_{\mu=0}^{h-1} B_\mu^*(m-1)$$

但是,由引理 5

$$C_\mu^*(n) - C_\mu^*(n-m) = B_\mu^*(m-1), 0 \leqslant \mu \leqslant h-1$$

故得

$$C(n) - C(n-m) \geqslant A(m) + B(m-1) =$$
$$A(m) + B(m) \geqslant (\alpha + \beta)m$$

由此证明了引理 2.

从而,正如我们在 3.4 看到的,曼恩定理得到完全的证明.这个定理是标志着堆垒数论诞生的具有决定性意义的基本定理.

阿亭和谢尔克的构造,难道不是一个辉煌灿烂的杰作?其构造的奥妙完美和极端初等高充地糅合,特别使我迷恋.

4 关于表充分大的整数为素数和①

—— 尹文霖②

4.1

Шнирельман 于 1930 年证明了存在一绝对常数 k,充分大的自然数 n 均可表为不超过 k 个素数的和,此常数称为 Шнирельман 常数,其后曾有很多作者

① 1956 年 5 月 11 日收到.第二部分于 6 月 13 日收到.原载《北京大学学报》1956 年第 3 期.
② 本文是在闵嗣鹤教授指导下所作毕业论文的一部分.

致力于明确地定出它的值,1937年Ricce得到了当时的最好结果 $k \leqslant 67$,同年苏联社会主义劳动英雄 Виноградов 院士证明了充分大的奇数可表示成不超过三个素数的和,这样 $k \leqslant 4$,但这里用了最精深的解析数论的工具,即三角和的方法.Shapiro 与 Warga 于 1950 年用纯粹初等方法,即筛法与密率论,证明了 $k \leqslant 20$.本文用渐近密率的概念于全体正偶数的集合,十分容易地证明了定理 1.

定理 1 充分大的偶数可表为不超过 18 个素数的和.

让我们先说明一下本文中所采用的符号,大写拉丁字母表非负整数集,小写拉丁字母表自然数,集合的加法定义为全体偶和,即 $A+B=\{a+b, a\in A, b\in B\}$. A_m 表集合 A 自加 m 次的和集,即 $A_m=\sum_{v=1}^{m} A$. $A(n)$ 表不超过 n 的 A 中正元素的个数. $\delta^*(A)$ 表 A 的渐近密率,即 $\delta^*(A)=\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$. 又用 M 表两奇素数和组成的集合.

先征引若干关于自然数的结果.

引理 1[①]
$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(n)}{n}\geqslant 16$$

引理 2[②] A, B 为非负整数集,$\delta^*(A)+\delta^*(B)\leqslant 1$,且 B 中至少包含 k 个连续整数,则

$$\delta^*(A+B)\geqslant \delta^*(A)+\left(1-\frac{1}{k}\right)\delta^*(B)$$

引理 3 设 $\delta^*(A)=\alpha, \delta^*(B)=\beta$,且 $\alpha+\beta>1$,则必有充分大的自然数 n_0 存在,当 $n>n_0$ 时,$n\in(A+B)$.

证明 由 $\delta^*(A)$ 及 $\delta^*(B)$ 的定义,任给 $\varepsilon>0$,存在 n_0 使得当 $n>b_0$ 时,$\frac{A(n)}{n}>\alpha-\varepsilon, \frac{B(n)}{n}>\beta-\varepsilon$.取 $\varepsilon=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)$ 则有 $A(n)+B(n)>n$,故由一个熟知的结果[③] $n\in(A+B)$.

现在让我们引进偶数的渐近密率.考虑全体偶数,它们组成一个加权与全体整数.令 $\sum=\{2n, n=0,1,2,\cdots\}$,定义偶数集合 A 的渐近密率为 $\delta^*_{\sum}(A)=\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{A(2n)}{\sum(2n)}$,则引理 2,引理 3 于偶数渐近密率对应成立(当然,此时 k 个连续整数应了解为 k 个连续偶数).

兹证明定理 1 如下:

定理 1 的证明 由引理 1

---

① Shapiro, H. N. and J. Warga, Comm, Pure Appl. Math 3, 153-176(1950).
② Ostmann, H. H. J. Reine Angew. Math. 187 549-640(1950).
③ 参看例如 Chintchin, A. J. (Хинрин А. я.), Drei Perlen der Zahlentheorie, 21 Lemma.

$$\delta_{\sum}^{*}(M) = \liminf_{n\to\infty} \frac{M(2n)}{\sum(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{M(2n)}{n} \geq \frac{1}{8}$$

由直接验算知 6,8,…,32 均属于 M.反复用引理 2 有

$$\delta_{\sum}^{*}(M_8) \geq \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{14}\right)\frac{7}{8} = \frac{15}{16}$$

故
$$\delta_{\sum}^{*}(M_8) + \delta_{\sum}^{*}(M) > 1$$

由引理 3 知充分大的偶数均属于 M_9,明所欲证.

4.2

在已完成了充发大的偶数可表为不超过 18 个素数的和的证明之后,进一步注意到如若引用关于渐近基的性质,则可证明如下的定理 2.

定理 2　充分大的素数可表为不超过 17 个素数的和.

本节中所用符号同 4.1.此外令 $\mathbf{N}$ 表全体自然数集,$\mathbf{N}^0$ 表全体非负整数集.$\overline{A}$ 表 A 的补集,$A \sim B$ 表 A 渐近于 B,即 A,B 中充分大的元素完全一致.设当 $0 \in B$,$m \in A$,$m > n_0$(n_0 为固定自然数)时,m 可表为

$$m = b_1 + \cdots + b_h, b_i \in B$$

又设 $l(m)$ 为 h 的最小值,令

$$\lambda^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A(n)} \sum_{\substack{m=n_0+1 \\ n\in A}}^{n} l(m)$$

则称 λ^* 为 B 对 A 的平均渐近阶.当 $A = \mathbf{N}$(或 $A = \mathbf{N}^0$)时亦简称 λ^* 为 B 的平均渐近阶.又用 p,p' 表奇素数.$M = \{p + p'\}$,$P = \{p\}$.

引理 4①　设 $\alpha = \delta^*(A)$,λ^* 为 B 的平均渐近阶,则

$$\delta^*(A + B) \geq \alpha\left(1 + \frac{1-\alpha}{\lambda^*}\right)$$

定理 2 的证明　考虑 $P^0 = \{p - 3\}$.及 $M^0 = P^0 + P^0$.由直接验算知 $2n \in M^0$,$0 \leq n \leq 125$.仿照 4.1 中的证明有

$$\delta_{\sum}^{*}(M_7) = \delta_{\sum}^{*}(M_7^0) \geq \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{1}{125}\right)\frac{6}{8}$$

且 $M_9^0 \sim \sum$.即 P^0 对 $\sum$ 的平均渐近阶 $\lambda^* \leq 18$.

由引理得

$$\delta_{\sum}^{*}(M + P^0) \geq \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1 - \frac{1}{8}}{18}\right)$$

故

---

① Kasch, F. Math. Zeit. 64:3, 243-257(1956).

$$\delta \overset{*}{\sum}(M_7) + \delta \overset{*}{\sum}(M + P^0) \geqslant 1 + \frac{7}{8 \cdot 8 \cdot 18} - \frac{6}{8 \cdot 125} > 1$$

由此 $$M_8 + P^0 \sim \sum$$

故 $$M_8 + P \sim \overline{\sum}$$

至此已证充分大的奇数可表为不超过 17 个素数的和.

值得指出,用关于渐近基方面较弱的(如 Erdös[①]所得的)结果代替4.2中引理,类似可得 $M_8 + P \sim \overline{\sum}$.

① Erdös, P. Trav. Ints. Math Tbilissi 3, 217-224(1938).

从埃拉托塞尼到丁夏畦

第五章

1 谈谈“筛法”①

——王元

在这篇短文里,我们向读者介绍一个在数论中常用的方法,即所谓“筛法”.为了避免引用较高深的数学工具,我们除了谈谈最古典的埃拉托塞尼筛法及其些微应用外,只略为涉及一点这一方法在近代的发展.其实在这里所写的一些结果,有关的数论书籍中都有记载,作者只是加以整理与归纳,以便于读者更易于了解这一方法及提供一点作者认为较有趣的数论知识.

1.1 找出不超过 N 的全部素数

若 $n \leqslant N$,而 n 为非素数,则 $n = n_1 n_2, n_1 \geqslant n_2 > 1$,则得 $n_2 \leqslant \sqrt{n_1 n_2} = \sqrt{n} \leqslant \sqrt{N}$,这就是说 n 必定能被一个小于等于 $\sqrt{N}$ 的素数所整除.这建议我们,如果要找出不超过 N 的所有素数,我们就先找出不超过 $\sqrt{N}$ 的所有素数.命

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_r \leqslant \sqrt{N}$$

为不超过 $\sqrt{N}$ 的所有素数.将不超过 N 的整数依大小排列如下,即

① 原载《数学通报》,1,1958,2-8.

$$2,3,4,\cdots,N$$

先将 p_1 留下，而将 p_1 的其他倍数全部划去；再将 p_2 留下，而将 p_2 的其他倍数划掉；继续行之，待将小于等于$\sqrt{N}$ 的素数的倍数都划掉后，剩下来的就是不超过 N 的全体素数了. 这就是大家所熟知的埃拉托塞尼筛法.

素数表都是根据这一方法略加变化而造出来的. 素数表中最准确者当推莱默氏的从 1 到 10 006 721 的素数表(D.N.Lehmer, List of prime numbers from 1 to 10 006 721, Carn. Inst., Washington, 165(1914)). 有库利克氏者，他曾造出不超过 10^8 的素数表. 他的手稿放在维也纳科学院内.

莱默(Lehmer, Derrick Henry, 1905—)，美国数学家，生于伯克利.

库利克(Kulik, J.F. 1793—1863)，斯拉夫数学家.

命$[x]$表示 x 的整数部分. 例如，$[1.5]=1,[0.1]=0,[-3.2]=-4$ 等. 不超过 N 而又为正整数 d 的倍数的正整数的个数显然等于$\left[\frac{N}{d}\right]$. 以 $\pi(N)$ 表示不超过 N 的素数的个数，则按上述原则可得

$$\pi(N)=r+N-1-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]+$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right]+\cdots\cdots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_r}\right] \quad ①$$

式①的证明如下：首先不超过$\sqrt{N}$ 的素数个数为 r. 其次当计算大于$\sqrt{N}$ 而又不超过 N 的素数个数时，划去所有 $p_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 的倍数，共计划去$\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]$个数. 但若一个数同时是 p_i 与 $p_j(i\neq j)$ 的倍数时，则计算了二遍，所以，我们又必须添上，因此需加上$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]$个数. 又若一数是 $p_ip_jp_k(i<j<k)$ 的倍数时，则被划去了$\binom{3}{1}=3$ 次，而被添上了$\binom{3}{2}=3$ 次. 故又必须再行减去，即减去$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right]$. 依次类推，若 n 恰有 k 个小于等于$\sqrt{N}$ 的素因子，则共减去$\binom{k}{1}+\binom{k}{3}+\cdots$ 次，共加上$\binom{k}{2}+\binom{k}{4}+\cdots$ 次. 而

$$-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{k}{n}=(1-1)^2-1=-1$$

故只被减一次. 式①得证.

将这一原则用抽象的术语写出就得到逐步淘汰原则：设有 N 件事物，其中 N_α 件有性质 α，N_β 件有性质 β，…，$N_{\alpha\beta}$ 件兼有性质 α 及 β，…，$N_{\alpha\beta\gamma}$ 件兼有性质 α，β 及 γ，依次类推，则此事物中之既无性质 α，又无性质 $\beta\cdots$ 者之件数为

$$N-N_\alpha-N_\beta-\cdots+N_{\alpha\beta}+\cdots-N_{\alpha\beta\gamma}-\cdots$$

以下我们再举一例来说明这一原则的应用.

以 $\varphi(n)$ 表示不超过 n 而与 n 互素的正整数个数. $\varphi(n)$ 即通常所谓的欧拉函数. 例如 $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2$ 等. 一般言之, 我们有

$$\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(此处 $\prod_{p \mid n}$ 表示通过 n 的不同的素因子的乘积)

命 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式. 在逐步淘汰原则中命性质 α 为被 p_1 整除, 性质 β 为被 p_2 整除, 依次类推, 则与 n 互素的数既无性质 α, 又无性质 $\beta, \cdots$. 故由逐步淘汰原则得

$$\varphi(n) = n - \sum_{\substack{p_i \mid n \\ 1 \leq i \leq s}} \frac{n}{p_i} + \sum_{\substack{p_i p_j \mid n \\ 1 \leq i < j \leq s}} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots +$$

$$(-1)^s \frac{n}{p_i \cdots p_s} = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

1.2 素数之出现概率为零

我们都知道素数的个数有无穷多, 但不超过 N 的素数个数 $\pi(N)$ 与 N 的比 $\pi(N)/N$ 的分布情形又如何呢? 如果 $\lim_{N \to \infty} \frac{\pi(N)}{N}$ 存在, 我们就称 $\lim_{N \to \infty} \frac{\pi(N)}{N}$ 为素数的出现概率. 运用上节的原则, 我们将证明

定理 1 素数的出现概率为零, 即

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\pi(N)}{N} = 0$$

由定理 1 立刻推知复合数的出现概率是 1. 用数论的术语来说就是"几乎所有"的数皆非素数, 也就是说"几乎所有"的数都是复合数.

在证明定理 1 之前先证次之两引理.

引理 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证明 $$\sum_{n=1}^{2^t} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{t-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^t}\right) >$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^t} + \cdots + \frac{1}{2^t}\right) = 1 + \frac{t}{2} \to \infty (\text{当 } t \to \infty \text{ 时})$$

引理 2 乘积 $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$, 此处之 p 通过所有的素数.

证明　如果引理不成立,由于 $1-\frac{1}{p}>0$,则必 $\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)=a>0$.故

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=\frac{1}{a}$$

命 $N=2^t$,此处 $t=2\left(\left[\frac{1}{a}\right]+1\right)$,则由上面引理的证明可知

$$\frac{1}{a}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}>\prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=$$

$$\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{p^{\alpha}}\right)>\prod_{p\leqslant N}\left(\sum_{\alpha=0}^{N}\frac{1}{p^{\alpha}}\right)>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>1+\frac{t}{2}=$$

$$\left[\frac{1}{a}\right]+2>\frac{1}{a}+1$$

即 $\frac{1}{a}+1<\frac{1}{a}$.此为矛盾,故得引理.

定理1的证明　与证明式①一样,可知不超过 N 的正整数中不被前 r 个素数整除的整数个数 $\pi(N;r)$ 为

$$\pi(N;r)=N-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]-\cdots+$$

$$(-1)^r\left[\frac{N}{p_1\cdots p_r}\right] \quad ②$$

由于大于 p_r 而又不超过 N 的素数不能被前 r 个素数整除,故得

$$\pi(N)\leqslant r+\pi(N;r) \quad ③$$

由于 $[x]=x-\theta,0\leqslant\theta<1$,故由②,③得

$$\pi(N)<r+N\left(1-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\frac{1}{p_ip_j}-\cdots+(-1)^r\frac{1}{p_1\cdots p_r}\right)+$$

$$\left(1+\sum_{i=1}^{r}1+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}1+\cdots\right)=$$

$$N\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+2^r+r<N\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+2^{r+1}$$

取 $r+1=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]$,则得

$$0<\frac{\pi(N)}{N}<\prod_{i=1}^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\frac{2^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]}}{N}=$$

$$\prod_{i=1}^{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\log N}{\log 2}\right]-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\frac{1}{\sqrt{N}}$$

当 $N\to\infty$ 时,由引理2即得出 $\lim_{N\to\infty}\frac{\pi(N)}{N}=0$.

定理1证毕.

1.3 “孪生素数”的倒数级数收敛

当 p 与 $p+2$ 同时为素数时，我们就称 $(p,p+2)$ 为一对“孪生素数”. 素数论中有这样一个引人入胜而迄今未解决的猜测：孪生素数对有无穷多.

欧拉曾证明过 $\sum\limits_{p}\dfrac{1}{p}$ 发散，此处 p 经过所有的素数，从而提供了“素数有无限多”的另一证明. 因此使人联想起是否有方法能判定级数 $\sum\limits_{p^*}\dfrac{1}{p^*}$ 之收敛与否呢?此处之 p^* 通过所有的孪生素数. 倘仍发散，则猜想就成立了. 否则仍不能判定孪生素数有限，或无限. 盖若孪生素数有限，则此级数一定收敛；若无限，亦可能收敛. 布朗由于他对埃拉托塞尼筛法的概念进行了极重要的修改，从而证明了：

定理 2 级数 $\sum\limits_{p^*}\dfrac{1}{P^*}$ 收敛. 此处 P^* 经过所有孪生素数.

在证明前先证以下诸引理.

引理 3(布朗) 命 n 为无平方因子之一数，m 为正整数；又命 $\Omega(d)$ 为 d 的互异的素因子的个数，则

$$\sum_{\substack{d\mid n\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}(-1)^{\Omega(d)}\begin{cases}=1, n=1\\ \geqslant 0, n>1\end{cases}$$

证明 当 $n=1$ 时，引理显然成立.

当 $n>1$ 时，只要证明适合 $d\mid n$ 及 $\Omega(d)\leqslant 2m$ 的 d 之中，$\Omega(d)$ 为偶数者不少于 $\Omega(d)$ 为奇数者. 若 p_0 为 n 的最小素因子，对于 n 的每一个因子 d，我们按下面的方法造出 n 的另一个因子 d'，即

$$d'=\begin{cases}dp_0, p_0\nmid d\\ \dfrac{d}{p_0}, p_0\mid d\end{cases}$$

显然每一个 d 唯一对应一个 d'.

若 $d\mid n, \Omega(d)\leqslant 2m$ 而 $2\nmid\Omega(d)$，则 $\Omega(d)\leqslant 2m-1$. 故其对应之 d' 有性质 $d'\mid n, 2\mid\Omega(d')$ 及 $\Omega(d')\leqslant 2m$. 引理得证.

为记载之简便计，我们引入同余式.

若 m 为正整数，a 与 b 为整数，又若 $m\mid(a-b)$，则称 a 与 b 对模 m 同余. 记之以 $a\equiv b \pmod m$.

引理 4(孙子定理) 若 d_1 与 d_2 互素，则联立同余式

$$\begin{cases}n\equiv a \pmod{d_1}\\ n\equiv b \pmod{d_2}\end{cases}$$

在区间 $1 \leqslant n \leqslant d_1d_2$ 内有唯一的解.

证明 因为 d_1 与 d_2 互素,所以由辗转相除法可知有两个整数 m_1 及 m_2 使

$$m_1d_1 - m_2d_2 = 1$$

即得

$$(a-b)(m_1d_1 - m_2d_2) = (a-b)$$

显然

$$n_0 - (a-b)(m_2d_2) + b = -(a-b)(m_1d_1) + a$$

即为联立同余式的公解.而 $n_0 + md_1d_2(m = 0, \pm 1, \cdots)$ 都是公解,所以 m_0 存在,使 $1 \leqslant n_0 + m_0d_1d_2 \leqslant d_1d_2$.

设有 n_0 及 n'_0 均满足联立同余式,且 $1 \leqslant n_0, n'_0 \leqslant d_1d_2$,而 $n_0 \neq n'_0$,则由于

$$n_0 \equiv n'_0 \equiv a(\bmod d_1)$$

故 $d_1 \mid (n_0 - n'_0)$.同样 $d_2 \mid (n_0 - n'_0)$ 因为 d_1 与 d_2 互素,故 $d_1d_2 \mid (n_0 - n'_0)$,此不可能,除非 $n_0 = n'_0$.故得引理.

引理 5 命 $d = q_1 \cdots q_s$,此处 $q_1 < \cdots < q_s$ 均为素数,则

$$n(n+2) \equiv 0(\bmod d), A < n \leqslant A + d$$

之解数为

$$\begin{cases} 2^s, & q_1 > 2 \\ 2^{s-1}, & q_1 = 2 \end{cases}$$

证明 不失一般性,我们可以假定 $A = 0$,此乃由于若 $n = a$ 为同余式之解,则 $a + md(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 均为其解.

(1) $n(n+2) \equiv 0(\bmod 2)(0 < n \leqslant 2)$ 只有一解 $n = 2$.

(2) 命 p 为大于 2 的素数,则同余式 $n(n+2) \equiv 0(\bmod p)(0 < n \leqslant p)$ 只有两个解,即 $n = p - 2$ 与 $n = p$.

(3) 若 d_1 与 d_2 互素,则同余式

$$n(n+2) \equiv 0(\bmod d_1d_2), 0 < n \leqslant d_1d_2 \tag{④}$$

的解数为同余式

$$n(n+2) \equiv 0(\bmod d_1), 0 < n \leqslant d_1 \tag{⑤}$$

的解数及同余式

$$n(n+2) \equiv 0(\bmod d_2), 0 < n \leqslant nd_2 \tag{⑥}$$

的解数之积.

此事实证明如下:命 $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ 为式 ⑤ 之解,$b_1 < b_2 < \cdots < b_s$ 为式 ⑥ 的解.由引理 4 可知每一对 a_i 与 b_j 唯一对应 ④ 之一个解,反之,式 ④ 之一解 $n = c$ 必为 ②,③ 之解.

综合(1),(2),(3) 即得引理.

引理 6 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛.

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n^{3/2}}<1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n^2}<$$

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\frac{1}{n(n-1)}=$$

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{1}{2^m-1}-\frac{1}{2^{m+1}-1}\right)<$$

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{m+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^{m-1}}=$$

$$1+2\sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^m}=\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

引理 7 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{3/2}n}$ 收敛.

证明 由于

$$\frac{1}{2\log^{3/2}2}+\frac{1}{3\log^{3/2}3}<\frac{2}{2\log^{3/2}2}=\frac{1}{\log^{3/2}2}$$

$$\frac{1}{4\log^{3/2}4}+\cdots+\frac{1}{7\log^{3/2}7}<\frac{4}{4\log^{3/2}4}=\frac{1}{2^{3/2}\log^{3/2}2}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{2^r\log^{3/2}2^r}+\cdots+\frac{1}{(2^{r+1}-1)\log^{3/2}(2^{r+1}-1)}<\frac{2^r}{2^r\log^{3/2}2^r}=\frac{1}{r^{3/2}\log^{3/2}2}$$

故由引理 6 得出

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^{3/2}n}=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=2^r}^{2^{r+1}-1}\frac{1}{m\log^{3/2}m}<\frac{1}{\log^{3/2}2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{3/2}}\leqslant\frac{1}{\log^{3/2}2}\cdot\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

引理 8 存在绝对常数 $c(c>3)$,使当 $x\geqslant 3$ 时

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}<c\log\log x$$

$$\prod_{2<p\leqslant x}\left(1-\frac{2}{p}\right)<\frac{c}{\log^2 x}$$

此处 p 表示素数.

本引理的证明需涉及比较多一点的内容,故略去,读者请看华罗庚著《数论导引》第五章,第九节.

引理 9 命 $y>90$,p_i 为第 i 个素数,p_r 为不超过 y 最大的素数,$p=p_1\cdots p_r$,

又命 $m=[(4c\log\log y)^2]+1$（c 为引理 8 中之常数），则

$$\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}} 2^{\Omega(d)} \leqslant (2y)^2(4^{c\log\log y})^2+3$$

$$\left|\sum_{\substack{d\mid p\\ 2m<\Omega(d)\leqslant r}} \frac{(-1)^{\Omega(d)}2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d}\right| < \frac{1}{\log^3 y}$$

证明 $$\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)\leqslant 2m}} 2^{\Omega(d)} \leqslant \sum_{s=0}^{2m}\binom{r}{s}2^s \leqslant \sum_{s=0}^{2m}(2r)^s = \frac{(2r)^{2m+1}-1}{2r-1} <$$

$$(2r)^{2m+1} < (2y)^{2(4c\log\log y)^2+3}$$

当 $n>90$ 时

$$n! = e^{\sum_{m=1}^{n}\log m} \geqslant e^{\sum_{\frac{n}{3}\leqslant m\leqslant n}\log m} \geqslant e^{\frac{2}{3}n\log\frac{n}{3}} > e^{\frac{n}{2}\log n} = n^{\frac{n}{2}}$$

故由引理 8(注意 $2m+1>90$) 得

$$\left|\sum_{\substack{d\mid p\\ 2m<\Omega(d)\leqslant r}} \frac{(-1)^{\Omega(d)}2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d}\right| \leqslant \sum_{s=2m+1}^{r}\sum_{\substack{d\mid p\\ \Omega(d)=s}}\frac{2^{\Omega(d)}}{d} \leqslant \sum_{s=2m+1}^{r}\frac{\left(\frac{2}{p_1}+\cdots+\frac{2}{p_r}\right)^s}{s!} \leqslant$$

$$\sum_{s=2m+1}^{r}\left(\frac{2c\log\log y}{\sqrt{s}}\right)^s \leqslant \sum_{s=2m+1}^{r}\left(\frac{2c\log\log y}{\sqrt{2m}}\right)^s <$$

$$\sum_{s=2m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{1}{2^{2m}} < \frac{1}{2^{2(4c\log\log y)^2}} < \frac{1}{\log^3 y}$$

引理 10 以 $Z(N)$ 表示不超过 N 的孪生素数对数，则存在绝对常数 C_0 及 N_0，当 $N>N_0$ 时

$$Z(N) < \frac{C_0N}{\log^{3/2}N}$$

证明 如引理 9 之各假定，则得

$$Z(N) \leqslant Z(p_r) + \sum_{\substack{p_r<n\leqslant N\\ (n(n+2),p)=1}} 1 = Z(y) + \sum \tag{⑦}$$

式⑦之证明甚易，盖当 $n>p_r$，而 n 与 $n+2$ 为一对孪生素数，则必 $(n(n+2),p)=1$.

当 $d\mid P$ 时，由引理 5 得出

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n(n+2)\equiv 0(\bmod d)}} 1 = 2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}\left[\frac{N}{d}\right] + \theta 2^{\Omega(d)} =$$

$$2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}\frac{N}{d} + \bar{\theta}2^{\Omega(d)}, 0\leqslant\theta\leqslant 1, |\bar{\theta}|\leqslant 1$$

故由引理 3，引理 8，引理 9 得

$$\sum \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant N(n(n+2),p)=1} 1 \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant N}\sum_{\substack{d\mid(n(n+2),p)\\ \Omega(d)\leqslant 2m}}(-1)^{\Omega(d)} =$$

$$\sum_{\substack{d|p \\ \Omega(d)\leqslant 2m}} (-1)^{\Omega(d)} \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ n(n+2)\equiv 0(\bmod d)}} 1 \leqslant$$

$$N \sum_{\substack{d|p \\ \Omega(d)\leqslant 2m}} \frac{(-1)^{\Omega(d)} 2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d} + \sum_{\substack{d|p \\ \Omega(d)\leqslant 2m}} 2^{\Omega(d)} =$$

$$N \sum_{d|p} \frac{(-1)^{\Omega(d)} 2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d} -$$

$$N \sum_{\substack{d|p \\ 2m<\Omega(d)\leqslant r}} \frac{(-1)^{\Omega(d)} 2^{\Omega(d)-\Omega((d,2))}}{d} +$$

$$\sum_{\substack{d|p \\ \Omega(d)\leqslant 2m}} 2^{\Omega(d)} < \frac{N}{2} \prod_{0<p\leqslant y} \left(1 - \frac{2}{p}\right) +$$

$$\frac{N}{\log^3 y} + (2y)^{2(4c\log\log y)^2+3} \leqslant$$

$$\frac{cN}{2\log^2 y} + \frac{N}{\log^3 y} + (2y)^{2(4c\log\log y)^2+3}$$

取 $y = e^{(\log N)^{3/4}}$，由式④可知存在 N_0，当 $N > N_0$ 时

$$Z(N) < y + \frac{cN}{2\log^2 y} + \frac{N}{\log^3 y} + (2y)^{2(4c\log\log y)^2+3} < \frac{c_0 N}{\log^{3/2} N}$$

其实此处之 N_0, c_0 皆可以具体算出：即求 N_0，当 $N > N_0$ 时，$y < \frac{N}{\log^{3/2} N}$ 及 $(2y)^{2(4c\log\log y)^2+3} < \frac{N}{\log^{3/2} N}$，此处 $y = e^{(\log N)^{3/4}}$，而 $c_0 = \frac{c}{2} + 3$.

定理 2 的证明　命 p_r^* 表示第 r 个孪生素数，当 $p_r^* > N_0$ 时，由引理 10 得

$$r = Z(p_r^*) < \frac{c_0 p_r^*}{\log^{3/2} p_r^*} < c_0 \frac{p_r^*}{\log^{3/2} r}$$

即

$$p_r^* > \frac{1}{c_0} r \log^{3/2} r$$

因此由引理 7 得知

$$\sum_{p^*} \frac{1}{p^*} = \sum_{p^*\leqslant N_0} \frac{1}{p^*} + \sum_{p^*>N_0} \frac{1}{p^*} < N_0 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{c_0} r \log^{3/2} r} <$$

$$N_0 + \frac{c_0}{\log^{3/2} 2} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

1.4　结束语

筛法的起源很早，在公元前三百年，埃拉托塞尼就提出了这一想法. 但其重

要及蓬勃的发展,还是近四十年的事.首先是布朗,他将埃拉托塞尼筛法的观念加以重要的修正,从而使得与素数有关的若干经典而著名的困难问题,在弱调的提法上,即将原来命题中的素数换为殆素数,得到了解决.所谓殆素数者,即素因子个数,包括相同的与相异的,不超过某一确定限的整数.一般说来这一限是可以具体算出来的.就以刚才所说的关于孪生素数的猜想来说,目前我们已能证明:

满足下面条件的正整数对$(n, n+2)$有无穷多.

(1)$n(n+2)$为不超过5个素数的乘积.

(2)n与$n+2$的素因子个数均不多于3.(布朗原来的结果为:存在无限多个正整数n,而n与$n+2$的素因子个数各不超过9)

布朗的方法引起了不少数学家的兴趣,他们或改进了这一方法,或将这一方法用到其他新问题上去,实际上,有的已逾越了数论的范畴,在此不详谈了.

1947年,塞尔伯格提出了埃拉托塞尼筛法新的改良,一般说来,由此可以获得比布朗方法更精密的结果.原苏联数学家林尼克在1941年发表的"大筛法",则是从另一角度来改进埃拉托塞尼筛法,亦有不少卓越而有趣的运用.在此都不介绍了.

关于筛法进一步的知识,我们建议有兴趣的读者去看华罗庚著的《数论导引》第九章与第十九章,以及中国科学院数学研究所数论组所撰写的关于哥德巴赫问题的资料(即将在数学进展上登载).最后,我殷切地期待着读者们的建议与批评.

2 埃拉托塞尼氏筛法与哥德巴赫定理①

——布朗

布朗(Brun, Viggo, 1885—1978),挪威数学家.学于奥斯陆、格丁根、巴黎,获博士学位.

2.1

熟知哥德巴赫定理是说每个偶数可以分成两个素数之和,在1742年的一封信中,欧拉写道:"尽管我不能证明它,但我相信这是一条完全对的定理."这条定理至今未被证明,下面的定理也是一样的:孪生素数列有无穷多,1912年在剑桥召开的国际数学会议上,朗道在其演讲中认为这些问题是"近代科学中不可解决的问题".

无论如何,今天处理这些问题已经有了起始点,即可以用一个类似于埃拉

① 这是说一对素数,其相差为2.见史泰克尔的文章(Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie Abt.A,Jahrg:1916.10,Abh.).

托塞尼氏筛法来处理哥德巴赫问题及孪生素数问题.第一个注意到这件事的是麦尔林①.

这个方法包含一个两重运用埃拉托塞尼氏筛法,例如给出偶数 26 的分析,我们写出下列两个数列:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

不超过$\sqrt{26}$的素数为 2,3 与 5.在我们的二数列中,我们去掉形如 2^λ,3^λ 与 5^λ 的数,第一行中一个数与第二行中对应的数之和为 26.如果这两个数均未被划掉,即它们都是素数,这就得到 26 的一个哥德巴赫分拆,我们仅可选取 26 与 0 作为我们划数的起始点,用这个方法我们就得到将偶数 x 分拆为两个介于$\sqrt{x}$ 与 $x-\sqrt{x}$ 的素数之和的全部分拆,选择 0 与 2 作为我们划数的起始点,则我们可以决定孪生素数,我们不知道用这个方法是否能导致这些定理的证明,但我们可以看到这个方法可以得出非常深刻的结果.

2.2

我们首先研究埃拉托塞尼氏方法,将这个方法用下面的形式给出.

假定给出数列:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots & x \\ \hline 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & \cdots & \\ 0 & & & 3 & & & 6 & & & 9 & & \cdots & \\ & \cdots & & & & & & & & & & & \\ 0 & & p_n & & 2p_n & & 3p_n\cdots\lambda p_n & & & & & & \end{array}$$

此处 x 为整数及 p_n 为满足

$$p_n \leqslant \sqrt{x} < p_{n+1}$$

的第 n 个素数,而 λ 为满足

$$\lambda p_n \leqslant x < (\lambda+1)p_n$$

的整数.

第一个数列的项,不同于其他所有数列的项者,为 1 及介于$\sqrt{x}$ 与 x 间的所有素数.

这些项就是未被埃拉托塞尼氏筛法划去的数,一般言之,研究下面的算术数列

$$\frac{\triangle \quad \triangle+D \quad \triangle+2D\cdots}{a_1 \quad a_1+p_1 \quad a_1+2p_1\cdots}$$

① Bulletin des Sciences mathematiques T.39,I partie,1915. See also Viggo Brun in "Archiv for Mathematik og Naturvidenskab" 1915,B.34,nr.8:Uberdas Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare.

$$\cdots$$

$$a_r \quad a_r+p_r \quad a_r+2p_r\cdots$$

这个数列由 0 延至 x, D 表示与诸素数 $p_1,\cdots,p_r$(相继或不相继)互素的一个整数.

$\triangle$ 与 $a_1,\cdots,a_n$ 为满足下面的整数

$$0<\triangle\leqslant D, 0<a_i<p_i$$

我们提出下面的问题:第一行中不同于其他所有行的元素的个数有多少?

我们将这个数记为

$$N(\triangle,D,x,a_1,p_1,\cdots,a_r,p_r)$$

或简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)$$

我们得到基本公式

$$N(\triangle,D,x,a_1,p_1,\cdots,a_r,p_r)=N(\triangle,D,x,a_1,p_1,\cdots,a_{r-1},p_{r-1})-N(\triangle',Dp_r,x,a_1,p_1,\cdots,a_{r-1},p_{r-1})$$

此处

$$0<\triangle'\leqslant Dp_r$$

或简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)=N(D,x,p_1,\cdots,p_{r-1})-N(Dp_r,x,p_1,\cdots,p_{r-1}) \quad ①$$

这只要首先考虑我们的数列划去直到数列 $a_{r-1}+\lambda p_{r-1}$ 中的相同数,再加上 $a_r+\lambda p_r$ 中对应的数. 假定 $N(\triangle,D,x,a_1,p_1,\cdots,a_{r-1},p_{r-1},)$ 已知,则 $N(\triangle,D,x,a_1,p_1,\cdots,a_r,p_r)$ 等于 $N(\triangle,D,x,a_1,p_1,\cdots,a_{r-1},p_{r-1})$ 减去最后数列中的数,它属于第一个数列而不属于中间数列的个数.

我们注意到这个数等于 $N(\triangle',Dp_r,x,a_1,p_1,\cdots,p_{r-1})$. 这是由于最后数列 $a_r+\lambda p_r$ 与另一个数列 $\triangle+\mu D$ 恒同的数为 0 与 x 间下面算术级数的所有数

$$\triangle',\triangle'+Dp_r,\triangle'+2Dp_r,\cdots$$

此处

$$0<\triangle'\leqslant Dp_r$$

其中 $\triangle'$ 表示这个数列中的最小正数.

因 p_r 与 D 是互素,所以不定方程

$$a_n+\lambda p_r=\triangle+\mu D$$

或

$$p_r\lambda-D\mu=\triangle-a_r$$

恒有解,这些"解" 可以写成

$$\lambda = \lambda_0 + tD, \mu = \mu_0 + tp_r$$

其中 λ_0, μ_0 为一组解，而才过 0 ± 1，± 2⋯.

第二个数列恒等于第一个数列者为

$$a_r + \lambda p_r = a_r + \lambda_r p_r + tDp, t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

这些数为具有公差 Dp_r 的算术数列.

我们定义 $N(\triangle, D, x)$，与简记为 $N(D, x)$ 为数列

$$\triangle, \triangle + D, \triangle + 2D, \cdots, \triangle + \lambda D$$

中介于 0 与 x 间的所有项，此处

$$0 < \triangle \leqslant D, \triangle + \lambda D \leqslant x < \triangle + (\lambda + 1)D$$

因此我们得

$$\lambda + 1 = N(D, x) = \frac{x}{D} + \theta, -1 < \theta < 1$$

例 1　选取

$$\triangle = 2 \quad D = 7 \quad x = 60 \quad a_1 = 2 \quad p_1 = 2 \quad a_2 = 1$$
$$p_2 = 3 \quad a_3 = 4 \quad p_3 = 5$$

(A)2　9　16　23　30　37　44　51　58

(B) 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30
32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60

(C) 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49 52 55 58

(D)4 9 14 19 24 29 34 39 44 49 54 59

(A) 中的数不同于(B) 与(C) 中的数者为 9,23,51，再加上数列(D)，(A) 与(D) 中的数恒等者为 9 与 44，具有公差 $7 \cdot 5 = 35$，故得

$$N(7,60,2,3,5) = N(7,60,2,3) = N(7,5,60,2,3)$$

或 $2 = 3 - 1$.

由公式 ① 得

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r) = N(D, x) - N(Dp_1, x) - N(Dp_2, x, p) - \cdots - N(Dp_r, x, p_1, \cdots, p_{r-1}) \qquad ②$$

及

$$N(D, x, p, \cdots, p_n) = N(D, x) - N(Dp, x) - \cdots - N(Dp_r, x) + N(Dp_2p_1, x) + N(Dp_3p_1, x) + N(Dp_3p_2, x, p_1) + \cdots + N(Dp_rp_1, x) + N(Dp_rp_2, x, p_1) + \cdots + N(Dp_rp_{r-1}, x, p_1, \cdots, p_{r-2}) \qquad ③$$

我们可以将最后一个公式写成

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)=N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(DP_a,x)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b\leqslant a}N(DP_aP_bx,P_1\cdots P_{a-1})\qquad ③'$$

当我们的问题需要确定 $N(D,xp_1\cdots rr)$ 的下界时,我们可以在公式③中去掉任意多个正项,我们有几种方法来选取这些项①.例如,去掉某一重线右端诸项,一般言之可得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)+\sum\sum_{\omega 1}N(Dp_bp_r,x,p_1,\cdots,p_{b-1})\qquad ④$$

此处我们对于 p_qp_b 选的一个范围 ω,它属于下面范围之中

$$\begin{matrix} p_2p_1 \\ p_3p_1\quad p_3p_2 \\ \cdots \\ p_rp_1\quad p_rp_2\quad \cdots\quad p_rp_{r-1}\end{matrix}$$

两次运用公式④,我们得新公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)+\sum\sum_{\omega_1}\Big(N(Dp_ap_b,x)-\sum_{c<b}N(Dp_ap_bp_c,x)\Big)+\sum\sum_{\omega'_1}\sum\sum_{\omega_2}N(Dp_ap_bp_cp_d,x,p_1,\cdots,p_{d-1})$$

此处 $\omega'_1\leqslant\omega_1$ 及 ω_2 表示 p_cp_d 的范围.

继续这一手续并用

$$N(d,x)=\frac{x}{d}+\theta,\ -1<\theta<1$$

则最后得

$$\frac{D}{x}N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_a}+\sum_{\omega}\sum_{\omega_1}\frac{1}{p_ar_b}\Big(1-\sum_{c<b}\frac{1}{p_c}\Big)+\sum\sum_{\omega_1'}\sum\sum_{\omega_2}\frac{1}{p_ap_bp_cp_d}\Big(1-\sum_{e<d}\frac{1}{p_e}\Big)+\cdots-\frac{RD}{x}\qquad ⑤$$

此处 R 表示项数及 $\omega'_1\leqslant\omega_1$ 等.

假定 $p_1=2,p_2=3,p_3=5$ 等,则可以将公式⑤写成

$$N(D,x,2,3,5\cdots p_r)>\frac{x}{D}\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{p_r}\Big)+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{7.5}\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\Big)+\cdots+$$

$$\frac{1}{p_r\cdot 2}+\frac{1}{p_r\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{p_r\cdot 5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+$$
$$\frac{1}{p_r\cdot 7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots\right)-R$$

此处我们可以去掉(包括跟随着括号中的项)任何带有正号的项.

R 表示所有项的个数.

如果我们去掉那些项,它乘以$\frac{x}{D}$之后小于所取的项数,则可以得到 N 的较好的下界.

例 2 取 $x=1\ 000$,$D=1$ 及 $p_2=31$,这是不超过$\sqrt{x}$ 的最大素数.则

$$N(1,10^3,2,3,\cdots,31)>10^3\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{31}+\right.$$
$$\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+$$
$$\frac{1}{7.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+\frac{1}{11.2}+\frac{1}{11.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+$$
$$\frac{1}{11.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+\frac{1}{13.2}+$$
$$\frac{1}{13.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{13.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)+$$
$$\frac{1}{17.2}+\frac{1}{17.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{19.2}+\frac{1}{19.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+$$
$$\frac{1}{23.2}+\frac{1}{23.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{29.2}+\frac{1}{29.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{31.2}+$$
$$\left.\frac{1}{31.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)-52$$

因$\frac{1}{17.5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\right)=0.003\ 9$,它乘以 10^3 等于3.9小于4,所以它被去掉了,在项

$$\frac{1}{11.7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)$$

中,因$\frac{10^3}{11\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=0.4$ 小于 2,所以去掉$\frac{1}{5.3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$. 又因 $10^3\cdot 0.003=3$ 小于 6,所以去掉$\frac{1}{11.7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}\right)(=0.003)$.

最后得

$$N(1,10^3,2,3,\cdots,31)>109-52=57$$

我们可以用下法来表示这个结果:当我们在 1 000 个数中去掉 2,3,5,直至

31 的倍数时,至少还剩 57 个数.我们取 0 作为划数的起始点,并注意

$$N(1,10^3,2,3,\cdots,31) = \pi(10^3) - \pi(\sqrt{10^3}) + 1$$

所以在 π 与 1 000 之间的素数个数多于 56.

这里 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数.

这里我们选择范围 ω 使之获得最适当的下界结果,用这个原则,可得如下结果

$$N(1,10^3,2,3,\cdots,31) > 109 - 52 = 57$$

而
$$\pi(10^3) - \pi(\sqrt{10^3}) = 158$$

$$N(1,10^4,2,3,\cdots,97) > 820 - 284 = 536$$

而
$$\pi(10^4) - \pi(\sqrt{10^4}) = 1\ 206$$

$$N(1,10^5,2,3,\cdots,313) > 5\ 733 - 1\ 862 = 3\ 871$$

而
$$\pi(10^5) - \pi\sqrt{10^5} = 9\ 528$$

以下我们将用较简单的方法选取 ω.

为了阐述这些原则,我们首先给出三个例子.

例 3

$$N(1,x,2,3,5,7) > x\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{5.2} + \frac{1}{5.3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{7.2} + \frac{1}{7.3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{7.5}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.2}\right)\right) - 16 = x\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) - 2^4$$

我们不去掉任意项.

例 4

$$N(1,x,2,3,5,7,11) > x\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{5.2} + \frac{1}{5.3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{7.2} + \frac{1}{7.3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{7.5}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{11.2} + \frac{1}{11.3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{11.5}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{11.7}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right) - 26$$

此处去掉的项数是不多的,上式也可以写成

$$N(1,x,2,3,5,7,11) > x\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right) - \left(\frac{1}{7\cdot5\cdot3\cdot2} + \frac{1}{11\cdot5\cdot3\cdot2} + \frac{1}{11\cdot7\cdot3\cdot2} + \right.\right.$$

$$\frac{1}{11\cdot7\cdot5\cdot2}+\frac{1}{11\cdot7\cdot5\cdot3}\Big)+$$

$$\Big(\frac{1}{11\cdot7\cdot5\cdot3\cdot2}\Big)\Big)-\Big(1+5+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\Big)=$$

$$x(0.207\,8-0.012\,1+0.000\,4)-26=0.196\,1x-26$$

在此我们去掉所有形如$\frac{1}{p_ap_bp_cp_d}$与$\frac{1}{p_ap_bp_cp_dp_e}$的项.

例 5

$$N(1,x,2,3,5,7,11,13,17,19)>x\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-$$

$$\frac{1}{7}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}+\frac{1}{5.3}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+$$

$$\frac{1}{7.2}+\frac{1}{7.3}(1-2)+\frac{1}{7.5}\Big(1-\frac{1}{2}-$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\Big)+\frac{1}{11.2}+\frac{1}{11.3}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{11.5}$$

$$\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\Big)+\frac{1}{11.7}\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}\Big)+$$

$$\frac{1}{13.2}+\frac{1}{13.3}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{13.5}\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\Big)+\frac{1}{13.7}$$

$$\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}\Big)+\frac{1}{17.2}+\frac{1}{17.3}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{17.5}$$

$$\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\Big)+\frac{1}{17.7}\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}\Big)+$$

$$\frac{1}{19.2}+\frac{1}{19.3}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{19.5}\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3.2}\Big)+$$

$$\frac{1}{19.7}\Big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.2}\Big)\Big)-72=0.163x-72$$

在此我们去掉垂线右端的所有项.可以看出表达式具有形式

$$1-\sum\frac{1}{p_a}+\sum\sum\frac{1}{p_ap_b}-\sum\sum\sum\frac{1}{p_ap_bp_c}+\sum\sum\sum\sum\frac{1}{p_ap_bp_cp_d}$$

此处 p_a,p_b,p_c 与 p_d 过下面的数值

p_a	2 3 5 7 11 13 17 19
p_d	2 3 5 7
p_c	2 3 5 7
p_b	2

其中,$a>b>c>d$.

2.3

我们首先研究例 2 的方法.

我们不应用一般的公式 ⑤,我们直接由 ③′ 推出

$$N(D,x,p,\cdots,p_r)=N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}N(Dp_ap_b,x,p_1,\cdots,p_{b-1})$$

运用这个公式两次则得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)=N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}N(Dp_ap_b,x)-\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}N(Dp_ap_bp_c,x)+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}\sum_{d<c}N(Dp_ap_bp_cp_d,x,d_1,\cdots,p_{d-1}) \quad ⑥$$

最后一个和为正的(或 0).利用

$$N(d,x)=\frac{x}{d}+\theta,\ -1\leqslant\theta<1$$

则得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\left(1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_a}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_ap_b}-\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}\frac{1}{p_ap_bp_c}\right)-R \quad ⑦$$

或简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}(1-\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2-\sum\nolimits_3)-R \quad ⑦'$$

此处$\sum_1$等于下面三行中第一行诸项之和

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_r}=\sigma$$

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_r}$$

$$\frac{1}{p_1}+\frac{p}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_r}$$

$\sum_2$等于所有第一行的每个元素乘以第二行这个元素左边的各元素之和,而$\sum_3$可以类似地来定义.

以下我们用图 1 来计算

$$1-\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3$$

我们来比较$\sum_2$与σ^2,有

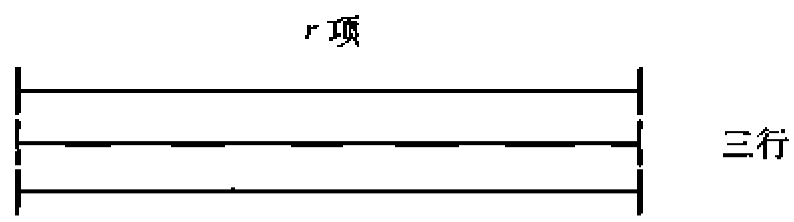


图 1

$$\sigma^2=\left(\frac{1}{p_1}\right)^2+\left(\frac{1}{p_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{p_r}\right)^2+2\sum\nolimits_2>2\sum\nolimits_2 \text{ 或 } \sigma\sum\nolimits_1>2\sum\nolimits_2$$

我们将要证明

$$\sigma\sum\nolimits_2>3\sum\nolimits_3 \text{ 或} \Big(\sum_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}\Big)\Big(\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_ap_b}\Big)>3\Big(\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\sum_{c\leqslant b}\frac{1}{p_ap_bp_c}\Big)$$

任何项$\frac{1}{p_\alpha p_\beta p_\gamma}$，此处 $\gamma<\beta<\alpha\leqslant r$，皆在$\sum_3$中出现一次，而在$\sigma\sum_2$中出现三次.

我们首先在$\sum\limits_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}$中找出$\frac{1}{p_\alpha}$及在$\sum\limits_{a\leqslant r}\sum\limits_{b<a}\frac{1}{p_ap_b}$中找到$\frac{1}{p_\beta p_\gamma}$，然后在$\sum\limits_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}$中找出$\frac{1}{p_\beta}$及在$\sum\limits_{a\leqslant r}\sum\limits_{b<a}\frac{1}{p_ap_b}$中找出$\frac{1}{p_\alpha p_\gamma}$. 最后在$\sum\limits_{c\leqslant r}\frac{1}{p_c}$中找出$\frac{1}{p_\gamma}$及在$\sum\limits_{a\leqslant r}\sum\limits_{b<a}\frac{1}{p_ap_b}$中找到$\frac{1}{p_\alpha p_\beta}$.

项$\frac{1}{p_\alpha p_\beta p_\gamma}$在$\sigma\sum_2$中出现三次，它还包有形如$\frac{1}{p_\alpha^2p_\beta}$的项等，因此得$\sigma\sum_2>3\sum_3$.

用⑥来计算⑥中最后一个和，则我们可以推广⑦. 继续这个步骤，则可得一个类似于⑦的公式，或简单些，类似于⑦′的公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\left(1-\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2-\cdots\sum\nolimits_m\right)-R \qquad ⑧$$

此处 m 为适合 $m\leqslant r$ 的奇数，及此处表达式 $1-\sum+\sum_2-\cdots-\sum_m$ 可以用图 2 来计算，对于特殊情况 $m=r$，我们可以计算表达式

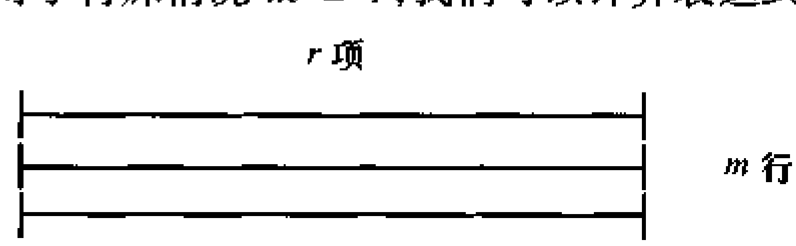


图 2

$$1-\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2-\cdots+(-1)^r\sum\nolimits_r=\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)=$$

$$1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_a}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_ap_b}-\cdots$$

此处 r 是奇或偶，这种情况下，项数为 2^r，故得公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)-2^r \qquad ⑨$$

一般情况，我们将决定表达式

$$1-\sum_1+\sum_2-\cdots-\sum_m$$

的下界.

如前，我们可以证明

$$\sigma=\sum_1, \sigma\sum_i > (i+1)\sum_{i+1}, 1\leqslant i\leqslant m-1$$

因此 $\sigma^m > m!\sum_m$.

因此

$$\sum_m < \frac{\sigma}{m}\sum_{m-1} \qquad ⑩$$

及由史特林公式

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m(\sqrt{2\pi m}+\theta, -1<\theta<1)$$

得

$$\sum_m < \frac{\sigma^m}{m!} < \left(\frac{e\sigma}{m}\right)^m \qquad ⑪$$

现在用不同的方法将公式⑧记为

$$N(D,x,p,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}[(1-\sum_1+\sum_2-\cdots+(-1)^r\sum_r)-$$
$$(\sum_{m+1}-\sum_{m+2}+\cdots+(-1)^r\sum_r)]-R$$

我们知道右端第一个括弧可以表为乘积形式. 当 $m+2>\sigma$ 时，第二个括弧中各次的数值递减，故其绝对值不超过 $\sum_{m+1} < \left(\frac{e\sigma}{m_{+1}}\right)^{m+1}$，所以

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}\left(\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)-\left(\frac{e\sigma}{m_{+1}}\right)^{m+1}\right)-R$$

不难定出 R 的值①

$$R = 1+\binom{r}{1}+\binom{r}{2}+\cdots+\binom{r}{m} < 1+r+r^2+\cdots+r^m < r^{m+1}$$

所以当

$$m+2>\sigma=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_r}$$

时有公式

---

① 例如，见朗道，Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I. p.67.

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}\left(\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)-\left(\frac{e\sigma}{m+1}\right)^{m+1}\right)-r^{m-1} \quad ⑫$$

这个公式比 ⑨ 有用，这是由于 r^{m+1} 的增长比 2^r 缓慢. 但对我们的目的，R 的增长仍嫌太快.

2.4

为此目的，我们将用另法选取 ω，即如例 3(见 2.2) 那样去掉重线右边各项.

首先我们在公式 ③ 中去掉一条垂线右边各项，则得下面公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) > N(D,x)\sum_{-a\leqslant r}N(Dp_a,x) + \sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}N(Dp_ap_b,x,p_1,\cdots,p_{b-1}) \quad ⑬$$

此处 t 为一个小于 r 的整数.

上面公式的最后一项可以用同样方法来计算，故得

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) > N(D,x)-\sum_{a\leqslant r}N(Dp_a,x) + \sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}N(Dp_ap_b,x)-\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}N(Dp_ap_bp_c,x) + \sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}\sum_{\substack{d<c\\ c<u}}N(Dp_ap_bp_cp_d,x,p_1,\cdots,p_{d-1})$$

此处 u 为一个小于 r 的整数.

继续这个步骤，并利用

$$N(d,x)=\frac{x}{d}+\theta,\ -1\leqslant\theta<1$$

则最后得公式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}\left(1-\sum_{a\leqslant r}\frac{1}{p_r}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\frac{1}{p_ap_b}-\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}\frac{1}{p_ap_bp_c}+\sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{b<a\\ b<t}}\sum_{\substack{c<b\\ c<t}}\sum_{\substack{d<c\\ d<u}}\frac{1}{p_ap_bp_cp_d}-\cdots\right)-R \quad ⑭$$

或简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}(1-S_1+S_2-\cdots-S_{2n-1})-R \quad ⑭'$$

其中表达式

$$E_n = 1-S_1+S_2-\cdots-S_{2n-1}$$

用下面的阶梯形来计算.

$$\overbrace{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{\omega-1}}}^{\sigma_n}+\cdots+\overbrace{\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}}^{\sigma_2}$$

$$\overbrace{\frac{1}{p_t}+\cdots+\frac{1}{p_r}}^{\sigma_1}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{\omega-1}}+\cdots+\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}+\cdots+\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}(2n-1)\text{行}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}$$

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}$$

我们在图 3 中下述区间中选取相继的诸素数.



图 3

此处 $\alpha > 1$.

由麦尔顿①公式可得

$$\sum_{2}^{x}\frac{1}{p}=\log\log x+0.261+\cdots+\theta\frac{5}{\log x},\ -1<\theta<1$$

$$\prod_{2}^{x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=e^{\frac{\Theta}{\log x}}\frac{0.561\cdots}{\log x},\ -1<\Theta<1$$

此处 log 表示自然对数.

因此我们得

$$\prod_{x}^{x^{\alpha}}\frac{1}{p}=\log\alpha+\theta\frac{5\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log x}$$

$$\prod_{x}^{x^{\alpha}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{\alpha}e^{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{7\Theta}{\log x}}$$

当 $\alpha_0 > \alpha$ 时,我们可以取 p_1 充分大,使

$$\sigma_1=\frac{1}{p_t}+\cdots+\frac{1}{p_r}<\log\alpha_0,\sigma_2=\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}<\log\alpha_0,\cdots$$

① 见"Journal fur die reine und angewandte Mathemtik" B. 78, 1874,或朗道, Handbuch, 1, 201.

$$\sigma_n = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{w-1}} < \log \alpha_0 \qquad ⑮$$

及

$$\pi_1 = \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) > \frac{1}{\alpha_0}$$

$$\pi_2 = \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_{t-1}}\right) > \frac{1}{\alpha_0}\cdots$$

$$\pi_n = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_{w-1}}\right) > \frac{1}{\alpha_0} \qquad ⑯$$

我们特别假定 $\log \alpha_0 < 1$.

我们要实现和数的逐步计算,为此需给出阶梯形的图形.

假定我们已经用表达式 $\sum_m = 1 - s_1 + s_2 - \cdots - s_{2m-1}$ 给出的图形(图4).

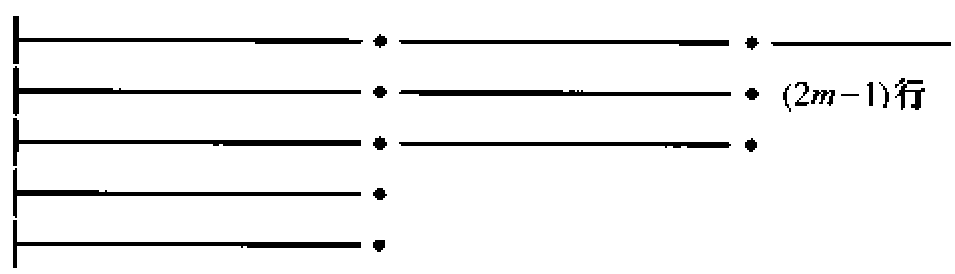


图 4

进行了计算.

我们在图形左边添加 $2m+1$ 行(取它们仅仅为了表达式 $1 - \sum_1 + \sum_2 - \cdots - \sum_{2m+1}$)(图 5) 和 $\sum \frac{1}{p_a}$ 现在等于 $\sum_1 + s_1$,考虑下面三种可能情况,可知 $\sum\sum \frac{1}{p_a p_b}$ 等于 $\sum_2 + s_1\sum_1 + s_2$.

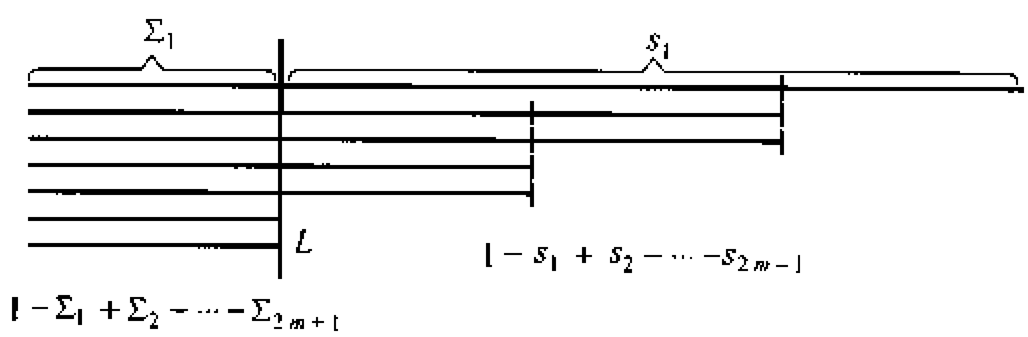


图 5

p_a 取自 L 之左及 p_b 亦取自 L 之左($\sum_2$).

p_a 取自 L 之左及 p_b 取自 L 之右($\sum_1 s_1$).

p_a 取自 L 之右及 p_b 亦取自 L 之右(s_2).

一般言之,我们可以用下法

$$E_{m+1} = 1 - (\sum_1 + s_1) + (\sum_2 + s_1\sum_1 + s_2) - (\sum_3 + s_1\sum_2 + s_2\sum_1 + s_3) + \cdots - (\sum_{2m+1} + s_1\sum_{2m} + \cdots + s_{2m-1}\sum_2)$$

来计算表达式 E_{m+1}.

比较这个表达式与下面的乘积

$$(1 - \sum_1 + \sum_2 - \cdots \pm \sum_v)(1 - s_1 + s_2 - \cdots - s_{2m-1}) = 1 - (\sum_1 + s_1) + (\sum_2 + s_1\sum_1 + s_2) - \cdots - (\sum_{2m+1} + s_1\sum_{2m} + \cdots + s_{2m-1}\sum_2) + (\sum_{2m+2} + s_1\sum_{2m+1} + \cdots + s_{2m-1}\sum_3) - \cdots$$

第一个因子含有尽可能多的项数,即 v 等于 $\sum_1$ 的项数,易见这个乘积包有 E_{m+1} 的所有项,再加一些括弧,因 $\sum_1 = \sigma_{m+1} < \log \alpha_0 < 1$,所以由 ⑩ 可知它 值是递减的.因此

$$E_{m+1} > \pi_{m+1}E_m - (E_{2m+1} + s_1\sum_{2m+1} + \cdots + s_{2m-1}\sum_3) \quad ⑰$$

我们可以决定最后一个括弧的上界,这是一个不同的 $(2m+2)$ 个 $\frac{1}{p}$ 的乘积之和,其中 $\frac{1}{p}$ 来自于 s_1 与 $\sum_1$,组成由图形(图 6)计算的和

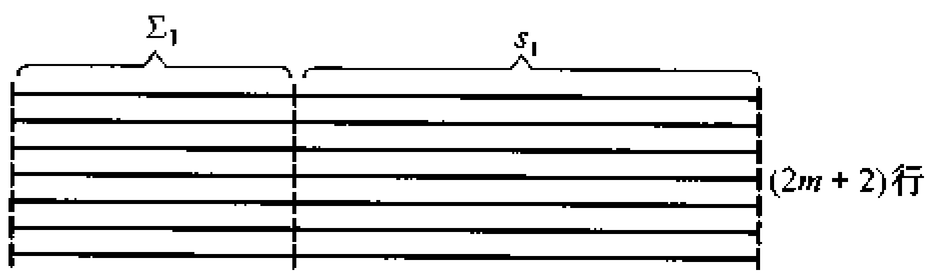


图 6

$$(s_1 + \sum_1)_{2m+2}$$

即得所有上述形式的乘积之和.

由 ⑪ 与 ⑮ 得

$$(s_1 + \sum_1)_{2m+2} < \left(\frac{e(s_1 + \sum_1)}{2m+2}\right)^{2m+2} < \left(\frac{e(m+1)\log \alpha_0}{2(m+1)}\right)^{2m+2} = \left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^{2m+2}$$

我们欲算的括弧(见 ⑰)更小些,故得

$$E_{m+1} > \pi_{m+1}E_m - \left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^{2m+2} \quad ⑱$$

因 $E_1 = 1 - s_1$,所以由 ⑯ 得

$$E_1 > 1 - \log \alpha_0$$

$$E_2 > \pi_2 E_1 - \left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^4 > \pi_2\left(1 - \log \alpha_0 - \alpha_0\left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^4\right)$$

继续这一方法得

$$E_n > \pi_2\pi_3\cdots\pi_n\left(1 - \log \alpha_0 - \alpha_0\left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^4 - \cdots - \alpha_0^{n-1}\left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^{2n}\right.$$

或由于 $\pi_1 > 1$，当 $\alpha_0\left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^2 < 1$ 时有

$$E_n > \pi_1\pi_2\cdots\pi_n\left(1 - \log \alpha_0 - \frac{\alpha_0\left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^4}{1 - \alpha_0\left(\frac{e\log \alpha_0}{2}\right)^2}\right)$$

特别地，选取

$$\alpha = 3/2, \alpha_0 = 1.51$$

我们得

$$E_n > 0.3\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \qquad ⑲$$

我们来研究 E_n 中项数构成的数 (R)，组成乘积

$$\left(1 - \frac{1}{p_1} - \cdots - \frac{1}{p_r}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1} - \cdots - \frac{1}{p_{t-1}}\right)^2\cdots\left(1 - \frac{1}{p_1} - \cdots - \frac{1}{p_{w-1}}\right)^2$$

这个乘积包有 E_n 所有的项还更多，第一个因子的项数小于 p_r，第二个因子的项数小于 $p_r^{1/\alpha}$ 等等. 将 $-\frac{1}{p}$ 换成 1，即得乘积所有的项数，所以

$$R < p_r \cdot p_r^{\frac{2}{\alpha}}\cdots p_r^{\frac{2}{\alpha^n}} < p_r^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} = p_r^5$$

我们可以将 ⑭ 写成形式

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r) < \frac{x}{D}0.3\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) - p_r^5 \qquad ⑳$$

这个公式对于所有相继素数 $p_1, \cdots, p_r$ 都是对的，此处 $p_1 > p_e$，其中 p_e 是一个可以决定的素数.

特别地，假定 $p_1 = p_{e+1}$ 为第 $e+1$ 个素数.

当问题是要计算 $N(D, x, 2, \cdots, p_e, p_1, \cdots, p_r)$ 时，我们在图形（式 ⑭ 下面）上增加由表达式

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_e}\right) = 1 - \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - \cdots \pm \sum\nolimits_e$$

引起的

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_e},$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p_e}$$

它们共 2^e 项,此处行数大于等于 e.

我们如此得到新的图形(图 7) 它用于表达式

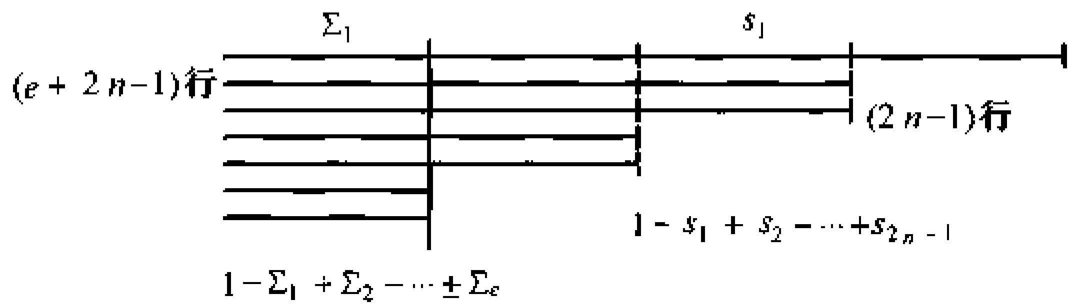


图 7

$$\begin{aligned}E_{n+1} = 1 &- (\sum\nolimits_1 + s_1) + (\sum\nolimits_2 + s_1\sum\nolimits_1 + s_2) - \cdots + \\ &(\sum\nolimits_e + s_1\sum\nolimits_{e-1} + \cdots + s_e) - (s_1\sum\nolimits_e + s_2\sum\nolimits_{e-1} + \cdots + \\ &s_{e+1}) + \cdots + (s_{2n-e}\sum\nolimits_e + \cdots + s_{2n-1}\sum\nolimits_1) + \cdots + (s_{2n-1}\sum\nolimits_e)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}E_{n+1} &= (1 - \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - \cdots + \sum\nolimits_e)(1 - s_1 + s_2 - \cdots + s_{2n-1}) = \\ &\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_e}\right)E_n\end{aligned}$$

此处我们假定 e 为偶数.

由 ⑲ 我们得公式

$$N(D,x,2,3,\cdots,p_r) > \frac{X}{D}0.3\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right) - 2^e p_i^5 \qquad ㉑$$

对于所有 $r(r > e)$ 成立,此处 e 表示一个可以决定的数,请注意 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$的每一项被乘以 E_n 的每一项.

由麦尔顿公式,我们可以决定 c 使对于所有 $r > c$ 皆有

$$N(D,x,2,3,\cdots,p_r) > \frac{0.168x}{D\log p_r} - 2^e p_r^5 \qquad ㉒$$

此处 c 是一个可以决定的数($c \geqslant e$).

如果我们选取 $D = 1$ 及 $p_r = p(\sqrt[6]{x})$,即不超过$\sqrt[6]{x}$ 的最大素数:$p_r \leqslant \sqrt[6]{x} < p_{r+1}$,我们得到

$$N(1,x,2,3,\cdots,p(\sqrt[6]{x})) > \frac{1.008x}{\log x} - 2^e x^{\frac{5}{6}} > \frac{x}{\log x}$$

对于所有 $x > x_0$ 成立.

我们可以叙述下列定理:

当我们在 x 个相邻整数中，去掉 2 的倍数 3 的倍数，直到 $p(\sqrt[6]{x})$ 的倍数，则当 $x > x_0$ 时，剩下的数的个数多于 $\frac{x}{\log x}$.

划数的起始点可以自由选取，而 x_0 是一个可以决定的数.

由 ㉒，我们还可以得到下述定理：

当 $n > n_0$ 时，在 n 与 $n+\sqrt{n}$ 之间恒存在一个数，其素因子个数不超过 11.

在公式 ㉒ 中取

$$D = 1, x = \sqrt{n}, p_r = p(n^{\frac{1}{11}})$$

我们得到，当 $n > n_0$ 时

$$N(1,\sqrt{n},2,3,\cdots,p(n^{\frac{1}{11}})) > \frac{1.8\sqrt{n}}{\log n} - 2^e n^{\frac{5}{11}} > 1$$

当我在区间 $[n, n+\sqrt{n}]$ 中去掉所有 2 的倍数，3 的倍数，直到 $p(n^{\frac{1}{11}})$ 的倍数，则至少还剩下一个数，我们取 n 作为划数的起始点，则在这种情况下，每个因子皆小于 $\sqrt[12]{n+\sqrt{n}}$，所以当 $n > n_0$ 时，小于 $\sqrt[11]{n}$，即未被划去的数不能包有 12 个或更多的素因子，凡被 2,3,…，式 $n(p^{\frac{1}{11}})$ 除得尽的数都被划掉了.

2.5

我们已经假定在公式 ㉑ 中的素数 $2,3,\cdots,p_r$ 为相继素数.

研究相邻素数列

$$q_1, q_2, \cdots, q_{\alpha-1}, q_\alpha q_{\alpha+1}, \cdots, q_{\gamma-1}, q_\gamma, q_{\gamma+1}, \cdots, q_r$$

此处 $q_1 = 2$ 等的一部分；非相邻素数列

$$q_1, q_2, \cdots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \cdots, q_{\gamma-1}, q_{\gamma+1}, \cdots, q_r$$

我们易于推广并如前（见 ㉑）得到

$$N(D, x, q_1, \cdots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \cdots, q_\gamma) >$$
$$\frac{X}{D}\cdot 0.3\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_{\alpha-1}}\right)\left(1-\frac{1}{q_{\alpha+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_\gamma}\right) - 2^e q_\gamma^5$$

或

$$N(D, x, q_1, \cdots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \cdots, q_\gamma) > \frac{X}{D}\cdot 0.3$$
$$\frac{\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(\frac{1}{q_\gamma}\right)}{\left(1-\frac{1}{q_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_\gamma}\right)} - 2^e q_\gamma^5$$

因此得到

$$N(D, x, q_1, \cdots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \cdots, q_\gamma) >$$

$$\frac{0.168x}{D\log q^{\gamma}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{q_{\alpha}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_{\gamma}}\right)}-2^{e}q_{\gamma}^{5}$$

我们研究算术数列

$$\triangle,\triangle+D,\triangle+2D,\cdots$$

从 0 至 x 的一段，其中 $\triangle$ 与 D 互素，假定

$$D=q_{d}^{a}\cdots q_{r}^{c}$$

选取 $q_r=q(\sqrt[6]{x})$，并划去被下列素数除得尽

$$q_1,\cdots,q_{\alpha-1},q_{\alpha+1},\cdots,q_{\gamma-1},q_{\gamma+1},\cdots q_r$$

的所有数.则当 $x>x_0$ 时有

$$N(D,x,q_1,\cdots,q_{\alpha-1},q_{\alpha+1},\cdots,q_{\gamma})>\frac{0.168x}{\varphi(D)\log q_r}-$$

$$2^{e}q_r^{5}>\frac{1.008x}{\varphi(D)\log x}-2^{e}x^{\frac{5}{6}}>\frac{1}{\varphi(D)}\cdot\frac{x}{\log x}$$

未被划去的数不能被

$$q_1,\cdots,q_{\alpha-1},q_{\alpha+1},\cdots,q_{r-1},q_{r+1},\cdots,q_r$$

整除，由于 $\triangle$ 与 D 互素，所以它们亦不能被 $q_{\alpha},\cdots,q_{\gamma}$ 整除.故未被划去的数包有 5 个或更少的素因子.

因此我们推出下面类似的迪利克雷定理：

每一个算术数列，具首项与公差互素，包含无限多个素因子个数不超过 5 的项.

2.6

我们现在来研究麦尔林筛法，我们划去两列数中所有 2 的倍数，3 的倍数，5 的倍数直至 p_r 的倍数，一般言之，我们研究下面的算术数列

$$\begin{array}{cccc}\triangle & \triangle+D & \triangle+2D & \cdots\\ a_1 & a_1+p_1 & a_1+2p_1 & \cdots\\ b_1 & b_1+p_1 & b_1+2p_1 & \cdots\\ a_r & a_r+p_r & a_r+2p_r & \cdots\\ b_r & b_r+p_r & b_r+2p_r & \cdots\end{array}$$

所有的记号都在 2.2 中已经定义，进而言之，我们假定 $a_i\neq b_i$ 及 $p_1\geqslant 3$，记

$$P(\triangle,D,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_r,b_r,p_r)$$

或简记为

$$P(D,x,p_1,\cdots,p_r)$$

这表示第一列的数而又不同于以后诸列的任何数的数的个数，如前一样，我们得到基本公式

$$P(\triangle,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_r,b_r,p_r)=$$
$$P(\triangle,D,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_{r-1},b_{r-1},p_{r-1})-$$
$$P(\triangle',Dp_r,x_1,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_{r-1},b_{r-1},p_{r-1})-$$
$$P(\triangle'',Dp_r,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_{r-1},b_{r-1},p_{r-1})$$

或简记为

$$P(D,x,p_1,\cdots,p_r)=P(D,x,p_1,\cdots,p_{r-1})-2P(Dp_r,x,p_1,\cdots,p_{r-1}) \qquad ㉓$$

在此我们用 $2P(Dp_r,x,p_1,\cdots,p_{r-1})$ 表示形为 $P(\triangle,Dp_r,x,a_1,b_1,p_1,\cdots,a_{r-1},b_{r-1},p_{r-1})$ 的两个表达式之和，请勿混淆或误解.

由 ㉓，我们可得类似于 ⑤ 的一般公式

$$\frac{D}{x}P(D,x,p_1,\cdots,p_r)>1-\sum_{a\leqslant r}\frac{2}{p_a}+\sum\sum_{\omega_1}\frac{2^2}{p_ap_b}\left(1-\sum_{c<b}\frac{2}{p_c}\right)+\sum\sum_{\omega'_1}\sum\sum_{\omega_1}\frac{2^4}{p_ap_bp_cp_d}\left(1-\sum_{c<d}\frac{2}{p_c}\right)+\cdots+\frac{RD}{x} \qquad ㉔$$

此处 $\omega'_1\leqslant\omega_1$ 等.

R 表示公式中形如 $\pm\frac{1}{n}$ 的项数$\left(此处\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}等\right)$. 我们已假定 $p_1\geqslant 3$. 除特别声明外，均如 ⑤ 所示.

特别地假定 $p_1=3,p_2=5,p_3=7$ 等，我们可以给 ㉔ 以如下形式

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r)>\frac{x}{D}\Bigg(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\cdots-\frac{2}{p_r}+\frac{4}{5\cdot3}+\frac{4}{7\cdot3}+\frac{4}{7\cdot5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\cdots+\frac{4}{p_r\cdot3}\cdot\frac{4}{p_r\cdot5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{p_r\cdot7}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{4}{5\cdot3}\right)+\frac{4}{p_r\cdot7}\left(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{4}{5\cdot3}+\frac{4}{7\cdot3}+\frac{4}{7\cdot5}\left(1-\frac{2}{3}\right)\right)+\cdots\Bigg)-R \qquad ㉕$$

此处我们可以去掉带有正号的每一项(括弧包在内).

例如，研究下面算术数列从 0 至 11 776 间的一段

1 3 5 7 9 11 13 15 … 11 769 11 731 11 773 11 775

0 3 6 9 12 15 … 11 769 11 772 11 775

1 4 7 10 13 … 11 770 11 773 11 776

…

0 19…11 761

15 11 757

划数的起始点为 0 与 11 776(见 2.1).

因 $11\ 776 = 2^9 \cdot 23$ 除不尽 3,5,7,…,19,所以由 ㉕ 并注意 $a_i \neq b_i$,我们得

$$P(2,11,776,3,5,\cdots,19) > \frac{11\cdot 776}{2}\Big(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{7}-\frac{2}{11}-\frac{2}{13}-\frac{2}{17}-\frac{2}{19}+\frac{4}{5\cdot 3}+\frac{4}{7\cdot 3}+\frac{4}{7\cdot 5}\Big(1-\frac{2}{3}\Big)+\frac{4}{11\cdot 3}+\frac{4}{11\cdot 5}\Big(1-\frac{2}{3}\Big)+\frac{4}{11\cdot 7}\Big(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{4}{5\cdot 3}\Big)+\frac{4}{13\cdot 3}+\frac{4}{13\cdot 5}\Big(1-\frac{2}{3}\Big)+\frac{4}{13\cdot 7}\Big(1-\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{4}{5\cdot 3}\Big)+\frac{4}{17\cdot 3}+\frac{4}{17\cdot 5}\Big(1-\frac{2}{3}\Big)+\frac{4}{19\cdot 3}+\frac{4}{19\cdot 5}\Big(1-\frac{2}{3}\Big)\Big)-R$$

此处

$$R = 1+14+4+16+52+52+32 = 171$$

所以

$$p(2,11,776,3,5,\cdots,19) > 296-171 = 125$$

第一列中未被去的数(t)的个数多于 125.它们有下述性质:t 与 $11\ 776-t$ 不能被 2,3,5,…,19 整除.由于$\sqrt[3]{11\ 776} < 22.9$,所以他们不能为 3 个或更多的素数的乘积.

因此 11 776 可以表示为两个素因子个数不超过 2 的整数之和,表法多于 125.

无论如何,我们未能用这个方法给出哥德巴赫猜想正确答案的一个例子.

然而,我们能从 ㉔ 得出重要的结果,推导的方法与前面完全相同.

我们只要在每个地方将$\frac{1}{p_i}$ 换成$\frac{2}{p_i}$.

将$\frac{1}{p_i}$ 换成$\frac{2}{p_i}$,我们用 2.4 所示阶梯形图形来计算.运用公式

$$\prod_3^x\Big(1-\frac{2}{p}\Big) = \frac{0.832\ 2}{\log^2 x}\cdot e^{\frac{c\theta}{\log x}}$$

而将 2.4 所考虑的和与乘积换为

$$\sigma_1 = \frac{2}{p_t}+\cdots+\frac{2}{p_r} < 2\log\alpha_0$$

等;与

$$\prod\nolimits_1 = \Big(1-\frac{2}{p_t}\Big)\cdots\Big(1-\frac{2}{p_r}\Big) < \frac{1}{\alpha_0^2}$$

等.

我们现在假定 $2\log\alpha_0 < 1$.

类似于 ⑱,我们得

$$E_{m+1} > \prod_{m+1} E_m - (e\log \alpha_0)^{2m+2}$$

所以

$$E_n > \prod_1 \cdots \prod_n \left(1 - 2\log \alpha_0 - \frac{\alpha_0^2(e\log \alpha_0)^4}{1-\alpha_0^2(e\log \alpha_0)^2}\right)$$

特别地,选配

$$\alpha = \frac{5}{4} = 1.25, \alpha_0 = 1.250\ 1$$

因此

$$E_n > 0.05\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right) \tag{26}$$

我们研究 E_n 中的项数(R).考虑乘积

$$\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{2}{p_r}\right)\left(1-\frac{2}{p_1}-\cdots-\frac{2}{p_{t-1}}\right)^2\cdots\left(1-\frac{2}{p_1}-\cdots-\frac{2}{p_{w-1}}\right)^2$$

这个乘积包有 E_n 所有的项及更多项.第一个因子的项数$(2r+1)$小于 p_r,此处 $p_1>3$,第二个因子的项数小于 $p_r^{1/\alpha}$,等等.故得

$$R < p_r p_r^{\frac{2}{\mu}} \cdots p_r^{\frac{2}{\mu^n}} < p^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} = p_r^9$$

我们得到

$$P(D,x,p_1,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}0.05\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right) - p_r^9 \tag{27}$$

这个公式对于所有相继素数 $p_1,\cdots,p_r$ 皆成立,此处 $p_1 \geqslant p_e$,其中 p_e 是一个可以决定的素数.

我们得到下面与 ㉓ 相类似的公式.对于所有 $r>e$ 皆有

$$P(D,x,3,5,\cdots p_r) > \frac{x}{D}\cdot 0.05\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right) - 3^e p_r^9 \tag{28}$$

因此对于所有 $r > c \geqslant e$ 皆有

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r) > \frac{x}{D}\cdot\frac{0.041}{(\log p_r^2)} - 3^e p_r^9 \tag{29}$$

(特别地取 $p_r = p(x^{\frac{1}{(1)}})$).则对于所有 $x > x_0$ 皆有

$$P(D,x,3,5,\cdots,p(x^{\frac{1}{(1)}})) > \frac{0.41x}{D(\log x)^2} - 3^e x^{\frac{9}{19}} > \frac{0.4x}{D(\log x)^2} \tag{30}$$

假定 $D=1$,则我们可以叙述出下面的定理:

当我们双行 x 项的数列中的 3 的倍数,5 的倍数,直至 $p(x^{\frac{1}{10}})$ 的倍数.当 $x > x_0$ 时,至少还多于 $e^{4x/(\log x)^2}$ 项.

我们已经假定

$$a_i \neq b_i$$

这就是说，没有一个两重划数会变成一个单重划数，当问题为研究数 $x = 2^s p_a^t \cdots p_r^v$ 的哥德巴赫分析，我们可以看出

$$a_\alpha = b_\alpha, \cdots, a_\gamma = b_\gamma$$

当划数被缩小后（比较 2.5），P 的下界自然不会减小。这时 $\frac{2}{p_\alpha}$ 需换成 $\frac{1}{p_\alpha}$ 及 $\frac{2}{p_\gamma}$ 需换成 $\frac{1}{p_\gamma}$，如此则得 P 的新的下界

$$\frac{0.4x}{D(\log x)^2} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{p_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\gamma}\right)}{\left(1-\frac{2}{p_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_\gamma}\right)} > \frac{0.4x}{D(\log x)^2}$$

如同前例一样，选取 $D = 2$，则得下面类似于哥德巴赫定理的结果：

每一个大于 x_0 的偶数 x 皆可分成两个素因子个数皆不超过 9 的整数之和. x_0 是一个可以决定的数而素因子可以是相同的亦可以是相异的.

我们也可以得到下面的定理：

存在无穷多个数对，其差皆为 2，每个数的素因子个数皆不超过 9.

2.7

我们也可以决定使用埃拉托塞尼氏与麦尔林筛法后，剩下未被筛去的元素个数的上界估计.

我们用下面的不等式

$$N(\triangle, D, x, a_1, p_1, \cdots a_r, p_r, \cdots, a_n, p_n) \leqslant N(\triangle, D, x, a_1, p_1, \cdots, a_r, p_r)$$

或简记为

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r, \cdots, p_n) \leqslant N(D, x, p_1, \cdots, p_r) \qquad ㉛$$

此处 $r < n$.

我们亦用公式

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r) = N(D, x) - \sum_{a \leqslant r} N(Dp_a, x) + \sum_{a \leqslant r}\sum_{b < a} N(Dp_a p_{b_1}, p_1, \cdots, p_{b-1}) \qquad ㉛'$$

为了估计第一个和，我们运用㉛及㉛'. 继续这样做，我们得类似于⑭的公式

$$N(D, x, p_1, \cdots, p_r) < \frac{x}{D}\left(1 - \sum_{a \leqslant r}\frac{1}{p_a} + \sum_{b \leqslant r}\sum_{\substack{b < a \\ b < r}}\frac{1}{p_a p_b} - \right.$$

$$\sum_{a\leq r}\sum_{\substack{b<a\\b<r}}\sum_{\substack{c<b\\c<t}}\frac{1}{p_ap_bp_c}+\sum_{a\leq r}\sum_{\substack{b<a\\b<r}}\sum_{\substack{c<b\\c<t}}\sum_{\substack{d<c\\d<t}}\frac{1}{p_ap_bp_cp_d}-\cdots\Bigg)+R \qquad ㉜$$

或者简记为

$$N(D,x,p_1,\cdots p_r)<\frac{x}{D}(1-S_1+S_2-\cdots+S_{2n})+R$$

此处表达式

$$E_n=1-S_1+S_2-\cdots+S_{2n}$$

用图 8 来计算.

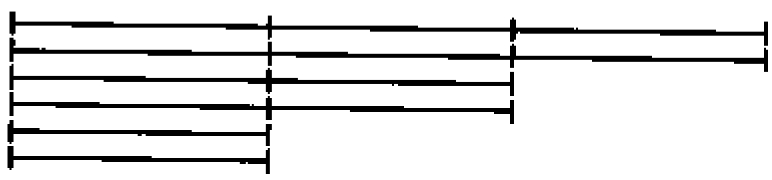


图 8

用与以前相同的方法得

$$E_{m+1}<\prod{}_{m+1}E_m+\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^{2m+6}$$

特别有

$$E_1<\prod{}_1+\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^3$$

与

$$E_2<\prod{}_1\prod{}_2\left(1+\alpha_0\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^3+\alpha_0^2\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^5\right)$$

继续下去,我们得

$$E_n<\prod{}_1\cdots\prod{}_n\left(1+\alpha_0\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^3+\alpha_0^2\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^5+\cdots\right)$$

或

$$E_n<\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)\left(1+\frac{\alpha_0\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^3}{1-\alpha_0\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^2}\right) \qquad ㉝$$

此处

$$\alpha_0\left(\frac{\text{elog }\alpha_0}{2}\right)^2<1$$

特别取

$$\alpha=3/2,\alpha_0=1.51$$

则得

$$E_n < 1.505\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

为了研究 E_n 中的项数(R),我们考虑下面的乘积

$$\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{1}{p_r}\right)^2\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{1}{p_{t-1}}\right)^2\cdots\left(1-\frac{1}{p_1}-\cdots-\frac{1}{p_{w-1}}\right)^2$$

如前一样可得

$$R < p_r^2 p_\rho^{\frac{2}{\alpha}}\cdots p_\mu^{\frac{2}{\alpha^n}} < p_r^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} = p_r^{\ 6}$$

我们可以给 ㉜ 以下面的形式

$$N(D,x,p_1,\cdots,p_r) < \frac{x}{D}\cdot 1.505\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+p_r^{\ 6}$$

故对于所有 $r > \mathrm{e}$ 皆有

$$N(D,x,2,3,\cdots p_r) < \frac{x}{D}\cdot 1.505\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)+2^{\mathrm{e}}p_r^{\ 6}$$

由麦尔顿公式,我们得

$$N(D,x,2,3,\cdots,p_r) < \frac{0.9x}{D\log p_r}+2^{\mathrm{e}}p_r^{\ 6}$$

对于所有 $r > c$ 皆成立,此处 $c \geqslant \mathrm{e}$.

特别取 $p_r = p(2\sqrt[7]{x})$. 则由切比雪夫定理可知

$$\sqrt[7]{x} < p_r \leqslant 2\sqrt[7]{x}$$

所以对于所有 $x > x_0$,我们有

$$N(1,x,2,3,\cdots,p(2\sqrt[7]{x})) < \frac{6.5x}{\log x}+2^{\mathrm{e}+6}x^{\frac{6}{7}} < \frac{7x}{\log x} \qquad ㉞$$

运用不等式 ㉛ 可知,对于所有 $x > x_0$,下式成立,即

$$N(1,x,2,\cdots,p(\sqrt{x})) \leqslant N(1,x,2,\cdots,p(\sqrt[6]{x})) \leqslant N(1,x,2,\cdots,p(2\sqrt[7]{x})) < \frac{7x}{\log x}$$

特别地,对于所有 $x > x_0$ 有

$$\pi(x)-\pi(\sqrt{x})+1 < \frac{7x}{\log x}$$

此处 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数. 所以

$$\pi(x) < \frac{7x}{\log x}+\sqrt{x} < \frac{8x}{\log x}$$

与 2.4 的定理相比较,我们得

$$\frac{x}{\log x} < N(1,x,2,\cdots,p(\sqrt[6]{x})) < \frac{7x}{\log x} \qquad ㉟$$

当我们在 x 个数中去掉 $2,3,\cdots,p(\sqrt[6]{x})$ 的倍数后,总可以剩下 N 个数,此处

$\dot{N}$ 为区间$\left[\frac{x}{\log x},\frac{7x}{\log x}\right]$中的一个数,其中 $x > x_0$.

最后我们来研究麦尔林筛法,我们得到类似于 ㉝ 的公式

$$E_n < \left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_n}\right)\left(1+\frac{\alpha_0^2(e\log\alpha_0)^3}{1-\alpha_0^2(e\log\alpha_0)^2}\right)$$

特别地,取

$$\alpha = 1.25, \alpha_0 = 1.250\,1$$

则得

$$E_n < 1.82\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right)$$

如前一样,可得

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r) < \frac{x}{D}\cdot 1.82\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_r}\right)+3^e p_r^{10}$$

或

$$P(D,x,3,5,\cdots,p_r) < \frac{1.6x}{D(\log p_r)^2}+3^e p_r^{10} \tag{㊱}$$

对于所有 $r > c$ 成立,此处 $c \geqslant e$(见 2.6).

选取 $p_r = p(2x^{\frac{1}{11}})$ 则对于所有 $x > x_0$,我们有

$$P(D,x,2,3,\cdots,p(2x^{\frac{1}{11}})) < \frac{194x}{D(\log x)^2}+3^{x+1}x^{\frac{1}{11}} < \frac{195x}{D(\log x)^2}$$

运用不等式

$$P(D,x,2,3,\cdots,p(\sqrt{x})) \leqslant P(D,x,2,3,\cdots,p(2\sqrt[11]{x}))$$

及等式

$$Z(x)-2(\sqrt{x}+2)+1 = P(2,x,2,3,\cdots,p(\sqrt{x}))$$

此处 $Z(x)$ 表示不超过 x 的孪生素数个数,及此处我们取0与2作为划数的起始点.

我们则得

$$Z(x) < \frac{195x}{2(\log x)^2}+\sqrt{x}+2$$

或

$$Z(x) < \frac{100x}{(\log x)^2}$$

对于所有 $x > x_0$ 成立,此处 x_0 表示一个可以决定的数,及 $Z(x)$ 表示不超过 x 的孪生素数个数.

编者注　**编者对原文中的某些公式作了一些修改.**

3 关于多项式的素因子

——库恩

我们用小写拉丁字母表示自然数，或简称为数，用 p,q,s,t 表示素数，命

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, a_0 > 0 \qquad ①$$

为一个整值本原多项式，它是 $r(1 \leqslant r \leqslant n)$ 个整值，既约原多项式之积. 假定 ① 的固定素因子为 $T = t_1^{b_1}\cdots t_e^{b_e}$.

我们将寻求尽可能小的整数 k 使数列

$$P_n(1), P_n(2), \cdots, P_n(x), \cdots \qquad ②$$

中存在无限多个数，除固定素因子 t_i 外，最多含有 k 个素因子.

拉德马赫尔①与黎切②用布朗筛法处理了这个问题. 他们仅对于 $r = 1$ 时，找到了一个较小的 k. 对于 $1 < r \leqslant n$，我们亦需寻求出对应的数 k. 本文将给出 $r = n$ 时的证明.

假定 p 过所有适合

$$p \leqslant x^{\frac{1}{v}}, p \neq t_i \qquad ③$$

的素数，此处 v 为 n 的函数，将于以后确定.

命 d 为适合 $d \not\equiv 0(\bmod p)$ 及 $d \not\equiv 0(\bmod t_i)$ 的整数. 命 $N_n(dx, x^{\frac{1}{v}})$ 为 ② 中适合下面条件的整数个数；$\leqslant P_n(x)$，$\equiv 0(\bmod d)$，$\not\equiv 0(\bmod p)$，及 $\not\equiv 0(\bmod t_i^{b_i+1})$. 用布朗方法可知当 $r = n$ 及 $x \to \infty$ 时有

$$N_n(x, x^{\frac{1}{v}}) > C_n \cdot 0.98xv^n\log^{-n}x + O(x^{\frac{v()}{x}}v^{n+1}\log^{-n-1}x)$$

$$N_n(dx, x^{\frac{1}{v}}) < C_n \cdot 1.016\frac{nx}{d}v_n\log^{-n}x + O(x^{\frac{x()}{v}}v^{n+1}\log^{-n-1}x)$$

$$\chi(2) \geqslant 9.99, \chi(3) \geqslant 13.67, \chi(4) \geqslant 17.50, \chi(5) \geqslant 22.02, \cdots \qquad ④$$

此处 C_n 为一个依赖于 $P_n(x)$ 的常数.

定理 若 $r = n$，则取 $k = \omega + n$ 即足，此处 ω 为满足下式的最小整数

$$\frac{0.98}{1.016}(\omega + 1) > n\log\chi(n) \qquad ⑤$$

例如，$n = 2, k = 6; n = 3, k = 10; n = 4, k = 15; n = 5, k = 21; \cdots$

假定在 ③ 中取 $v = 2\chi(n)$ 及 q 过满足

---

① H. Rademacher, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 12-30.3, 1924.
② G. Ricci, I, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2)6, 1937, 1-90. II, ibid. 91-116.

$$x^{\frac{1}{v}} < q \leqslant (2a_0x)^{\frac{1}{v}} + 1, q \neq t_i \qquad ⑥$$

的所有素数,命 m 表示 ② 中适合

$$m \leqslant P_n(x), m \not\equiv 0(\bmod p), m \not\equiv 0(\bmod t_i^{b_i+1}), m \not\equiv 0(\bmod q^2) \qquad ⑦$$

的数. 命 U 表示整数 m 的个数 $M_n(x, x^{\frac{1}{v}})$ 的下界估计. 由于 $M_n(x, x^{\frac{1}{v}}) = N_n(x, x^{\frac{1}{v}}) + O(x^{1-\frac{1}{v}})$,所以由 ④ 可知

$$U = C_n \cdot 0.98xv^n\log^{-n}x + O(x^{\frac{1}{2}}\log^{-n-1}x) + O(x^{1-\frac{1}{v}}) \qquad ⑧$$

命 $M_n(qx, x^{\frac{1}{v}})$ 表示适合 $m \equiv 0(\bmod q)$ 的数 m 的个数. 命 V 表示 $\sum\limits_q M_n(qx, x^{\frac{1}{v}}) = L_n$ 的上界估计,此处 q 过 ⑥. 则 $L_n \leqslant \sum\limits_q N_n(qx, x^{\frac{1}{v}})$,所以由 ④ 可知

$$V = C_n \cdot 1.016\sum_q \frac{nx}{q}v^n\log^{-n}x + O(x\log^{-n-1}x) \qquad ⑨$$

若 m 最少有 $\omega + 1$ 个素因子 q,则它在 L_n 中至少被计算过 $\omega + 1$ 次,所以表示式 $\triangle = U - \frac{1}{\omega + 1}V$ 给出适合下面条件的 m 的个数的下界估计:除 t_i 之外,m 最多只有 ω 个素因子 q,m 的其他素因 s 皆大于 $(2a, x)^{1/2} + 1$. 因 $P_n(x)$ 的每个线性因子,当 $x \to \infty$ 时,最多只有一个素因子 s,所以这种素因子 s 的个数最多为 n. 因此若

$$\frac{0.98}{1.016}(\omega + 1) > \sum_q \frac{n}{q} \qquad ⑩$$

则当 $x \to \infty$ 时有 $\triangle \to \infty$. 因 $\sum\limits_q \frac{1}{q} \sim \log \chi(n)$,所以定理得证.

4 埃拉托塞尼氏筛法的新改进

—— 布赫夕塔布

在 1919 年,布朗[①]给出一个方法,将埃拉托塞尼氏筛法用于一系列数论问题.

布朗证明了存在无穷多个整数对满足

(1) 整数对中每个整数均最多只有 9 个素因子;

(2) 每对整数之差均等于 2,此处 2 可以换成任意偶数.

---

① V. Brun, Skr. Norske Vid. —Akad. Kristianaia, I, No. 3, 1920.

布朗也证明了每个大偶数都是两个素因子个数不超过 9 的整数之和. 1924 年,拉德马赫尔[①]将上述结果中的 9 改进为 7. 在 1930 年,我已能将 7 改进为 6. 1932 年,埃斯特曼也做到了这一步.

本文,我将给出这些问题一个新的处理,使素因子个数降低到 5. 用更精密的积分迭代,素因子个数还可以进一步减少.

我们研究方程 $2 = n' - n''$ 与 $2N = n' + n''$ 的可解性问题,此处 n' 与 n'' 的素因子个数被要求不超过一个固定常数. 布朗与其后继者考虑的其他问题也可以类似地来处理.

同时,我得到了上述方程解数的较好的上界估计.

引理 1 与引理 2 给出的估计是由普通的布朗方法求得的.

有别于其他工作者,我将要在这里给出充分接近的上下界估计. 本文的基本部分已在我的文章[②]中作了叙述.

(1) 我们用 $P_\omega(x,y)$ 表示小于等于 x 的非负整数个数,这些数不包含在下面 2^r+1 个数列中的任何一个之中

$$\begin{aligned}&a_0, a_0+p_0, a_0+2p_0, \cdots\\&a_1, a_1+p_1, a_1+2p_1, \cdots\\&b_1, b_1+p_1, b_1+2p_1, \cdots\\&\cdots\\&a_r, a_r+p_r, a_r+2p_r, \cdots\\&b_r, b_r+p_r, b_r+2p_r, \cdots\end{aligned} \qquad ①$$

此处 $p_0 = 2, 0 \leqslant a_0$ 小于等于 $2, p_i$ 为小于等于 y 的素数,具有次序 $3 = p_1 < \cdots < p_r \leqslant y, 0 \leqslant a_i < p_i, 0 \leqslant b_i < p_i, a_i \neq b_i$,及指标 ω 表示 ① 中整数集合 a_i 与 b_i.

引理 1　若 $p_1 = 3, p_2, \cdots, p_r$ 为所有小于等于$\sqrt[10]{x}$ 的奇素数,则

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{10}}) > 98\frac{cx}{\log^2 x}$$

对于 a_i 与 b_i 的集合 ω 一致地成立,此处 c 是一个常数.

依照上面引用的拉德马赫尔的文章可得

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{10}}) = P_\omega(x, p_r) > \frac{x}{2}E - R$$

此处

$$E = \left(1 - 2\sum_{1\leqslant a\leqslant r}\frac{1}{p_a}\right) + \sum_{1\leqslant a\leqslant r_1}\sum_{\leqslant b\leqslant r_1}\frac{2^2}{p_a p_b}\left(1 - 2\sum_{1\leqslant c\leqslant b}\frac{1}{p_c}\right) +$$

---

① H. Rademacher, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 3, 1924, 12 - 30.
② A. A. Buchstab, Mat. Sbornik, 44, 1937, 1239 - 1246.

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant r}\sum_{1\leqslant b\leqslant r_1}\sum_{1\leqslant c\leqslant r_1}\sum_{1\leqslant d\leqslant r_2}\frac{2^4}{p_ap_bp_cp_d}\left(1-2\sum_{1\leqslant e\leqslant d}\frac{1}{p_e}\right)+\cdots$$

及 R 表示 E 中项 $\frac{1}{p_ap_b\cdots}$ 的个数.

命 $r=r_1$ 及 p_r 表示小于等于 $x^{\frac{1}{10}}$ 最大的素数. 命 p_{rk} 表示小于等于 $x^{\frac{1}{10Bh^{k-2}}}$ 的最大素数,此处 $2\leqslant k\leqslant t-1$, $B=\frac{22}{17}-\varepsilon$ 及 $h=\sqrt[4]{e}-\varepsilon$,其中 ε 为任意给予正数,t 适合 $p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}}<\omega_0\leqslant p_{r_{t+1}}$.

当 $t+1<k\leqslant n$ 时,我们取 $p_{rk}=p_{r_{n+1}}$ 及 $p_{r_{n+1}}=p_0=2$.

当 $k=1,2,\cdots,n$ 时,我们用 E_k 表示 E 中那些项之和,这些项的分母只含指标大于 r_{l+1} 的素因子,即分母最多含有 $2k+1$ 个素因子. 我们有 $E_n=E$,及

$$E_k=1-E^1+\cdots+E_k^{(2k)}-E_k^{(2k+1)}$$

此处 $F^{(i)}$ 表示 E_k 中分母正好含有 i 个素因子的项之和.

命 $S_k^{(i)}$ 表示数

$$\frac{2}{p_{r_{k+1}}+1},\frac{2}{p_{r_{k+1}}+2},\cdots,\frac{2}{p_{r_k}}$$

的 i 次初等对称函数及

$$\prod{}_k=\prod_{i=r_{k+1}^{k+1}}^{r_k}\left(1-\frac{2}{p_i}\right)$$

则得不等式

$$E_{k+1}\geqslant E_k\prod{}_{k+1}-\Phi_{k+1} \qquad ②$$

此处

$$\Phi_{k+1}=S_{k+1}^{2k+4}+S_{k+1}^{(2k+3)}E_k^{(1)}+\cdots+S_{k+1}^{(3)}E_k^{(2k+1)}$$
$$\Phi_{k+1}=0,k+1>t \qquad ③$$

及

$$E_1>\prod{}_1-S_1^4 \qquad ④$$

不断应用不等式 ② 与 ④ 可得

$$E=E_n>\prod{}_1\prod{}_2\cdots\prod{}_n\left(1-\frac{1}{\prod_1}S_1^{(4)}-\frac{1}{\prod_1\prod_2}\Phi_2-\frac{1}{\prod_1\prod_2\prod_3}\Phi_3-\cdots\right)$$

选取 ω_0 使

$$S_1^{(1)}=2\sum_{a=r_2+1}^{r_1}\frac{1}{p_a}<2\log\frac{22}{17}<0.516$$

$$S_k^{(1)} = 2\sum_{a=r_{k+1}+1}^{r_k} \frac{1}{p_a} < 2\log\sqrt[4]{e} = \frac{1}{2}, 2 \leqslant k \leqslant t$$

$$S_k^{(1)} \leqslant \frac{S^{(1)i}}{i!} < \frac{1}{2^i i!}, 1 \leqslant i \leqslant 2k+1 \text{ 及 } 2 \leqslant k \leqslant t$$

特别地

$$S_1^{()} < \frac{S_1^{(1)i}}{4!} > 0.003$$

所以

$$\frac{1}{\prod_1} = \prod_{i=r_2+1}^{r_1}\left(1 - \frac{2}{p_i}\right)^{-1} < \left(\frac{22}{17}\right)^2 < 1.675$$

$$\frac{1}{\prod_k} = \prod_{i=r_{k+1}+1}^{r_k}\left(1 - \frac{2}{p_i}\right)^{-1} < \sqrt{e}, 2 \leqslant k \leqslant t$$

将 $E_k^{(i)}$ 表示为

$$E_k^{(i)} = S_k^{(i)} + S_k^{(i-1)}E_{k-1}^{(1)} + \cdots + S_k^{(1)}E_{k-1}^{(i-1)} + E_{k-1}^{(i)}, i = 1,2,\cdots,2k+1, E_{k-1}^{(2)} = E_{k-1}^{(2k+1)} = 0$$

因

$$E_1^{(i)} = S_1^{(i)} < 2.14 \cdot \frac{1}{4i}, i = 1,2,3$$

所以对于所有 $k \leqslant t-1$ 皆有

$$E_k^{(i)} < 2.14\frac{1}{4^i}e^{2(i-1)}$$

及由③得

$$\Phi_{k+1} < 2.14 \cdot \frac{1}{4^{2i+4}}e^{2(i-1)}(e^2 - 5), 2 \leqslant k+1 \leqslant t$$

因此

$$\Phi = \frac{1}{\prod_2}\Phi_2 + \frac{1}{\prod_2\prod_3}\Phi_3 + \cdots < 2.14(e^2 - 5)\frac{1}{4^6}\left(e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{6}{2}}\frac{1}{4^2} + e^{\frac{11}{2}}\frac{1}{4^4} + \cdots\right) = 2.14(e^2-5)e^{\frac{1}{2}}4^{-6}\left(1 - \frac{e^{5/2}}{16}\right)^{-1} < 0.008\,7$$

及

$$1 - \frac{1}{\prod_1}(S_1^{(4)} + \Phi) > 0.98$$

记

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(2\log\log x + \sum_{3<p\leqslant x}\log\left(1-\frac{2}{p}\right)\right)$$

当 n 充分大时,我们有

$$\prod_1\cdots\prod_n = \prod_{3<p<x}\frac{1}{10}\left(1-\frac{2}{p}\right) = 100\cdot\frac{e^A}{\log^2 x} + O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)$$

及

$$E > 98\frac{2c}{\log^2 x} + O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)$$

此处 $c = \frac{1}{2}e^A = 0.416\ 1\cdots$.

R 不超过表达式

$$\left(1-\sum_{a=1}^{r_1}\frac{2}{p_a}\right)\left(1-\sum_{b=1}^{r_1}\frac{2}{p_b}\right)\left(1-\sum_{c=1}^{r_1}\frac{2}{p_c}\right)\left(1-\sum_{d=1}^{r_1}\frac{2}{p_d}\right)\cdots$$

中项 $\frac{1}{p_a p_b\cdots}$ 的个数,所以

$$R \leqslant (2r_1+1)^3(2r_2+1)^2\cdots(2r_n+1)^2 <$$

$$p_{r_1}^3 p_{r_2}^3\cdots p_{r_n}^3 < A_1 x^{\frac{3}{10}} x^{\frac{2}{10B}} x^{\frac{2}{10Bh}}\cdots = A_1 x^{\frac{3}{10}+\frac{2}{10B(h-1)}}$$

因 $\frac{3}{10}+\frac{2h}{10B(h-1)} < 0.999$,此处取 ε 充分小,所以

$$R < O(x^{0.999}) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

因此

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{10}}) > 98\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

引理 2 $P_\omega(x, x^{\frac{1}{10}}) < 101.6\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$.

用同样的记号可知对于 $3 = p_1 < \cdots < p_r < x^{\frac{1}{10}}$ 有

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{10}}) < \frac{x}{2}E + R + 1$$

此处

$$E = 1 - \sum_{a\leqslant r_1}\frac{2}{p_a}\left(1-\sum_{b\leqslant a}\frac{2}{p_b}\right) - \sum_{a\leqslant r_1}\sum_{b\leqslant r_1}\sum_{c\leqslant r_2}\frac{2^3}{p_a p_b p_c}\left(1-\sum_{d\leqslant c}\frac{2}{p_d}\right) - \cdots$$

其中,$r \geqslant r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots$,命 p_{r_1} 为 $\leqslant x^{\frac{1}{10}}$ 的最大素数,即 $r = r_1$. 当 $2 \leqslant k \leqslant t+1$ 时,命 p_{r_k} 表示 $\leqslant x^{\frac{1}{10Bh^{k-2}}}$ 的最大素数,此处 $B = \frac{26}{23} - \varepsilon$ 及 $h = \sqrt[4]{e} - \varepsilon$,其中 t 适合 $p_{r_{t+1}}^{\frac{1}{h}} < \omega_0 \leqslant Pr_{t+1}$。当 $t+1 \leqslant h \leqslant m$ 时,定义 $Pr_k = Pr_{t+1}$ 及 $Pr_{t+1} = 2$,

则及 $p_{r_{t+1}} = 2$,则

$$E_n = 1 - E_k^{(1)} + E_k^{(2)} - \cdots + E_k^{(2k)}, 1 \leqslant k \leqslant t$$

$$E_m = E$$

及

$$E_{k+1} \geqslant \prod_{k+1} E_k + \Phi_{k+1}$$

此处

$$\Phi_{k+1} = S_{k+1}^{(2k+3)} + S_{k+1}^{(2k+2)} E^{(1)} + \cdots + S_{k+1}^{(3)} E_k^{(2k)}, \Phi_{k+1} = 0, k \geqslant t$$

及

$$E_1 < \prod_1 + S_1(3)$$

不断地运用上面的不等式可得

$$E = E_m < \prod_1 \cdots \prod_m \left(1 + \frac{1}{\prod_1} S_1^{(3)} + \frac{1}{\prod_1 \prod_2} \Phi_2 + \frac{1}{\prod_1 \prod_2 \prod_3} \Phi_3 + \cdots\right)$$

选取 ω_0 满足

$$S_1^{(1)} = 2 \sum_{a=r_2+1}^{r_1} \frac{r_1}{p_a} < 2\log\frac{26}{23} < 0.245\ 3$$

$$S_1^{(3)} < \frac{S_1^{(1)3}}{6} < 0.002\ 5$$

$$\frac{1}{\prod_1} = \prod_{a=r_2+1}^{r_1} \left(1 - \frac{2}{p_a}\right)^{-1} < \left(\frac{26}{23}\right)^2 < 1.28$$

当 $k \geqslant 2$ 时,$S_k^{(i)}$ 与 $\frac{1}{\prod_k}$ 的估计类似于引理 1.现在我们估计 Φ_i 如下

$$\Phi_2 = S_2^{(5)} + S_2^{(4)} E_1^{(1)} + S_2^{(3)} E_1^{(2)} < 0.001\ 54$$

$$E_2^{(1)} = S_1^{(1)} + E_1^{(1)} < 0.746$$

$$E_2^{(2)} = S_2^{(2)} + S_2^{(1)} E_1^{(1)} + E_1^{(2)} < 0.278$$

$$E_2^{(3)} = S_2^{(3)} + S_2^{(2)} E_1^{(1)} + S_2^{(1)} E_1^{(2)} < 0.068$$

$$E_2^{(4)} = S_2^{(4)} + S_2^{(3)} E_1^{(1)} + S_2^{(2)} E_1^{(2)} < 0.012$$

及由 $E_2^{(i)} < 4.45 \frac{1}{4^i} (i = 1,2,3,4)$ 可得

$$E_k^{(i)} < 4.45 e^{2(k-2)} \frac{1}{4^i}, i = 1,2,\cdots,2k$$

及

$$\Phi_{k+1} < 4.45 e^{2(k-2)} \frac{1}{4^{2k+3}} (e^2 - 5)$$

因此

$$\Phi = \frac{1}{\prod_2 \prod_3}\Phi_3 + \frac{1}{\prod_2 \prod_3 \prod_4}\Phi_4 + \cdots <$$

$$4.45(e^2 - 5)e\left(\frac{1}{4^7} + \frac{\sqrt{e^5}}{4^9} + \frac{\sqrt{e^9}}{4^{11}} + \cdots\right) =$$

$$4.45(e^2 - 5)e \cdot 4^{-7}\left(1 - \frac{e^{\frac{5}{2}}}{16}\right)^{-1} < 0.007\ 4$$

及

$$1 - \frac{1}{\prod_1}\left(S_1^{(3)} + \frac{1}{\prod_2}\Phi_2 + \Phi\right) < 1.016$$

由 m 的定义可知 $\prod_1 \cdots \prod_m$ 等于

$$\prod_{3 \leqslant p \leqslant x^{\frac{1}{10}}}\left(1 - \frac{2}{p}\right) = 100\frac{e^4}{\log^2 x} + O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)$$

对于充分小的 ε，R 可以估计如下

$$R < A_2 x^{\frac{2}{10}} x^{\frac{2}{10B}} x^{\frac{2}{10Bh}} \cdots = A_2 x^{\frac{1}{5}\left(1+\frac{h}{B(h-1)}\right)} < A_2 x^{0.999\ 9} = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

所以

$$P_\omega\left(x, x^{\frac{1}{10}}\right) < 101.6\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

此处 c 为一个常数如引理 1 所示.

引理 3　命 u 与 v 为两个常数或依赖于 x 的变数，且满足 $2 \leqslant u \leqslant v \leqslant A$，此处 A 为一个常数，则

$$\sum_{x^{\frac{1}{v}} \leqslant p < x^{\frac{1}{u}}} \frac{1}{p\left(\log \frac{x}{p}\right)^2} = \frac{1}{\log^2 x}\left(\log\frac{v-1}{u-1} + \frac{u}{u-1} - \frac{v}{v-1}\right) + O\left(\frac{1}{\log^4 x}\right)$$

(2) 现在考虑函数 $P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}})$ $(\alpha < 10)$. 显然当 $2 \leqslant \alpha \leqslant 10$ 时有

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) \leqslant P_\omega(x, x^{\frac{1}{10}}) \quad ⑤$$

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) \geqslant 0 \quad ⑤'$$

由引理1与不等式⑤可知存在非递减函数 $\lambda(\alpha)$，它是连续的或在区间 $2 \leqslant \alpha \leqslant 10$ 中仅有一个第一类不连续点，使

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) > \lambda(\alpha)\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

对于 ω 一致成立，此处 c 如引理 1 与引理 2 定义.

例如，$\lambda(\alpha)$ 定义为

$$\lambda(\alpha) = 0, 2 \leqslant \alpha < 10$$

$$\lambda(\alpha) = 98, \alpha = 10$$

由引理 2 与 ⑤ 可知在区间 $2 \leqslant \alpha \leqslant 10$ 中存在一个连续非递减函数 $\Lambda(\alpha)$ 使对于任何 ω 皆有

$$P_{\omega}(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) < \Lambda(\alpha)\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

作为例子，我们可以取

$$\Lambda(\alpha) = 101.6, 2 \leqslant \alpha \leqslant 10$$

我们用 $\lambda_i(\alpha)$ 与 $\Lambda_i(\alpha)$ 表示具有 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$ 相类似性质的函数.

定理 1 假定 $\lambda_i(\alpha)$ 与 $\Lambda_k(\alpha)$ 为两个适合上述条件的函数. 则由

$$\Psi(\alpha) = 0, 2 \leqslant \alpha \leqslant \tau$$

$$\Psi(\alpha) = \lambda_i(\beta) - 2\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda_k(z)\frac{z+1}{z^2}\mathrm{d}z, 3 \leqslant \tau \leqslant \alpha \leqslant 10$$

定义的函数 $\Psi(\alpha)$，此处 β 为满足 $\alpha \leqslant \beta \leqslant 10$ 的任何数，亦是一个 λ - 函数，即 $\Psi(\alpha) = \lambda_{i+1}(\alpha)$.

首先注意 $P_{\omega}(x, p_{r+1})$ 与 $P_{\omega}(x_1 p_r)$ 之差小于等于 x，属于数列

$$a_r, a_r + p_r, a_r + 2p_r, \cdots$$

$$b_r, b_r + p_r, b_r + 2p_r, \cdots$$

但不属于 ① 中前 $2r-1$ 个数列的整数个数，若 $a_r + kp_r = a_i + np_i$，则 $k \equiv a'_i \pmod{p_i} i \geqslant 1 (0 \leqslant k \leqslant \frac{x - a_r}{p_r}, a_i < p_i)$，及若 $a_r + kp_r = b_i + np_i$，则 $k \equiv b'_i \pmod{p_i}, i \geqslant 1 (b' < p_i)$. 因此数列 $a_r, a_r + p_r, a_r + 2p_r, \cdots$ 中不属于 ① 中前 $2r-1$ 个数列又不超过 x 的整数个数等于不超过$\frac{x-a_r}{p_r}$的整数而又不含于数列

$$a'_i, a'_i + p_i, a'_i + 2p_i, \cdots, i = 0, 1, \cdots, r-1$$

$$b'_i, b'_i + p_i^1, b'_i + 2p_i, \cdots, i = 1, 2, \cdots, r-1$$

者的个数，即等于 $P_{\omega'r}\left(\frac{x - a_r}{p_r}, p_r\right)$，此处 ω_r 表示整数 a'_r 与 b'_i 的集合.

类似地，含于数列 $b_r, b_r + p_r, b_r + 2p_r, \cdots$ 而不含于数列 ① 的前 $2r-1$ 个数列的不超过 x 的整数个数等于 $P_{\omega''_r}\left(\frac{x - b_r}{p_r}, p_r\right) \cdot P_{\omega'_r}\left(\frac{x - a_r}{p_r}, p_r\right)$ 或者等于 $P_{\omega'_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right)$，或者与它相差 1，$P_{\omega''_r}\left(\frac{x - b_r}{p_r}, p_r\right)$ 与 $P_{\omega''_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right)$ 的情况是类似的.

我们得

$$P_{\omega}(x, p_{r+1}) = P_{\omega}(x, p_r) - P_{\omega'_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right) - P_{\omega''_r}\left(\frac{x}{p_r}, p_r\right) - \mu_r \qquad ⑥$$

此处 $0 \leqslant \mu_r \leqslant 2$. 命 $p_t, p_{t+1}, \cdots, p_r$ 为 $x^{1/\beta}$ 与 $x^{1/\alpha}$ 之间的所有素数,即

$$x^{\frac{1}{\beta}} \leqslant p_t < p_{t+1} < \cdots < p_n < x^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant p_{r+1}$$

则
$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) = P_\omega(x, p_{r+1})$$

与
$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\beta}}) = P_\omega(x, p_t)$$

不断地运用 ⑥ 可得

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) = P_\omega(x, x^{\frac{1}{\beta}}) - \sum_{x^{\frac{1}{\beta}} \leqslant p_i < x^{\frac{1}{\alpha}}} P_{\omega'_i}\left(\frac{x}{p_i}, p_i\right) - \sum_{x^{\frac{1}{\beta}} \leqslant p_i < x^{\frac{1}{\alpha}}} P_{\omega''_i}\left(\frac{x}{p_i}, p_i\right) - \sum \mu_i \qquad ⑦$$

此处 $\sum \mu_i = 0(\sqrt{x})$.

为了简单起见,今后我们略去指标 i. 命

$$u_s = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}s - 1, s = 0, 1, \cdots, n$$

此处 $c_1 \log x \leqslant n \leqslant c_2 \log x$. 对于给予满足 $x^{\frac{1}{u_{s+1}+1}} \leqslant p < x^{\frac{1}{u_s+1}}$ 的素数 p,我们有

$$\alpha - 1 \leqslant u_s < \frac{\log \frac{x}{p}}{\log p} \leqslant u_{s+1} \leqslant \beta - 1$$

$$T_s = \sum_{x^{\frac{1}{u_{s+1}+1}} \leqslant p < x^{\frac{1}{u_s+1}}} \left(P_{\omega'_r}\left(\frac{x}{p}, p\right) + P_{\omega''_i}\left(\frac{x}{p}, p\right) \right) =$$

$$\frac{1}{x^{u_s} + 1} \sum_{p < x} \frac{1}{u_s + 1} \left(P_{\omega'_i}\left(\frac{x}{p}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{\log p}{\lg x \frac{x}{p}}}\right) + P_{\omega''_i}\left(\frac{x}{p}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{\log p}{\log \frac{x}{p}}}\right)\right) \leqslant$$

$$2c \sum_{x^{\frac{1}{u_{s+1}}} \leqslant p < x^{\frac{1}{u_{s+1}}}} \frac{x}{p \log^2 \frac{x}{p}} \Lambda_k\left(\frac{\log \frac{x}{p}}{\log p}\right) + O\left(\sum_{x^{\frac{1}{u+1}} \leqslant p \leqslant x^{\frac{1}{u_{s+1}}}} \frac{x}{p \log^3 \frac{x}{p}} \right)$$

及由引理 3 得

$$T_s \leqslant 2c\Lambda_k(u_{i+1}) \frac{x}{\log^2 x}\left(\log \frac{u_s + 1}{u_s} + \frac{u_{s+1} - u_s}{u_s u_{s+1}} \right) + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\left(\log \frac{u+1}{u_s} + \frac{u_{i+1} - u_s}{u_s u_{s+1}} \right)\right)$$

因此

$$T = \sum_{x^{\frac{1}{\beta}} \leqslant p \leqslant x^{\frac{1}{\alpha}}} \left(P_{\omega'_i}\left(\frac{x}{p}, p\right) + P_{\omega''_i}\left(\frac{x}{p}, p\right) \right) =$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} T_s \leqslant 2c \frac{x}{\log^2 x} \sum_{s=0}^{n-1} \Lambda_k(u_{s+1}) \left(\log \frac{u_{s+1}}{u_s} + \frac{u_{s+1} - u_s}{u_s u_{s+1}} \right) +$$

$$O\left(\frac{x}{\log^3 x} \sum_{s=0}^{n-1} \left(\log \frac{u_s + 1}{u_s} + \frac{u_s + 1 - u_s}{u_s u_{s-1}} \right) \right)$$

因为

$$\sum_{s=0}^{n-1} \Lambda(u_{s+1}) \left(\log \frac{u_{s+1}}{u_s} + \frac{u_{s+1} - u_s}{u_s u_{s+1}} \right) =$$

$$\int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda_k(z) \left(\mathrm{d}\log z + \frac{\mathrm{d}z}{z^2} \right) + O\left(\frac{1}{n} \right) =$$

$$\int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda_k(z) \frac{z+1}{z^2} \mathrm{d}z + O\left(\frac{1}{\log x} \right)$$

及

$$\sum_{s=0}^{n-1} \left(\log \frac{u_{s+1}}{u_s} + \frac{u_{s+1} - u_s}{u_s u_{s+1}} \right) = O(1)$$

所以

$$T \leqslant 2c \frac{x}{\log^2 x} \int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda_k(z) \frac{z+1}{z^2} \mathrm{d}z + O\left(\frac{x}{\log^3 x} \right)$$

及由 ⑦ 得

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{\alpha}}) \geqslant \frac{cx}{\log^2 x} \left(\lambda_i(\beta) - 2\int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda_k(z) \frac{z+1}{z^2} \mathrm{d}z \right) + O\left(\frac{x}{\log^3 x} \right)$$

即

$$\lambda_{i+1}(\alpha) = \lambda_i(\beta) - 2\int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda_k(z) \frac{z+1}{z^2} \mathrm{d}z$$

定理证完.

定理 2 命 $\lambda_i(\alpha)$ 与 $\Lambda_k(\alpha)$ 为两个适合上述条件的函数.则由

$$\omega(\alpha) = \Lambda_k(\beta) - 2\int_{\alpha-1}^{\beta-1} \lambda_i(z) \frac{z+1}{z^2} \mathrm{d}z, 3 \leqslant \alpha \leqslant 10$$

定义的函数 $\omega(\alpha)$,此处 β 满足 $\alpha \leqslant \beta \leqslant 10$ 的任何数,亦是一个 Λ - 函数,即 $\omega(\alpha) = \Lambda_{i+1}(\alpha)$.

定理的证明与定理 1 的证明是完全类似的.

命 $\beta \leqslant 10$. 命 $\Lambda_0(\alpha)$ 与 $\Lambda_0(\alpha)$ 为区间 $6 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ 中的两个函数满足

$$\lambda_0(\alpha) = 0, \alpha < \beta$$

$\lambda_0(\beta)$ 等于一个正常数,及

$$\Lambda_0(\alpha) = \Lambda_0(\beta), 6 \leqslant \alpha \leqslant \beta$$

不断后用定理 1 与定理 2,由 $\lambda_0(\alpha)$ 与 $\Lambda_0(\alpha)$ 出发可得

$$\lambda_{i+1}(x) = \lambda_0(\beta) - 2\int_{x-1}^{\beta-1}\Lambda_i(y)\frac{y+1}{y^2}2y$$

$$\Lambda_{i+1}(\beta-1) = \Lambda_0(\beta) - 2\int_{\beta-2}^{\beta-1}\lambda_{i+1}(x)\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x =$$

$$\Lambda_0(\beta) - 2\lambda_0(\beta)\int_{\beta-2}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x +$$

$$4\Lambda_i(\beta-1)\int_{\beta-2}^{\beta-1}\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, i = 0,1\cdots$$

此处对于所有 i, $\Lambda_i(\beta) = \Lambda_0(\beta)$, $\lambda_i(\beta) = \lambda_0(\beta)$,及当 $y < \beta - 1$ 时, $\Lambda_i(y) = \Lambda_i(\beta - 1)$.

当 $8 \leqslant \beta \leqslant 10$ 时,上面表达式中, $\Lambda_i(\beta-1)$ 的系数小于 1,因而经过逐步迭代后,我们得到 $\Lambda(\beta-1)$,它非常接近于对应方程的根,即我们得到一个 Λ - 函数 $\overline{\Lambda_0}(\alpha)$

$$\overline{\Lambda_0}(\alpha) = \overline{\Lambda_0}(\beta-1) = \frac{\overline{\Lambda_0}(\beta) - 2\lambda_0(\beta)\int_{\beta-2}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x}{1-4\int_{\beta-2}^{\beta-1}\int_{x-1}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} + \varepsilon$$

此处 $7 \leqslant \alpha \leqslant \beta - 1$ 及 ε 充分小.

现在,我们得到一个新的 λ 函数 $\overline{\lambda_0}(\alpha)$,即

$$\overline{\lambda_0}(\beta-1) = \lambda_0(\beta)2\int_{\beta-2}^{\beta-1}\overline{\Lambda_0}(x)\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x - \varepsilon =$$

$$\lambda_0(\beta) - \overline{\Lambda_0}(\beta-1)\int_{\beta-2}^{\beta-1}\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x - \varepsilon_1$$

当 $\alpha < \beta - 1$ 时 $\overline{\lambda_0}(\alpha) = 0$.

用类似的方法,由 $\overline{\lambda_0}$ 与 $\overline{\Lambda_0}$ 可得 $\overline{\overline{\lambda_0}}$ 与 $\overline{\overline{\Lambda_0}}$,等等.从 $\lambda_0(10) = 98$ 与 $\Lambda_0(10) = 101.6$ 出发,迭代结果如下

$$\overline{\Lambda_0}(9) = \frac{101.6 - 2\cdot 93\int_8^9\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x}{1-4\int_8^9\int_{x-1}^9\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} + \varepsilon = 85.1$$

$$\overline{\overline{\lambda_0}}(9) = 98 - 2\cdot 85.1\int_8^9\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x - \varepsilon_1 = 75.58$$

$$\overline{\overline{\Lambda_0}}(8) = \frac{85.1 - 2\cdot 75.58\int_7^8\frac{x^2+1}{x^2}\mathrm{d}x}{1-4\int_7^8\int_{x-1}^8\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} + \varepsilon' = 72.86$$

$$\overline{\overline{\lambda_0}}(8) = 78.58 - 2\cdot 72.86\int_7^8\frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x - \varepsilon''_1 = 53.51$$

$$\overline{\overline{\Lambda_0}}(7) = \frac{72.86 - 2\cdot 53.51\int_6^7 \frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x}{1 - 4\int_6^7\int_{x-1}^7 \frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{y+1}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y} + \varepsilon' = 67.58$$

及最后得

$$\lambda(6) = \overline{\overline{\lambda_0}}(8) - 2\,\overline{\overline{\lambda_0}}(7)\int_5^7 \frac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x - \varepsilon''_1 = 0.03$$

即

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{6}}) < 0.03\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \qquad ⑧$$

与

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{6}}) \leqslant P_\omega(x, x^{\frac{1}{7}}) < 67.58\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

对于 ω 一致成立.

特别地,若我们取 $a_i = 0$ 及 $b_i = p_i - 2$,则 $P_\omega(x, x^{\frac{1}{6}})$ 等于满足 $n \leqslant x$ 及 n 与 $n+2$ 均不能被小于等于 $x^{1/6}$ 的素数整除的整数 n 的个数;即存在一组整数 n 与 $n+2$,其素因子个数皆不超过 5.

不等式 ⑧ 表示这种数对有无穷多个,也就是说,我们证明了下面的结果:

存在无穷多个数对,每个数对中的整数皆最多只有 5 个素因子,每个数对包有的两整数之差为 2.

假定 x 为一个偶数,$a_i = 0$ 及 b_i 为 x 模 p_i 之最小非负剩余,则当 $p_i \mid x$ 时有 $a_i = b_i$. 在 $P_\omega(x, x^{1/\alpha})$ 的所有估计之中,$\frac{x}{\log^2 x}$ 需换成 $\frac{x}{\log^2 x}v(x)$,此处 $v(x) = \prod\limits_{\substack{p\mid x\\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}$. 因为当 $x^{\frac{1}{10}} \leqslant p < x^{1/2}$ 时有 $v\left(\frac{x}{p}\right) = v(x)\frac{p-2}{p-1} = v(x)(1 + O\frac{1}{\sqrt[10]{x}})$. 对应于定理 1 与 2 的结果仍成立,故得

存在常数 A_0 使每一大于 A_0 的偶数皆可以表为两个素因子个数皆不超过 5 的整数之和.

关于区间 $[2, x]$ 中孪生素数对的个数 $Z(x)$,我们有

$$Z(x) < 28.2\frac{x}{\log^2 x}$$

此处 $x > x_0$,在此我们用到 $c = \frac{e'}{2} < 0.417$.

5 线性组合筛法[①]

——谢盛刚

5.1 前言

筛法开始于 Eratosthenes(公元前三世纪),当时用来造素数表.直接用这个方法在理论上得不到什么结果,所以在长时期中不为数学家们所注意.1920 年挪威数学家 V.Brun 对 Eratosthenes 筛法作了极其重要的改进,从而证明了(9,9),这里和今后我们用(a,b)表示命题:任一充分大的偶数皆可表为不超过 a 个素数的乘积与不超过 b 个素数的乘积之和,所以命题(1,1)基本上就是哥德巴赫猜想.

在此后的几十年间,筛法有了很大的发展,并已成为数论研究中强有力的工具之一.

1950 年,塞尔伯格对 Eratosthenes 筛法作了另一重大改进,他的方法与组合方法相结合,大大推动了有关数论问题的研究.

另一方面,前苏联数学家 Buchstab 在 20 世纪 40 年代左右创造的组合方法,使布朗筛法更加精密化,从而证明了(5,5),(4,4)等优秀的结果.

我国数学家对筛法有重要贡献.王元在 20 世纪 50 年代第一个将筛法系统地介绍到国内,他把塞尔伯格筛法与 Buchstab 的方法结合起来先后证明了(3,4),(2,3),(1,4)等结果.潘承洞在改进了算术级数中的均值定理之后也证明了(1,4),他的证明不需要复杂的计算.1966 年陈景润在对筛法作了重要改进之后并运用强有力的解析方法,证明了(1,2),这一结果在国际数论界引起了强烈的反响.他后来还用他所创造的方法改进了哥德巴赫问题的上界估计[②③].

Jurkat 和 Richert 把线性筛法的结果做到了最好的程度,他们的方法原则上是王元所用方法的一种极限状态,但不需要多少计算.

Rosser 和 Horrington 合著了一本论述筛法的书,其中提出了另一种组合筛法,但这本书并没有出版.Iwaniec 注意到他的方法,并加以整理.利用这个新的方法,他证明了两个引人注目的结果:

(1) 有无穷多个正整数 n 使 n^2+1 有至多二个素因子[④];

---

① 原载数学进展,第 13 卷,第 2 期,1984 年 4 月.

② 陈景润.On the Goldbach's problem and the sieve methods, Sci.Sin.,21(1978),701-739.

③ 潘承彪.偶数表为二个素数之和的表法个数的上界估计,中国科学,1980,7,628-636;Sci.Sin.,23(11),1368-1377.

④ Iwaniec,H.. Almost-primes represented by quadratic poloynomials, Invent.math.,47(1978),171-188

(2) 任给 $v > 0.55$, x 充分大时，在区间 $(x, x+x^{\theta})$ 中必有素数①. 但 Iwaniec 本人和其他一些学者都指出，他的方法实际上是受到陈景润的一篇讨论短区间殆素数的分布的文章②的影响和启发而得到的.

从上面的简单叙述可以看出筛法的发展和数学上其他重大课题一样，是众多数学家承前启后不断努力的结果. 本文正是为了这个目的，向有兴趣的读者介绍 Rosser 和 Iwaniec 的线性组合筛法.

H. Halberstam 和 H. E. Richert 合著的《Sieve Methods》一书对筛法有详尽的论述，并附有十分丰富的参考文献目录. 本文只附一些近年的文献，并且由于条件限制不可能搜集得十分完善.

潘承洞和潘承彪合著的《哥德巴赫猜想》一书对与筛法有关的分析方法有详细介绍，参考文献目录也十分丰富.

本文主要取材于上述两本书和本桥洋一教授 1980 年来华讲学的部分内容.

5.2 组合筛法的一般方法

5.2.1 筛法的基本问题

设 $\mathscr{P}$ 是由互不相同的素数组成的集合，设 $z \geqslant w \geqslant 2$. 命

$$P(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in \mathscr{P}}} p, \quad P(w,z) = \prod_{\substack{w\leqslant p<z \\ p\in \mathscr{P}}} p$$

设 $\mathscr{A}$ 是由有限多个不同的整数组成之集. 命

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A} \\ (a,P(z))=1}} 1$$

它代表 $\mathscr{A}$ 中不被 $\mathscr{P}$ 中小于 z 的素数所整除的元素的个数，称为筛函数，筛法的基本问题就是估计筛函数的上界和下界.

筛函数有两个十分重要而又很明显的性质：

(1) $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \geqslant 0$;

(2) $S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)$ 是 z 的减函数.

例 设 $\mathscr{P}$ 为全体素数，N 为大偶数，命 $\mathscr{A} = \{N-p \mid p < N(p\text{ 为素数})\}$. 则筛函数 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{1/\alpha})$ 就等于小于 N 并使 $N-p$ 的素因子都不小于 $N^{1/\alpha}$ 的素数 p 的个数. 很显然如果证明了对充分大的偶数 N 和给定正整数 $k(k \geqslant z)$，都有 $S(\mathscr{A};\mathscr{P},N^{\frac{1}{k}}) > 0$，就证明了命题 $(1, k-1)$. 这说明筛法的研究在数论中有

① Heath-Brown, Iwaniec, H.. On the difference between consecutive primes, Invent. math., 55(1979), 49-69.

② 陈景润. On the distribution of almost primes in an interval(II), Sci. Sin., 22(1979), 253-275.

重要意义.

下面引进几个筛法中常用的记号.

设 d 是正整数,命

$$\mathscr{A}_d = \{a \mid a \in \mathscr{A}, d \mid a\}$$

$$\mathscr{P}_d = \{p \mid p \in \mathscr{P}, p \nmid d\}$$

$$P_d(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathscr{P}_d}} p, P_d(w,z) = \prod_{\substack{w\leqslant p<z \\ p\in\mathscr{P}_d}} p$$

设 μ 是一个有限集,常用 $|\mu|$ 表 μ 中元素的个数.

在筛法中一般要求在 $d \mid P(\infty)$ 时有渐近公式

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\rho(d)}{d}X + R_d \qquad ①$$

这里 X 是只与 $\mathscr{A}$ 有关的常数,$\rho(d)$ 是非负积性函数.又设 $z \geqslant 2$,命

$$W(z) = \prod_{\substack{p<z \\ p\in\mathscr{P}}}\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right) = \prod_{p \mid P(z)}\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)$$

设 n 是正整数,定义 $p(1) = \infty$,$p(n)$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 的最小素因子.

上面的记号以后要经常使用,不再一一说明.

利用 Möbius 函数可以得到

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{a\in\mathscr{A}}\sum_{d\mid(a,P(z))}\mu(d) = \sum_{d\mid P(z)}\mu(d)\,|\mathscr{A}_d| \qquad ②$$

这就是 Eratosthenes 的筛法公式.将 ① 代入 ② 得

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = XW(z) + \sum_{d\mid P(z)}\mu(d)R_d \qquad ③$$

这虽然是筛函数的一个表达式,但它并没有什么用处.因为 ③ 右端第二项包含的项数非常多,只有当 z(常要 $z \ll \log\log X$)非常小时,这个和式才比第一个式小.而前面举的例子说明要 z(通常要有 $X^{\alpha} \ll z$)相当大才有用.此外还要注意,只当 z 比之 X 很小时,③ 中的 $XW(z)$ 才是筛函数的近似值,而当 z 不是很小时就不是这样.

例如,命 $\mathscr{P}$ 是全体素数,x 为充分大实数,命 $\mathscr{A} = \{n \mid 1 \leqslant n \leqslant x\}$,显然有

$$\pi(x) = \pi(\sqrt{x}) + S(\mathscr{A};\mathscr{P},\sqrt{x})$$

由于 $|\mathscr{A}_d| = \frac{x}{d} + R_d(-1 < R_d < 1)$,故由 ③ 知

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},\sqrt{x}) = x\prod_{p<x^{1/2}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \sum_{d\mid P(\sqrt{x})}\mu(d)R_d$$

由 Mertens 公式可知

$$\prod_{p<x^{1/2}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{2e^{-\gamma}}{\log x}, x \to \infty, \gamma \text{ 为欧拉常数}$$

而由素数定理可知

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},\sqrt{x}) \sim \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

因此并不能有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},\sqrt{x}) \sim xW(\sqrt{x})$$

5.2.2 组合筛法中的重要等式

引理 1 (Buchstab) 设 $z \geqslant w \geqslant 2$,则有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = S(\mathscr{A};\mathscr{P},w) - \sum_{p \mid P(w,z)} S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p) \tag{④}$$

$$W(z) = W(w) - \sum_{p \mid P(w,z)} \frac{\rho(p)}{p} w(p) \tag{⑤}$$

证明 由定义可知

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},w) - S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{p \mid P(w,z)} \sum_{\substack{a \in \mathscr{A} \\ p(a) = p}} 1 = \sum_{p \mid P(w,z)} S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p)$$

此即 ④. 又

$$W(z) - W(w) = \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d \nmid P(w)}} \mu(d) \frac{\rho(d)}{d} = \sum_{p \mid P(w,z)} \sum_{d \mid P(p)} \mu(pd) \frac{\rho(pd)}{pd} =$$

$$- \sum_{p \mid P(w,z)} \frac{\rho(p)}{p} \sum_{d \mid P(p)} \mu(d) \frac{\rho(d)}{d} = - \sum_{p \mid P(w,z)} \frac{\rho(p)}{p} w(p)$$

此即 ⑤. 引理证完.

在引理 1 中取 $w = 2$,即得下述的:

推论

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = |\mathscr{A}| - \sum_{p \mid P(z)} S(\mathscr{A}_p;\mathscr{P},p) \tag{⑥}$$

$$W(z) = 1 - \sum_{p \mid P(z)} \frac{\rho(p)}{p} W(p) \tag{⑦}$$

引理 2 任给实值函数 $\chi(n)$,使 $\chi(1) = 1$. 则对任给的正整数 r 有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ \omega(d) < r}} \mu(d)\chi(d) |\mathscr{A}_d| + \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ \omega(d) = r}} \mu(d)\chi(d) S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)) +$$

$$\sum_{\substack{1 < d \mid P(z) \\ \omega(d) \leqslant r}} \mu(d) \left\{ \chi\left(\frac{d}{p(d)}\right) - \chi(d) \right\} S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)) \tag{⑧}$$

$$W(z) = \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ \omega(d) < r}} \mu(d)\chi(d) \frac{\rho(d)}{d} + \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ \omega(d) = r}} \mu(d)\chi(d) \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) +$$

$$\sum_{\substack{1 < d \mid P(z) \\ \omega(d) \leqslant r}} \mu(d) \left\{ \chi\left(\frac{d}{p(d)}\right) - \chi(d) \right\} \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) \tag{⑨}$$

证明 先证 ⑧. 对 r 用归纳法. $r = 1$ 即是 ⑥. 在 ⑥ 中用 $\mathscr{A}_d$ 代 $\mathscr{A}$, $p(d)$

代 z 就得到

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ \omega(d)=r}}\mu(d)\chi(d)|\mathscr{A}_d| - \sum_{\substack{d|P(z)\\ \omega(d)=r}}\mu(d)\chi(d)S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)) =$$

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ \omega(d)=r}}\mu(d)\chi(d)\sum_{p|P(p(d))}S(\mathscr{A}_{pd};\mathscr{P},p) =$$

$$-\sum_{\substack{d|P(z)\\ \omega(d)=r+1}}\mu(d)\chi\left(\frac{d}{p(d)}\right)S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d))$$

代入 ⑧ 即得到 $r+1$ 的情况.

同样,用数学归纳法类似可证 ⑨.

在引理 2 中取 $r=\infty$ 即得到下述的引理 3.

引理 3

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{d|p(z)}\mu(d)\chi(d)|\mathscr{A}_d| +$$

$$\sum_{1<d|P(z)}\mu(d)\left\{\chi\left(\frac{d}{p(d)}\right)-\chi(d)\right\}S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)) \qquad ⑩$$

$$W(z) = \sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi(d)\frac{\rho(d)}{d} +$$

$$\sum_{1<d|P(z)}\mu(d)\left\{\chi\left(\frac{d}{p(d)}\right)-\chi(d)\right\}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d)) \qquad ⑪$$

引理 4 设 $z \geqslant w \geqslant 2$,则有

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) = \sum_{d|P(w,z)}\mu(d)\chi(d)S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},w) +$$

$$\sum_{1<d|P(w,z)}\mu(d)\left\{\chi\left(\frac{d}{p(d)}\right)-\chi(d)\right\}S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d)) \qquad ⑫$$

证明 在引理 3 中用 $\bar{A} = \{a \mid a \in \mathscr{A},(a,p(w))=1\}$ 代替 $\mathscr{A}$,即得引理 4.

Eratosthenes 筛法由 ② 出发,而组合筛法由 ⑩ 出发.如果我们能找到两个数论函数 $\chi_1(n)$ 和 $\chi_2(n)$ 使 $\chi_1(1)=\chi_2(1)=1$,并对任何满足 $1<d \mid p(z)$ 的 d 都有

$$(-1)^v\left\{\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)-\chi_v(d)\right\} \geqslant 0, v=1,2 \qquad ⑬$$

我们就能得到

$$(-1)^v S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) \geqslant (-1)^v\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)|\mathscr{A}_d| \qquad ⑭$$

这时再将 ① 代入 ⑭,就得到不等式

$$(-1)^v\left\{S(\mathscr{A};\mathscr{P},z) - X\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}\right\} \geqslant$$

$$(-1)^v\sum_{d|P(z)}\mu(d)\chi_v(d)R_d \qquad ⑮$$

显然应该取许多 $\chi_v(d)=0$，这样 ⑮ 右端第二个和式的项数就不很多. 又从 ⑩ 看，要得到较好的结果必须取 $\chi_v(d)$ 使 ⑩ 右端第二项尽可能小，这可通过对较大的筛函数 $S(\mathscr{A}_d;\mathscr{P},p(d))$ 取 $\chi(d)=\chi\left(\frac{d}{p(d)}\right)$ 来实现. 而组合筛法的中心问题正是构造适合上述要求的数论函数 $\chi(d)$.

5.3 预备知识

在使用筛法的时候，常对 $\rho(d)$ 有下述要求：

(1) 存在绝对常数 $A>1$，使对素数 p 都有

$$0\leqslant\frac{\rho(p)}{p}<1-\frac{1}{A} \qquad ⑯$$

(2) 存在正常数 A,k,L 使对任何 $v\geqslant u\geqslant 2$ 都有

$$-L<\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p}\log p-k\log\frac{v}{u}<A \qquad ⑰$$

这里及以后，A 均表绝对常数，但彼此不一定相同. L 则可能和 X 有关，常比 X 小得多. (2) 中的 k 是一个很重要的常数，它代表 $\rho(p)$ 的平均值，通常称为筛法的"维数". $k=1$ 时，常称为线性筛法，我们就主要讨论这种情形.

1. Abel 求和法及其有关的应用

引理 5 (Abel 求和法) 设 $0<u<v$，$f(t)$ 在 $[u,v]$ 上有连续导数. 命

$$A(t)=\sum_{u\leqslant n<t}a(n)$$

则我们有

$$\sum_{u\leqslant n<v}a(n)f(n)=A(v)f(v)-\int_u^v A(t)f'(t)\mathrm{d}t \qquad ⑱$$

证明 设 l 是大于等于 u 的最小正整数，m 是小于等于 v 的最大正整数. 如 $m<l$，则 ⑱ 两端都等于零. 如果 $m\geqslant l$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{u\leqslant n<v}a(n)f(n)=&\sum_{n=l}^{m}(A(n+1)-A(n))f(n)=\\&A(m+1)f(m)+\sum_{n=l+1}^{m}A(n)(f(n-1)-f(n))=\\&A(v)f(m)-\sum_{n=l+1}^{m}A(n)\int_{n-1}^{n}f'(t)\mathrm{d}t=\\&A(v)f(m)-\int_l^m A(t)f'(t)\mathrm{d}t=\\&A(v)f(v)-\int_u^v A(t)f'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

即得引理. Abel 求和法又称分部求和法，在数论的各种求和中经常使用.

引理 6 如 ⑪ 成立，则对 $2\leqslant u<v$ 有

$$-\frac{L}{\log u} < \sum_{p\mid P(u,v)} \frac{\rho(p)}{p} - k\log\frac{\log v}{\log u} < \frac{A}{\log u} \qquad ⑲$$

证明　由引理 5 及 ⑰ 可知

$$\sum_{p\mid P(u,v)} \frac{\rho(p)}{p} = \frac{1}{\log v}\sum_{p\mid P(u,v)} \frac{\rho(p)}{p}\log p + \int_u^v \sum_{p\mid P(u,v)} \frac{\rho(p)}{p}\log p\,\frac{\mathrm{d}t}{t\log^2 t} <$$

$$\frac{A}{\log v} + \frac{k}{\log v}\log\frac{v}{u} + \int_u^v \frac{k(\log t - \log u)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t =$$

$$t\log\frac{\log v}{\log u} + \frac{A}{\log u}$$

此即 ⑲ 右边不等式.左边不等式类似可证.

引理 7　若 ⑯,⑰ 成立,则有

$$\frac{\log^k v}{\log^k u}\left(1 + O\left(\frac{L}{\log u}\right)\right) < \prod_{p\mid P(u,v)}\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1} < \frac{\log^k v}{\log^k u}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log u}\right)\right) \qquad ⑳$$

证明　由 ⑯ 和引理 6 可知

$$\log\prod_{p\mid P(u,v)}\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1} = \sum_{p\mid P(u,v)} \frac{\rho(p)}{p} + \sum_{p\mid P(u,v)}\left(\frac{\rho(p)}{p}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho(p)}{p}\right)^{n-2} <$$

$$k\log\frac{\log v}{\log u} + \frac{A}{\log u} + A\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho^2(p)}{p^2} \qquad ㉑$$

在 ⑰ 中取 $u = p, v = p + \delta(1 > \delta > 0)$ 可知 $\frac{\rho(p)}{p}\log p < A$,故

$$\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho^2(p)}{p^2} < A\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p\log p}$$

类似引理 6 可证

$$\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p\log p} \leqslant \frac{k}{\log u} - \frac{k}{\log v} + \frac{A}{\log^2 u} \qquad ㉒$$

由此及 ㉑ 即得

$$\log\prod_{p\mid P(u,v)}\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1} < k\log\frac{\log v}{\log u} + O\left(\frac{1}{\log u}\right)$$

此即 ⑳ 右边不等式.

又由 ⑯ 和引理 6

$$\log\prod_{p\mid P(u,v)}\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)^{-1} \geqslant \sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p} > k\frac{\log v}{\log u} - \frac{L}{\log u}$$

此即 ⑳ 左边不等式.证毕.

引理 8　若 ⑯,⑰ 成立,则当 $z \geqslant 2$ 时

$$W(z) = c(\rho)\frac{e^{-k\gamma}}{\log^k z}\left(1 + O\left(\frac{L}{\log z}\right)\right) \qquad ㉓$$

此处对 $p \in \mathscr{P}$,定义 $\rho(p) = 0$ 及

$$c(\rho) = \prod_p\left(1 - \frac{\rho(p)}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} \qquad ㉔$$

证明　由引理 7 及 Mertens 定理可知对 $z > w > 2$ 有

$$\prod_{w\leqslant p<z}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k}=1+O\left(\frac{L}{\log w}\right)$$

由于 ㉔ 右端每个因子都是正数，故无穷乘积收敛到正数 $c(\rho)$. 又利用 Mertens 定理可得

$$W(z)=c(\rho)\prod_{p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k}\prod_{p>z}\left(1-\frac{\rho(p)}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-k}=$$
$$c(\rho)\frac{\mathrm{e}^{-k r}}{\log^{k}z}\left(1+O\left(\frac{L}{\log z}\right)\right)$$

即得引理.

引理 9　设 ⑯,⑰ 成立. 又设 $\psi(t)$ 当 $t\geqslant 1$ 时为单调非负并有连续导数，则对 $x\geqslant v^{2}$ 及 $z\geqslant v\geqslant u\geqslant 2$ 有

$$\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p}W(p)\psi\left(\frac{\log x/p}{\log p}\right)=kW(z)\frac{\log^{k}z}{\log^{k}x}\int_{\log x/\log v}^{\log x/\log u}\psi(t-1)t^{k-1}\mathrm{d}t+$$
$$O\left(LM\frac{W(z)\log^{k}z}{\log^{k+1}u}\right) \qquad ㉕$$

这里 M 是 $\psi\left(\frac{\log x/\xi}{\log \xi}\right)$ 在 $u\leqslant\xi\leqslant v$ 中的最大值.

证明　命 $D(t)=\frac{1}{W(z)}\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p}W(p)$，由 ⑳ 及引理 7 可知

$$D(t)=\frac{W(u)}{W(z)}-\frac{W(t)}{W(z)}=\frac{\log^{k}z}{\log^{k}u}-\frac{\log^{k}z}{\log^{k}t}+O\left(\frac{L\log^{k}z}{\log^{k+1}u}\right)$$

又由 $\psi(t)$ 的性质可知，在 $u\leqslant t\leqslant v$ 中，函数 $\eta(t)=\psi\left(\frac{\log x/t}{\log t}\right)$ 为非负单调并有连续导数. 用分部求和法可得

$$\sum_{p\mid P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)}\psi\left(\frac{\log x/p}{\log p}\right)=D(v)\eta(v)-\int_{u}^{v}D(t)\eta'(t)\mathrm{d}t=$$
$$k\int_{\log x/\log v}^{\log x/\log u}\psi(s-1)s^{k-1}\frac{\mathrm{d}s}{\log^{k}x}+O\left(\frac{LM\log^{k}z}{\log^{k+1}u}\right)$$

即得 ㉕，引理证完.

2. 函数 $\phi_v(u)(v=0,1)$

设连续函数 $\phi_0(u)$ 和 $\phi_1(u)$ 适合方程

$$\begin{cases}\phi_0(u)=0,\ u\phi_1(u)=2\mathrm{e}^{r},0<u\leqslant 2\\ (u\phi_0(u))'=\phi_1(u-1),(u\phi_1(u))'=\phi_0(u-1),u>2\end{cases} \qquad ㉖$$

容易证明，除 $\phi_0(u)$ 在 $u=2$ 以外，两个函数在 $u>0$ 都有连续导数.

由 ㉖ 容易算出

$$u\phi_1(u)=2\phi_1(2)+\int_{2}^{u}\phi_0(t-1)\mathrm{d}t=2\mathrm{e}^{r},2\leqslant u\leqslant 3$$

$$u\phi_0(u) = 2\phi_0(2) + \int_2^u \phi_1(t-1)\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{r}\log(u-1), 2 \leqslant u \leqslant 4 \qquad ㉗$$

连续使用上述方法可以求出 $\phi_0(u)$ 和 $\phi_1(u)$ 在任意点的值. 本节主要研究当 $u \to \infty$ 时 $\phi_0(u)$ 和 $\phi_1(u)$ 的渐近性状.

命 $G(u) = \phi_1(u) + \phi_0(u), g(u) = \phi_1(u) - \phi_0(u)$. 容易验证 $G(u)$ 和 $g(u)$ 适合方程

$$uG(u) = ug(u) = 2\mathrm{e}^{r}, u \leqslant 2 \qquad ㉘$$

$$(uG(u))' = G(u-1), (ug(u))' = -g(u-1), u > 2$$

引理 10 $g(u)$ 为正值减函数, 且 $g(u) = O(\Gamma^{-1}(u))$.

证明 由 ㉘ 可知当 $u > 2$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{u-1}^{u} tg(t)\mathrm{d}t = ug(u) - (u-1)g(u-1) = (u(u-1)g(u))'$$

故必有常数 c 使

$$\int_{u-1}^{u} tg(t)\mathrm{d}t = u(u-1)g(u) + c, u > 2$$

命 $u \to 2$, 则由连续性可知 $c = 0$. 即有

$$\int_{u-1}^{u} tg(t)\mathrm{d}t = u(u-1)g(u) \qquad ㉙$$

显然当 $0 < u \leqslant 3$ 时 $g(u) > 0$. 若 $g(u)$ 有零点, 则必有最小零点, 设为 $u_0(u_0 > 3)$. 由 ㉙ 可知

$$0 = u_0(u_0 - 1)g(u_0) = \int_{u_0-1}^{u_0} tg(t)\mathrm{d}t$$

因 $u_0 > 3$, 故在 $(u_0 - 1, u_0)$ 中 $tg(t) > 0$, 上式为不可能, 故 $g(u)$ 没有零点, 由连续性可知 $g(u) > 0 (u > 0)$.

又由 ㉙ 可知当 $u > 2$ 时

$$g'(u) = -\frac{1}{u}(g(u) + g(u-1)) < 0$$

而当 $0 < u \leqslant 2$ 时, 由定义可知 $g'(u) < 0$. 故 $g(u)$ 为正值单调减少.

最后证明当 $u > 1$ 时

$$g(u) < \frac{2\mathrm{e}^{r}}{\Gamma(u)} \qquad ㉚$$

当 $1 < u \leqslant 2$ 时由 $\Gamma(u) < 1 < u$ 及 $g(u)$ 的定义即得证. 设 $n < u \leqslant n + 1$, 对 n 用数学归纳法.

由 ㉙ 及 $g(u)$ 的递减性可知

$$u(u-1)g(u) = \int_{u-1}^{u} tg(t)\mathrm{d}t < ug(u-1) < u\frac{2\mathrm{e}^{r}}{\Gamma(u-1)}$$

故

$$g(u) < \frac{2e^{\gamma}}{\Gamma(u)}$$

即得 ㉚. 引理证完.

引理 11 $\phi_1(u)$ 为正值减函数, $\phi_0(u)$ 为正值增函数, 并有 $\phi_1(u) > \phi_0(u)$.

证明 由 $g(u)$ 恒正可知 $\phi_1(u) > \phi_0(u)$.

由 ㉗ 可知, 当 $0 < u \leqslant 3$ 时 $\phi_1(u)$ 为正值减函数. 若 u_0 是 $\phi'_1(u)$ 的最小零点, 则显然 $u_0 > 3$, 并在 $(0, u_0)$ 中, $\phi_1(u) < 0$. 故必有 u_1, u_2 满足 $2 < u_{0-1} < u_1 < u_0$ 及 $u_1 - 1 < u_2 < u_1$ 使

$$0 = u_0\phi'_1(u_0) = \phi_0(u_0 - 1) - \phi_1(u_0) < \phi_0(u_0 - 1) - \phi_0(u_0) =$$

$$-\phi'_0(u_1) = -\frac{1}{u_1}(\phi_1(u_1 - 1) - \phi_0(u_1)) <$$

$$\frac{1}{u_1}(\phi_1(u_1) - \phi_1(u_1 - 1)) = \frac{1}{u_1}\phi'_1(u_2) < 0$$

此乃矛盾, 故 $\phi'_1(u)$ 无零点, 由连续性 $\phi'_1(u) < 0$. 故 $\phi_1(u)$ 为单调减少. 又当 $u > 2$ 时

$$u\phi'_0(u) = \phi_1(u - 1) - \phi_0(u) > \phi_1(u - 1) - \phi_1(u) > 0$$

故 $\phi'_0(u) > 0$. 故 $\phi_0(u)$ 为正值递增. 引理证完.

引理 12 $G'(u) = O(\Gamma^{-1}(u))$.

证明 用数学归纳法证明当 $u \geqslant n \geqslant 2$ 时

$$|G'(u)| < \frac{4e^{\gamma}}{\Gamma(n + 1)} \quad ㉛$$

当 $n = 2$ 时, 由引理 11 可知

$$|G'(u)| = \frac{1}{u}|G(u - 1) - G(u)| < \frac{1}{2} \times 2\phi_1(2) = \frac{4e^{\gamma}}{\Gamma(3)}, u \geqslant 2$$

又由微分中值定理知

$$|G'(u)| = \frac{1}{u}|G(u - 1) - G(u)| = \frac{1}{u}|G'(u_1)|, u - 1 < u_1 < u$$

因为 $u \geqslant n$ 及 $|G'(u_1)| < \frac{4e^{\gamma}}{P(n)}$, 立刻得到 ㉛. 取 $n = [u]$ 立刻得到引理.

引理 13 $G(u) = 2 + O(\Gamma^{-1}(u))$.

证明 由引理 11 可知 $\lim\limits_{u \to \infty} G(u) = G(\infty)$ 存在. 又由引理 12 可知

$$G(u) = G(\infty) - \int_u^{\infty} G'(t)\mathrm{d}t = G(\infty) + O(\Gamma^{-1}(u))$$

以下证明 $G(\infty) = 2$. 设

$$y(u) = \int_t^{\infty} e^{-us}G(s)\mathrm{d}s, u > 0 \quad ㉜$$

容易证明 ㉜ 右端可在积分号下求导数，于是

$$y'(u) = -\int_1^{\infty} e^{-us} SG(s)ds = -\int_1^2 2e^r e^{-us}ds - \int_2^{\infty} SG(s)e^{-us}ds = -\frac{e^{-u}}{u}(2e^r + y(u))$$

利用分离变量法解上述微分方程得

$$\log(2e^r + y(u)) = -\int_1^u \frac{e^{-t}}{t}dt + c, u > 0 \quad ㉝$$

因为 $G(s)$ 是有界量，故

$$|y(u)| \ll \int_1^{\infty} e^{-us}ds = \frac{e^{-u}}{u} \to 0, u \to \infty$$

利用熟知的积分

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t}dt - \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = r$$

定出 ㉝ 中的常数 c 最后得到

$$y(u) = \frac{2}{u}\exp\left(-\int_0^u \frac{e^{-t} - 1}{t}dt\right) - 2e^r$$

因此

$$\lim_{u \to 0+} uy(u) = 2 \quad ㉞$$

又

$$y(u) = \int_1^{\infty} e^{-us}G(s)ds = 2e^r \frac{e^{r-u}}{u} + \frac{1}{u}\int_1^{\infty} e^{-us}G'(s)ds, u > 0$$

即

$$uy(u) = 2e^r e^{-u} + \int_1^{\infty} e^{-us}G'(s)ds, u > 0 \quad ㉟$$

容易验证 ㉟ 右端积分在 $u \geqslant 0$ 为一致收敛，故

$$2 = \lim_{u \to 0^+} uy(u) = 2e^r + \int_1^{\infty} G'(s)ds = G(\infty)$$

即得引理.

由引理 11 和引理 13 立刻可以推出引理 14.

引理 14 $\phi_v(u) = 1 + O(\Gamma^{-1}(u))(v = 0,1)$.

5.4 组合筛法实例——Rosser 筛法

本章介绍 Rosser 筛法. 这里介绍的方法是本桥洋一给出的.

设 $y > 0, \beta \geqslant 2$ 是两实数. $v = 1,2$, 定义 $\chi_v(1) = 1$. 对 $d > 1, u(d) \neq 0$, 命 $d = p_1 \cdots p_r (p_1 > \cdots > p_r)$, 定义

$$\chi_v(d) = \begin{cases} 1, 如\ p_{2l-v}^{\beta+1} p_{2l-v-1} \cdots p_1 < y, 1 \leqslant 2l - v \leqslant r \\ 0, 其他 \end{cases} \quad ㊱$$

我们来验证这样定义的 $\chi_v(d)$ 适合 ⑬.

显然，若 $d>1, \chi_v(d)=1$，则必 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)=1$. 因此若 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)-\chi_v(d)\neq 0$，则必 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)=1, \chi_v(d)=0$.

设 $d=p_1\cdots p_r(p_1>\cdots>p_r), \chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)=1, \chi_v(d)=0$. 则对任意适合 $1\leqslant 2l-v\leqslant r-1$ 的正整数 l，有 $p_{2l-v}^{\beta+1}p_{2l-v-1}\cdots p_1<y$，而且还有适合 $1\leqslant 2m-v\leqslant r$ 的正整数 m 使 $p_{2m-v}^{\beta+1}p_{2m-v-1}\cdots p_1\geqslant y$. 因此只能有 $2m-v=r$. 即 $\omega(d)\equiv v(\bmod 2)$. 即 ⑬ 恒成立. 还要注意，这时 $p_r^{\beta+1}p_{r-1}\cdots p_1=p(d)^{\beta}d\geqslant y$.

按 ㊱ 定义 $\chi_v(d)$，就得到 Rosser 筛法.

引理 15 设 $z<y^{\frac{1}{2}}$，$\chi_v(d)$ 按 ㊱ 定义，若 $d\mid P(z)$，$\chi_v(d)=1$，则我们有

$$\log d<\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{\omega(d)}{2}}\right)\log y \tag{㊲}$$

证明 设 $\omega(d)=2m+1-v$. 如 $m=0$，则 $d=1$，㊲ 显然成立，以下设 $m\geqslant 1$.

命 $d=p_1\cdots p_{2m+1-v}(p_1>\cdots>p_{2m+1-v})$，则

$$p_{2l+1-v}p_{2l-v}<p_{2l-v}^2<\left(\frac{y}{p_1\cdots p_{2l-1-v}}\right)^{\frac{2}{\beta+1}}, 1\leqslant l\leqslant m$$

即有

$$\frac{y}{p_1\cdots p_{2l+1-v}}>\left(\frac{y}{p_1\cdots p_{2l-1-v}}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta+1}}, 1\leqslant l\leqslant m$$

于是

$$\log\frac{y}{d}>\frac{\beta-1}{\beta+1}\log\frac{y}{p_1\cdots p_{2m-1-v}}>\cdots>\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{m-1}\log\frac{y}{p_1}(v=2)\\ \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{m}\log y(v=1)\end{matrix}\right\}>\frac{1}{2}\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{\omega(d)}{2}}\log y$$

这里用到 $\beta\geqslant 2$ 及 $p_1<z<y^{\frac{1}{2}}$. 此即 ㊲.

又 $\omega(d)=2m-v$ 的情况和上面类似可证.

定理 1 设 $2\leqslant z\leqslant y^{\frac{1}{2}}$，$u=\frac{\log y}{\log z}$，$\rho(n)$ 满足 ⑯ 和 ⑰，$(q,P(z))=1$. 则必有 $\xi_v(d)(v=1,2)$ 满足 $\xi_v(1)=1$，$|\xi_v(d)|\leqslant 1$，$\xi_v(d)=0(d\geqslant y)$，使

$$(-1)^v\left\{s(\mathscr{A}_q;\mathscr{P},z)-XW(z)\frac{\rho(q)}{q}(1+O(\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}\log u}))\right\}\geqslant$$

$$(-1)^v \sum_{\substack{d|p(z)\\ d<y}} \xi_v(d) R_{qd} \tag{38}$$

证明 取 $\xi_v(d) = \mu(d)\chi_v(d)$，这里 $\chi_v(d)$ 由 ㊱ 定义．显然这样定义的 $\xi_v(d)$ 满足定理的要求．由 ⑩ 知

$$(-1)^v \{S(\mathscr{A}_q;\mathscr{P},z) - \sum_{d|p(z)} \mu(d)\chi_v(d) \mid \mathscr{A}_{qd} \mid\} \geqslant 0$$

将 $\mid \mathscr{A}_{qd} \mid$ 的渐近公式代入上式得

$$(-1)^v \left\{s(\mathscr{A}_q;\mathscr{P},z) - X\frac{\rho(q)}{q}\sum_{d|p(z)} \mu(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}\right\} \geqslant$$
$$(-1)^v \sum_{\substack{d|p(z)\\ d<y}} \xi_v(d) R_{qd} \tag{33}$$

又由 ⑪ 可知

$$\sum_{d|p(z)} u(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d} = W(z) -$$
$$\sum_{1<d|p(z)} u(d)\left\{\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right) - \chi_v(d)\right\}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d)) \tag{40}$$

前面已经指出，要 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right) - \chi_v(d) = 1$，必须 $\omega(d) = 2m - v$ 及 $p(d)^\beta d \geqslant y$．因 $d \mid P(z)$，故 $z^{\beta+\omega(d)} \geqslant y$，即 $2m - v \geqslant u - p, m \geqslant \frac{u-\beta+1}{2}$．所以我们有

$$\sum = \left|\sum_{1<d|p(z)} \mu(d)\left\{\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right) - \chi_v(d)\right\}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\right| \leqslant$$
$$\sum_{m\geqslant\frac{1}{2}(u+1-\beta)} \sum_{\substack{d|P(z)\\ \omega(d)=2m-v\\ \chi_v(d)=0}} \chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)\frac{\rho(d)}{d}W(p(d)) \ll$$
$$W(z)\sum_{m\geqslant\frac{1}{2}(u+1-\beta)} \sum_{\substack{d|P(z)\\ \omega(d)=2m-v\\ \chi_v(d)=0}} \chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)\frac{\rho(d)}{d}\left(\frac{\log z}{\log p(d)}\right)^k \tag{41}$$

这里用到 ⑳，又由引理 15 可知，若 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right) = 1$，则必

$$\log\frac{d}{p(d)} < \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^m\right)\log y$$

又因为当 $\chi_v(d) = 0$ 时，$p(d)^\beta d \geqslant y$，综合上式知此时有

$$\log p(d) > \frac{1}{3\beta}\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^m \log y$$

因此由 ㊶ 可知

$$\sum \ll W(z)\sum_{m\geqslant\frac{1}{2}(u+1-\beta)} \sum_{\substack{d|p(z)\\ \omega(d)=2m-v\\ p(d)\geqslant y^{\alpha(m)}}} \frac{\rho(d)}{d}\left(\frac{\log z}{\log p(d)}\right)^k \leqslant$$

$$W(z)\sum_{m\geqslant\frac{1}{2}(u+1-\beta)}\left(\frac{\log z}{\log y^{\alpha(m)}}\right)^k\frac{1}{(2m-v)!}\left(\sum_{y^{\alpha(m)}\leqslant p<z}\frac{\rho(p)}{p}\right)^{2m-v}\ll$$

$$W(z)\left(\frac{\beta}{u}\right)^k\sum_{m\geqslant\frac{1}{2}(u+1-\beta)}\frac{1}{(2m-v)!}\left(k\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^k\log\frac{3\beta(\beta+1)^m}{u(\beta-1)^m}\right)^{2m-v}$$

其中 $\alpha(m)=\frac{1}{3\beta}\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^m$,在上面我们还用到 ⑲.

当 u 小于某常数 B 时,取 $\beta=10k+1$,容易验证 ㊶ 右端的无穷级数为收敛的.于是有

$$\sum\ll W(z)e^{-\frac{B}{2}\log B}\ll W(z)e^{-\frac{u}{2}\log u} \qquad ㊷$$

当 u 充分大时,取 $\beta=\frac{u}{3}+1$,由 ㊶ 可知

$$\sum\ll W(z)\sum_{m\geqslant\frac{u}{3}}\frac{1}{(2m-v)!}\left(c_m\log\frac{u+6}{u}\right)^{2m-v}\ll$$

$$W(z)\sum_{m\geqslant\frac{u}{3}}\left(\frac{6c}{u}\cdot\frac{e^m}{2m-v}\right)^{2m-v}W(z)\ll$$

$$\left(\frac{c_1}{u}\right)^{\frac{2u}{3}-3}W(z)\ll W(z)\exp\left(-\frac{u}{2}\log u\right) \qquad ㊸$$

式中的 c,c_1 均是绝对常数.

由 ㊴,㊵,㊷,㊸ 诸式可知 ㊳ 成立.定理证毕.

组合筛法的另一个例子是 Brun 筛法.用 Brun 筛法也能得到定理 1 的类似结果,但余项的形式有所不同.Brun 筛法的讨论比较烦.这里不作介绍,有兴趣的读者可参阅《Sieve Methods》一书的有关章节.

由前面的讨论可以看到,虽然我们对 $\chi_v(d)$ 的取法几乎没有什么限制,但为了得到实际的结果,却又不得不给 $\chi_v(d)$ 加上十分苛刻的条件,究竟 $\chi_v(d)$ 可以不可以取成更好的形式?这还不知道.

5.5 Jurkat-Richert-Rosser 定理

本节只讨论线性筛法,即假定 ⑯ 和 ⑰ 的 k 等于 1.本节将证明一个和线性筛法中的 Jurkat-Richert 定理形式上几乎完全一样的定理,不过是用 Rosser 筛法得到的.这个证明是由本桥洋一给出的,比 Iwaniec 原来的证明简明一些.

设 $\phi_0(u)$ 和 $\phi_1(u)$ 满足 ㉖.命

$$\phi_r(u)=\begin{cases}\phi_0(u),r\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\\ \phi_1(u),r\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\end{cases} \qquad ㊹$$

引理 16 设 $2\leqslant u\leqslant v\leqslant y^{\frac{1}{2}},\beta=2,\chi_v(d)(v=1,2)$ 由 ㊱ 定义.则对任

意正整数 r 都有

$$W(v)\phi_v\left(\frac{\log \gamma}{\log v}\right) = W(u)\sum_{\substack{d\mid P(u,v)\\ \omega(d)<r}}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}\phi_{v+\omega(d)}\left(\frac{\log \gamma/d}{\log u}\right) + \sum_{\substack{d\mid P(u,v)\\ \omega(d)=r}}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\phi_{v+r}\left(\frac{\log \gamma/d}{\log p(d)}\right) + O\left(LW(v)\frac{\log^2 v}{\log^3 u}\right) \quad ㊺$$

其中与“O”号有关的常数与 r 无关.

证明　先证

$$W(v)\phi_v\left(\frac{\log \gamma}{\log v}\right) = W(u)\sum_{\substack{d\mid P(u,v)\\ \omega(d)<r}}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}\phi_{v+\omega(d)}\left(\frac{\log \gamma/d}{\log u}\right) + \sum_{\substack{d\mid P(u,v)\\ \omega(d)=r}}(-1)^r\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\phi_{v+r}\left(\frac{\log \gamma/d}{\log p(d)}\right) + O\left(\frac{L}{\log^2 u}\right)\left(W(v)\log v + \sum_{\substack{\omega(d)<r\\ 1<d\mid P(u,v)}}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\log p(d)\right) \quad ㊻$$

在引理 9 中取 $\psi(t) = \phi_{v+1}(t), x = \gamma, z = v$,即得到

$$\sum_{p\mid P(u,v)}W(p)\frac{\rho(p)}{p}\phi_{v+1}\left(\frac{\log \gamma/p}{\log p}\right) = W(v)\frac{\log v}{\log \gamma}\int_{\log \gamma/\log v}^{\log \gamma/\log u}\phi_{v+1}(t-1)\mathrm{d}t + O\left(LM(v)\frac{\log v}{\log^2 u}\right) = W(u)\phi_v\left(\frac{\log \gamma}{\log u}\right) - W(v)\phi_v\left(\frac{\log \gamma}{\log v}\right) + O\left(LW(v)\frac{\log v}{\log^2 u}\right) \quad ㊼$$

由定义知 $\chi_2(p) = 1$; 又若 $\chi_1(p) = 0$, 则 $p^3 \geqslant \gamma$, 此时 $\frac{\log \gamma/p}{\log p} \leqslant 2$, 故 $\phi_0\left(\left(\frac{\log \gamma/p}{\log p}\right)\right) = 0$. 因此恒有

$$\sum_{p\mid P(u,v)}W(p)\frac{\rho(p)}{p}\phi_{v+1}\left(\frac{\log \gamma/p}{\log p}\right) = \sum_{p\mid P(u,v)}W(p)\frac{\rho(p)}{p}\chi_v(p)\phi_{v+1}\left(\frac{\log \gamma/p}{\log p}\right) \quad ㊽$$

代入 ㊼ 就得到 ㊻ 当 $r = 1$ 的情况.

将 ㊼ 中的 $v+1$ 换成 $v+r$,将 v 换成 $p(d)$ 代入 ㊻,就得到

$$W(v)\phi_v\left(\frac{\log \gamma}{\log v}\right) = W(u)\sum_{\substack{d\mid P(u,v)\\ \omega(d)\leqslant r}}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}\phi_{v+\omega(d)}\left(\frac{\log \gamma/d}{\log u}\right) + \sum_{\substack{d\mid P(u,v)\\ \omega(d)=r}}(-1)^{r+1}\sum_{p\mid P(u,p(d))}\frac{\rho(pd)}{pd}\chi_v(d)\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log \gamma/pd}{\log p}\right) + O\left(\frac{L}{\log^2 u}\right)\left(W(v)\log v + \sum_{\substack{d\mid P(u,v)\\ \omega(d)\leqslant r}}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\log p(d)\right) \quad ㊾$$

而

$$\sum_{\substack{d|P(u,v)p|P(u,p(d))\\ \omega(d)=r}}\sum\frac{\rho(pd)}{pd}\chi_v(d)\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/pd}{\log p}\right)=$$

$$\sum_{\substack{d|P(u,v)\\ \omega(d)=r+1}}\frac{\rho(d)}{d}\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right) \quad ⑩$$

当 $\omega(d)=r+1\equiv v+1(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,由定义可知 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)=\chi_v(d)$,且如 $\chi_v(d)=1$,则必 $p(d)d<y$,此时 $\log y/d>\log p(d)$,故

$$0<\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)=\phi_1\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)<\phi_1(1)=2e^r$$

当 $\omega(d)=r+1\equiv v(\mathrm{mod}\ 2)$ 时,如 $\chi_v(d)=1$,则 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)=1$;如 $\chi_v(d)=0$ 而 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right)=1$, 则必 $p(d)^2d\geqslant y$, 此时 $\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)=\phi_0\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)=0$.

综上所述,⑩ 右端即等于

$$\sum_{\substack{d|P(u,v)\\ \omega(d)=r+1}}\frac{\rho(d)}{d}\chi_v(d)\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right) \quad ⑪$$

综合 ⑲,⑩,⑪,并由数学归纳法可知 ㊻ 成立.又对任意正整数 r 有

$$\sum_{\substack{\omega(d)<r\\ 1<d|P(u,v)}}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\log p(d)\ll W(v)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{\omega(d)=j\\ d|P(u,v)}}\frac{\rho(d)}{d}\log v\ll$$

$$W(v)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\sum_{p|P(u,v)}\frac{\rho(p)}{p}\right)^j\log v\ll$$

$$W(v)\frac{\log^2 v}{\log u} \quad ⑫$$

由 ⑫ 和 ㊻ 即得 ㊺.引理证完.

在引理 16 中取 $r=\infty$,就得到引理 2.

引理 17 在引理 16 的条件下有

$$W(v)\phi_v\left(\frac{\log y}{\log v}\right)=W(u)\sum_{p|P(u,v)}\mu(d)\chi_v(d)\frac{\rho(d)}{d}\phi_{v+\omega(d)}\left(\frac{\log y/d}{\log u}\right)+$$

$$O\left(LW(v)\frac{\log^2 v}{\log^3 u}\right) \quad ⑬$$

引理 18 设 $2\leqslant u\leqslant v\leqslant x^{\frac{1}{2}}$,则

$$\sum=\sum_{\substack{p_1p_2|P(u,v)\\ p_2<p_1,p_2^3p_1<x}}\frac{\rho(p_1p_2)}{p_1p_2}W(p_2)\exp\left(-\frac{\log x/p_1p_2}{\log p_2}\right)\leqslant$$

$$\eta W(v)\exp\left(-\frac{\log x}{\log v}\right)\left(1+O\left(\frac{L\log v}{\log^2 u}\right)\right)^2 \quad ⑭$$

这里
$$\eta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\log 3\right)<0.72$$

证明 分两种情况证明.

(1) 当 $v\leqslant x^{\frac{1}{4}}$ 时，由 $p_1p_2\mid P(u,v)$ 可知 $p^3p_1<x$ 恒成立. 利用引理 9 可得

$$\sum=\sum_{\substack{p_1p_2\mid P(u,v)\\ p_2<p_1}}\frac{\rho(p_1p_2)}{p_1p_2}W(p_2)\exp\left(-\frac{\log x/p_1p_2}{\log p_2}\right)\leqslant$$

$$\frac{e}{3}\sum_{p_1\mid P(u,v)}\frac{\rho(p_1)}{p_1}W(p_1)\exp\left(-\frac{\log x/p_1}{\log p_1}\right)\left(1+O\left(\frac{L\log v}{\log^2 u}\right)\right)\leqslant$$

$$\frac{e^2}{12}W(v)\exp\left(-\frac{\log x}{\log v}\right)\left(1+O\left(\frac{L\log v}{\log^2 u}\right)\right)^2 \quad ⑮$$

(2) 若 $x^{\frac{1}{4}}\leqslant v<x^{\frac{1}{2}}$. 把 $\sum$ 分成两部分

$$\sum=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2$$

这里 $\sum_1$ 过 $p_1<x^{\frac{1}{4}}$ 求和，$\sum_2$ 过 $x^{\frac{1}{4}}\leqslant p_1<v$ 求和. 同 ㊹ 的证明一样有

$$\sum\nolimits_1\leqslant\frac{e}{3}\sum_{p_1\mid P(u,x^{\frac{1}{4}})}\frac{\rho(p_1)}{p_1}W(p_1)\exp\left(-\frac{\log x/p_1}{\log p_1}\right)\left(1+O\left(L\frac{\log v}{\log^2 u}\right)\right)\leqslant$$

$$\frac{e^{-2}}{3}W(v)\frac{\log v}{\log x}\left(1+O\left(L\frac{\log v}{\log x}\right)\right)^2 \quad ⑯$$

又由引理 9 可知

$$\sum\nolimits_2\leqslant\sum_{p_1\mid P(x^{\frac{1}{4}},v)}\sum_{p_2\mid P(u,(x,p_1)^{\frac{1}{3}})}\frac{\rho(p_1p_2)}{p_1p_2}W(p_2)\exp\left(-\frac{\log x/p_1p_2}{\log p_2}\right)\leqslant$$

$$e^{-2}\sum_{p_1\mid P(x^{\frac{1}{4}},v)}\frac{\rho(p_1)}{p_1}W(p_1)\frac{\log p_1}{\log x/p_1}\left(1+O\left(\frac{L\log v}{\log^2 u}\right)\right)=$$

$$e^{-2}W(v)\frac{\log v}{\log x}\log\frac{3}{\frac{\log x}{\log v}-1}\left(1+O\left(\frac{L\log v}{\log^2 u}\right)\right)^2 \quad ⑰$$

由 ⑯,⑰ 可知

$$\sum=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2\leqslant\Delta\left(\frac{\log x}{\log v}\right)W(v)\exp\left(-\frac{\log x}{\log v}\right)\left(1+O\left(\frac{L\log v}{\log^2 u}\right)\right)^2 \quad ⑱$$

这里

$$\Delta(\xi)=\left(\frac{1}{3}+\log\frac{3}{\xi-1}\right)\frac{e^{\xi-2}}{\xi}$$

当 $x^{\frac{1}{4}} \leqslant v \leqslant x^{\frac{1}{2}}$ 时,$2 \leqslant \frac{\log x}{\log v} \leqslant 4$,容易验证

$$\Delta'(\xi) = \frac{\xi - 1}{\xi^2} e^{\xi-2} \Delta_0(\xi)$$

这里

$$\Delta_0(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{\xi}{(\xi - 1)^2} + \log \frac{3}{\xi - 1}$$

易知

$$\max_{2 \leqslant \xi \leqslant 4} \Delta_0(\xi) = \Delta_0(3) = -0.011\ 2\cdots$$

故在[2,4]上 $\Delta_0(\xi) < 0$,即 $\Delta'(\xi) < 0$.因此

$$\max_{2 \leqslant \xi \leqslant 4} \Delta(\xi) = \Delta(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \log 3\right) = \eta \tag{59}$$

由于 $\frac{e^2}{12} < \eta$,故由 ㊺,㊽,㊾ 即得引理.

定理 2 (Jurkat-Richert-Rosser) 设 $z < y^{\frac{1}{2}}$,$L < \log^{0.05} y$,则对任何 $(q, P(z)) = 1$ 都有

$$(-1)^v \left\{ S(\mathscr{A}_q; \mathscr{P}, z) - \frac{\rho(q)}{q} XW(z)\left(\phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}\right) + O\left(\frac{L}{\log^{\frac{1}{14}} y}\right)\right)\right\} \geqslant - \sum_{\substack{d \mid P(z) \\ d < y}} | R_{qd} | \tag{60}$$

证明 若 $\log z < \frac{\log y}{(\log \log y)^2}$,则由定理 1 和引理 6 即可得证.

设 $\log z \geqslant \frac{\log y}{(\log \log y)^2}$.命 $\beta = 2$,$\chi_v(d)(v = 1,2)$ 按 ㊱ 定义.则由引理 4 可知,当 $2 \leqslant w \leqslant z$ 时

$$(-1)^v S(\mathscr{A}_q; \mathscr{P}, z) \geqslant (-1)^v \sum_{d \mid P(w, z)} \mu(d) \chi_v(d) S(\mathscr{A}_{qd}; \mathscr{P}, w) \tag{61}$$

将 ㊸ 两端乘以 $(-1)^v X \frac{\rho(q)}{q}$ 与 ㉑ 相减就得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^v \left\{ S(\mathscr{A}_q; \mathscr{P}, z) - \frac{\rho(q)}{q} XW(z) \phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}\right)\right\} \geqslant \\
&(-1)^v \sum_{d \mid P(w, z)} \mu(d) \chi_v(d) \left\{ S(\mathscr{A}_{qd}; \mathscr{P}, w) - \frac{\rho(qd)}{qd} XW(w)\right\} + \\
&(-1)^v \sum_{d \mid P(w, z)} \mu(d) \chi_v(d) \frac{\rho(qd)}{qd} XW(w)\left(1 - \psi_{v+w(d)}\left(\frac{\log y/d}{\log w}\right)\right) + \\
&O\left(LXW(z) \frac{\rho(q)}{q} \cdot \frac{\log^2 z}{\log^3 w}\right)
\end{aligned} \tag{62}$$

分别记 ㊷ 右端两个和式为 $\sum_1$ 与 $\sum_2$.

由定理 1 可知

$$|\sum\nolimits_1| \leqslant \sum_{d|P(w,z)} \chi_v(d) \sum_{\substack{d_1|P(w)\\ d_1<y/d}} |R_{qdd_1}| +$$

$$O\left(\frac{\rho(q)}{q} XW(w) \sum_{d|P(w,z)} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log w}\right)\right) \qquad ⑬$$

将⑬右端"O"项中的和式按 $\omega(d) \leqslant 2l$ 和 $\omega(d) > 2l$ 分成两个和式 $\sum_{11}$ 和 $\sum_{12}$. 这里 l 为适合

$$3^{l-1} \leqslant \frac{\log^{0.3} y}{(\log\log y)^2} < 3^l \qquad ⑭$$

的正整数. 取 $\log w = \log^{0.7} y$.

由引理 15 知, 当 $d \mid P(w,z), \chi_v(d) = 1, \omega(d) \leqslant 2l$ 时

$$\log\frac{y}{d} > \frac{1}{2} 3^{-\frac{\omega(d)}{2}} \log y \geqslant \frac{3^{-l}}{2} \log y \geqslant \frac{1}{6} \log^{0.7} y (\log\log y)^2$$

故此时有

$$\sum\nolimits_{11} \leqslant W(w) \exp\left(-\frac{1}{6}(\log\log y)^2\right) \sum_{d|P(w,z)} \frac{\rho(d)}{d} \ll$$

$$\frac{W(z)}{\log^2 y} \frac{W(w)}{W(z)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{p|P(w,z)} \frac{\rho(p)}{p}\right)^m \ll W(z) \log^{-2} y \qquad ⑮$$

容易验证, 当 $0 < x < a$ 时, $\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{a}{x}\right)$ 是 x 的增函数. 又由于当 $1 < d \mid P(w,z), \chi_v(d) = 1$ 时 $p(d)d < y$, 所以 $\log w \leqslant \log p(d) < \log y/d$, 因此这时

$$\frac{1}{\log w} \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log w}\right) \leqslant \frac{1}{\log p(d)} \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)$$

即是有

$$\frac{W(w)}{W(p(d))} \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log w}\right) \ll \frac{W(p(d))}{W(w)} \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log w}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)$$

因此

$$\sum\nolimits_{12} \ll \sum_{\substack{d|P(w,z)\\ \omega(d)>2l}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right) \qquad ⑯$$

又当 $\omega(d) = 2m + v + 1$ 及 $\chi_v(d) = 1$ 时 $\chi_v\left(\frac{d}{p(d)}\right) = 1$. 而当 $\omega(d) = 2m + v$ 及 $\chi_v(d) = 1$ 时, $p(d)^2 d < y$. 因此由引理 9 知

$$\sum_{\substack{d|P(w,z)\\ \omega(d)=2m+v+1}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right) =$$

$$\sum_{\substack{d|P(w,z)\\ \omega(d)=2m+v}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} \sum_{p|P(w,p(d))} \frac{\rho(p)}{p} W(p) \exp\left(-\frac{\log y/pd}{\log p}\right) =$$

$$\sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d)=2m+v}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d}\left\{W(p(d)) \frac{\log p(d)}{\log y/d} \int_{\frac{\log y/d}{\log p(d)}}^{\frac{\log y/d}{\log w}} e^{1-t} \mathrm{d}t + O\left(L \frac{W(p(d)) \log p(d)}{\log^2 w}\right)\right\} \leqslant$$

$$\frac{e}{2} \sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d)=2m+v}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)\left(1 + O\frac{L\log z}{\log^2 w}\right)$$

因此

$$\sum\nolimits_{12} \ll \sum_{m \geqslant l-1} \sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d)=2m+v}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) \mathrm{e}^{-\frac{\log y/d}{\log p(d)}}\left(1 + O\left(\frac{L\log z}{\log^2 w}\right)\right) \quad ⑯'$$

由 $\chi_v(d)$ 的定义及引理 18 可知上式的内和等于

$$\sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d)=2m-2+v}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} \sum_{\substack{p_1 p_2 \mid P(w, p(d)) \\ p_2 < p_1, p_2^3 p_1 < y/d}} \frac{\rho(p_1 p_2)}{p_1 p_2} W(p_2) \exp\left(-\frac{\log y/p_1 p_2 d}{\log p_2}\right) \leqslant$$

$$\eta\left(1 + O\left(L \frac{\log z}{\log^2 w}\right)\right)^2 \sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d)=2m-2+v}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right) \cdots \leqslant$$

$$\eta^m\left(1 + O\left(L \frac{\log z}{\log^2 w}\right)\right)^{2m} \sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d)=v}} \chi_v(d) \frac{\rho(d)}{d} W(p(d)) \exp\left(-\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right) \quad ⑰$$

再用引理 5 并注意到 $\chi_v(d)$ 的定义容易证明 ⑰ 右端的和式远远小于 $W(z)$，即

$$\sum\nolimits_{12} \ll W(z) \sum_{m \geqslant l-1} \eta^m\left(1 + O\left(L \frac{\log z}{\log^2 w}\right)\right)^{2m} \ll$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{l-1} W(z) \ll W(z) \log^{-\frac{1}{14}} y \quad ⑱$$

由 $\phi_v(u)$ 的渐近性质可知 $\sum_2$ 可以并人 ⑬ 右端的"O"项中去. 因此综合 ⑫,⑬,⑮ 及 ⑱ 即得到定理.

用定理 2 估计筛函数，必须估计 ⑩ 右边的余项之和. 这通常要涉及精深的解析方法.

利用 Jurkat-Richert-Kosser 定理很容易证明(1,4)，如果用一般的加权筛法(例如王元、潘承洞在证明(1,4) 时用过的权) 很容易证明(1,3)，用陈景润的权则能证明(1,2). 以上这些证明都要用到"算术级数中素数分布的均值定理". 所有这些都已收集在《哥德巴赫猜想》一书中.

5.6 Iwaniec 筛法

Iwaniec 改进 Rosser 的方法，成功地应用于素数分布的某些问题. 本节介绍他的方法，写法主要根据本桥的证明，这要比 Iwaniec 原来的写法要简明一些. 本章也只讨论线性筛法.

设 $z \geqslant w \geqslant 2$，将区间 $I_0 = [w, z)$ 分成有限多个互不相交的小区间 I（带脚标或不带脚标）. 即有 $I_0 = \bigcup I$. 用 K（带或不带脚标）表示某些互不相同的 I 的直积.

用(I) 表示 I 的右端点，$I_1 \leqslant I_2$ 表示$(I_1) \leqslant (I_2)$.

又设 $K = \prod\limits_{j=1}^{r} I_j (I_1 \geqslant I_2 \geqslant \cdots \geqslant I_r)$. 引进下列记号

$$(K) = \prod_{j=1}^{r} (I_j);\ \omega(K) = r;\ p(K) = I_r, I_1 \cdots I_{r-1} = \frac{K}{p(K)}$$

用 $d \in K$ 表示 $d = p_1 \cdots p_r$ 而 $p_j \in I_j (j = 1, \cdots, r)$；用 $I \leqslant K$ 表示$(I) \leqslant (I_r)$.

约定只当 $K = \varnothing$（空集）时，$1 \in K$；约定 $\omega(\varnothing) = 0$ 及对任何 I 都有 $I < \varnothing$.

以下在引用上述记号和约定时不再一一说明.

为了书写方便，假定 $\mathscr{P}$ 就是全体素数. 这不失去一般性. 在不致混淆的时候，把 $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, x)$ 记成 $S(\mathscr{A}; x)$.

引理 1 实值函数 $\chi(K)$ 定义在 $\{K\}$ 上，并满足 $\chi(\varnothing) = 1$. 则对任何正整数 r 都有

$$\begin{aligned} S(\mathscr{A}; z) = & \sum_{\omega(K) < r} (-1)^{\omega(K)} \chi(K) \sum_{d \in K} S(\mathscr{A}_d; w) + \\ & \sum_{\omega(K) = r} (-1)^r \chi(K) \sum_{d \in K} S(\mathscr{A}_d; p(d)) + \\ & \sum_{1 \leqslant \omega(K) \leqslant r} (-1)^{\omega(K)} \left\{ \chi\left(\frac{K}{p(K)}\right) - \chi(K) \right\} \sum_{d \in K} S(\mathscr{A}_d; p(d)) + \\ & \sum_{\omega(K) < r-1} \sum_{I < K} (-1)^{\omega(K)} \chi(IK) \sum_{\substack{p, p' \in I \\ p < p', d \in K}} S(\mathscr{A}_{pp'd}; p) \end{aligned} \tag{69}$$

证明 $r = 1$ 时 ⑲ 就是 Buchstab 等式.

当 $r \geqslant 2$ 时在引理 6 中将 $\mathscr{A}$ 换成 $\mathscr{A} = \{a \mid a \in \mathscr{A}, (a, P(w)) = 1\}$ 可得

$$\begin{aligned} S(\mathscr{A}; z) = & \sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d) < r}} \mu(d) \chi(d) S(\mathscr{A}_d; w) + \\ & \sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ \omega(d) = r}} \mu(d) \chi(d) S(\mathscr{A}_d; p(d)) + \\ & \sum_{\substack{d \mid P(w,z) \\ 1 \leqslant \omega(d) \leqslant r}} \mu(d) \left\{ \chi\left(\frac{d}{p(d)}\right) - \chi(d) \right\} S(\mathscr{A}_d; p(d)) \end{aligned} \tag{70}$$

定义 $\chi(d)$ 如下：如 $d \in K$，命 $\chi(d) = \chi(K)$，如 $d \bar{\in}$ 任何 K 则命 $\chi(d) = 0$，显然这时在 K 的某个因子 I 中包含有 d 的两个素因子.

这时 ⑳ 右端前两项就是 ⑲ 右端前两项.

式 ⑳ 右端第三项分成三种情形讨论：

(1)$p(d)\in I,\frac{d}{p(d)}\in K(1<K)$. 对这些 d 求和就是 ⑲ 右端第三项.

(2) $\frac{d}{p(d)}\in K$,但 $d\notin$ 任何 K,这时 d 的两个最小的素因子均在$p(K)$中. 容易看出对这些 d 求和就得到 ⑲ 右端第四项.

(3) $\frac{d}{p(d)}\notin$ 任何 K,这时 $d\notin$ 任何 K,因此这些 d 在和式中不出现.

由此可见,⑳ 右端第三项就等于 ⑲ 右端最后两项之和.

综上所述即得引理.

定义 $\chi_v(\phi)=1,v=1,2$. 对 $K=I_1\cdots I_r(I_1>\cdots>I_r)$ 定义

$$\chi_v(K)=\begin{cases}1,(I_{2l-v})^3(I_{2l-v-1}\cdots I_1)<y,1\leqslant 2l-v\leqslant r\\0,\text{其他}\end{cases}\tag{71}$$

对 $\omega(K)\geqslant 1$ 总有

$$(-1)^{\omega(K)+v}\left\{\chi_v\left(\frac{K}{p(K)}\right)-\chi_v(K)\right\}\geqslant 0\tag{72}$$

因此由引理 19 及筛函数的递减性可知

$$\begin{aligned}(-1)^vS(\mathscr{A};z)\geqslant&\sum_{\omega(K)<r}(-1)^{\omega(K)+v}\chi_v(K)\sum_{d\in K}S(\mathscr{A}_d;w)+\\&\sum_{\omega(K)=r}(-1)^{r+v}\chi_v(K)\sum_{d\in K}S(\mathscr{A}_d;p(d))-\\&\sum_{\substack{\omega(K)<r-1\\\omega(K)\equiv v+1(2)\\I<K}}\chi_v(IK)\sum_{\substack{p,p'\in I\\p<p'\\d\in K}}S(\mathscr{A}_{pp'd};w)\end{aligned}\tag{73}$$

命 $z=wz_1^J(z\leqslant z_1\leqslant w)$,这里 J 是正整数,区间 $I_j=[wz_1^{j-1},wz_1^j](1\leqslant j\leqslant J)$. 则有

引理 20 若$2\leqslant w<z\leqslant y^{\frac{1}{2}},\chi_v(K)(v=1,2)$,按 ⑪ 定义. 则对任何正整数 r 有

$$\begin{aligned}W(z)\phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}\right)=&W(w)\sum_{\omega(K)<r}(-1)^{\omega(K)}\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}\phi_{v+\omega(K)}\left(\frac{\log y/d}{\log w}\right)+\\&(-1)^r\sum_{\omega(K)=r}\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\phi_{v+r}\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right)+\\&O\left(\frac{W(z)\log z}{\log^2w}\left(\sum_{m=1}^{r}\frac{L+\log z_1}{(m-1)!}\left(\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\rho(p)}{p}\right)^{m-1}+\right.\right.\\&\left.\left.\sum_{m=1}^{r}\frac{m-1}{m!}\log z_1\left(\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\rho(p)}{p}\right)^m\right)\right)\end{aligned}\tag{74}$$

证明 此引理的证明与引理 16 的证明十分类似. 下面仅将不同之处加以说明.

首先证明 $r=1$ 时引理成立. 相应地要讨论 $\chi_1(I)=0$ 的情形,这时有

$(I)^3 \geqslant y, (I) \geqslant y^{\frac{1}{3}}$，于是对 I 中的 p 都有 $z_1 p \geqslant (I) \geqslant y^{\frac{1}{3}}$，可知

$$\frac{\log y/p}{\log p} \leqslant 2 + \frac{3\log z_1}{\log p} \leqslant 2 + \frac{3\log z_1}{\log w}$$

由 $\phi_0(u)$ 的性质可知

$$\phi_0\left(\frac{\log y/p}{\log p}\right) \leqslant \phi_0\left(2 + \frac{3\log z_1}{\log w}\right) - \phi_0(2) =$$

$$\frac{3\log z_1}{\log w}\phi_0^1(\xi) \ll \frac{\log z_1}{\log w}, 2 < \xi < 2 + \frac{3\log z_1}{\log w}$$

同引理 ⑯ 的证明相似就可以证明 $r = 1$ 的情形.

以下对 r 用数学归纳法. 相应得到

$$W(z)\phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}\right) = W(w)\sum_{\omega(K)\leqslant r}(-1)^{\omega(K)}\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}\phi_{v+\omega(d)}\left(\frac{\log y/d}{\log w}\right) +$$
$$(-1)^{r+1}\sum_{\omega(K)=r}\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}\left\{\sum_{w\leqslant p<p(d)}\frac{\rho(p)}{p}W(p)\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/pd}{\log p}\right) +\right.$$
$$\left.O\left(LW(p(d))\frac{\log p(d)}{\log^2 w}\right)\right\} + O\left(\frac{W(z)\log z}{\log^2 w}M(r)\right) \quad ⑮$$

这里

$$M(r) = \sum_{m=1}^{r}\frac{L + \log z_1}{(m-1)!}\left(\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\rho(p)}{p}\right)^{m-1} + \sum_{m=1}^{r}\frac{m-1}{m!}\log z_1\left(\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\rho(p)}{p}\right)^{m} \quad ⑯$$

⑮ 第二项记为 $\sum$，可知有

$$\sum = \sum_{\omega(K)=r+1}\chi_v\left(\frac{K}{p(K)}\right)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/d}{\log p(d)}\right) +$$
$$\sum_{\substack{\omega(K)=r-1\\ I<K}}\chi_v(IK)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}\sum_{\substack{p,p'\in I\\ p<p'}}\frac{\rho(pp')}{pp'}W(p)\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/pp'd}{\log p}\right) +$$
$$O\left(LW(z)\frac{\log z}{\log^2 w}\cdot\frac{1}{r!}\left(\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\rho(p)}{p}\right)^r\right) \quad ⑰$$

⑰ 右端第一个和的处理与引理 16 中 ⑮ 以下的处理完全一样.

下面考察 ⑰ 右端第二个和式 $\sum'$.

当 $r \equiv v \pmod 2$ 时，对 $I < K, \omega(K) = r - 1, \chi_v(IK) = 1$，必有 $(I)^3(K) < y$. 故在 $\sum'$ 的内和中 $p^2p^1d < y$，即要有 $y/pp'd > p$. 故这时

$$\phi_{v+r+1}\left(\frac{\log y/pp'd}{\log p}\right) = \phi_1\left(\frac{\log y/pp'd}{\log p}\right) < \phi_1(1) = 2e^r$$

当 $r \equiv v + 1 \pmod 2$ 时，恒有

$$\phi_{v+r+1}(u) = \phi_0(u) < \phi_0(\infty) = 1$$

因此若用 $I(d)$ 表示 $p(d)$ 所在的区间 I，则

$$\sum' = \sum_{\substack{\omega(K)=r-1\\ d\in K}}\frac{\rho(d)}{d}\sum_{I<K}\sum_{p,p'\in I}\frac{\rho(p')\rho(p)}{pp'}W(p) \ll$$

$$\sum_{\omega(d)=r}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\sum_{p\in I(d)}\frac{\rho(p)}{p}\ll$$
$$\sum_{\omega(d)=r}\frac{\rho(d)}{d}W(p(d))\log\frac{\log wz_1}{\log w}\ll$$
$$W(z)\frac{\log z\log z_1}{\log^2 w}\cdot\frac{1}{r!}\Big(\sum_{w\leqslant p<z}\frac{\rho(p)}{p}\Big)^r \qquad ⑱$$

综合 ⑮,⑯,⑰,⑱ 等式,即得到 $r+1$ 的情况.由此引理证毕.

在引理 20 中取 $r=\infty$ 即得到引理 21.

引理 21 在引理 20 的假设下

$$W(z)\phi_v\Big(\frac{\log y}{\log z}\Big)=W(w)\sum_K(-1)^{\omega(K)}\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}\phi_{v+\omega(d)}\Big(\frac{\log y/d}{\log w}\Big)+$$
$$O\Big(W(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 w}\Big(L+\log z_1\log\frac{\log z}{\log w}\Big)\Big) \qquad ⑲$$

引理 22 命$(\phi)=1$.设 $y=MN\geqslant z^2$,$\chi_v(K)=1$.则必有 $K=K_1K_2$ 使 $(K_1)<M$,$(K_2)<N$.

又如 $\chi_v(IK)=1$,$I<K$,$\omega(K)\equiv v+1(\bmod 2)$,则必有 $\chi_v(K)=1$,并有 $K=K_1K_2$ 使 $\{(K_1I)<M,(K_2I)<N\}$、$\{(K_1)(I)^2<M,(K_2)<N\}$ 和 $\{(K_1)<M,(K_2)(I)^2<N\}$ 三种情形之一成立.

证明 若 $K=\phi$,显然有 $K=\phi\phi$,$(\phi)=1\leqslant\min(M,N)$,设 $K=I_1\cdots I_r$,$(r\geqslant 1, I_1>\cdots>I_r)$.若第一个论断不成立.因为$(I_1)<z\leqslant y^{1/2}\leqslant\max(M,N)$,故 $I_1=\phi I_1$,$(I_1)<\max(M,N)$,$(\phi)=1<\min(M,N)$.设$j(j<r)$是最大整数使有 $I_1\cdots I_j=K_1K_2$ 及$(K_1)<M$,$(K_2)<N$ 者.因 $\chi_v(K)=1$,故 $(I_{j+1})^2(I_j)\cdots(I_1)<y$.即有$(K_1I_{j+1})(K_2I_{j+1})<MN$,故必有$(K_1I_{j+1})<M$ 或 $(K_2I_{j+1})<N$,此说明 $I_1\cdots I_{j+1}=K_1I_{j+1}K_2$ 而$(K_1I_{j+1})<M$,$(K_2)<N$,此与 j 的定义相矛盾.故得结论.

其次,当 $\omega(K)\equiv v+1(\bmod 2)$,$I<K$,$\chi_v(KI)=1$ 时,必有$(I)^3(K)<MN$.又显然要有 $\chi_v(K)=1$,故由前述有 $K=K_1K_2$,使$(K_1)<M$,$(K_2)<N$.如果三种情况都不成立,则可推出$(K_1)(K_2)(I)^3\geqslant MN$.此证明了第二个论断.

引理 23 如 $\chi_v(K)=1$,$d\in K$,则

$$\log\frac{y}{d}>\frac{1}{2}3^{-\frac{\omega(d)}{2}}\log y$$

证明 设 $\chi_v(d)$按(3,1)定义(其中 $\beta=2$).则对于 $\chi_v(K)=1$,$d\in K$都有 $\chi_v(d)=1$,故由引理 15 即得证.

定理 3 设 $y=MN\geqslant z^2$,$L<\dfrac{\log z}{\log\log z}$,则有

$$(-1)^{v-1}\Big(S(\mathscr{A};z)-XW(z)\Big(\phi_v\Big(\frac{\log y}{\log z}\Big)+O((\log\log z)^{-0.05})\Big)\Big)\leqslant$$

$$\log z \max_{\alpha,\beta}\Big|\sum_{\substack{m<M\\ n<N}}\alpha_m\beta_n R_{mn}\Big| \tag{80}$$

其中 α_m,β_n 为绝对值小于 1 的实数.

证明 在 ⑬ 中取 $r=\infty$,将 ⑲ 两端乘以 $(-1)^v X$ 与之相减,即得到

$$(-1)^v\Big\{S(\mathscr{A};z)-XW(z)\phi_z\Big(\frac{\log y}{\log z}\Big)\Big\}\geqslant$$
$$\sum_K(-1)^{\omega(K)+v}\chi_v(K)\sum_{d\in K}\Big\{S(\mathscr{A}_d;w)-\chi\frac{\rho(d)}{d}W(w)\phi_{\omega(K)+v}\Big(\frac{\log y/d}{\log w}\Big)\Big\}-$$
$$\sum_{\substack{l<K\\ \omega(K)\equiv v+1(2)}}\chi_v(lK)\sum_{\substack{p,p'\in l\\ p<p',d\in K}}S(\mathscr{A}_{pp'd};w)+$$
$$O\Big(W(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 w}\Big(L+\log z_1\log\frac{\log z}{\log w}\Big)\Big) \tag{81}$$

由定理 1 可知,若 $s\geqslant 2$,则有 $|\xi_v(d)|\leqslant 1$,使

$$(-1)^v\Big\{S(\mathscr{A}_q;w)-\frac{\rho(q)}{q}XW(w)(1+O(e^{-\frac{1}{2}S\log S}))\Big\}\geqslant$$
$$(-1)^v\sum_{\substack{t\mid P(w)\\ t<w^s}}\xi_v(t)R_{qt} \tag{82}$$

将 ⑫ 代入 ⑪ 即得到

$$(-1)^v\Big\{S(\mathscr{A};z)-XW(z)\phi_v\Big(\frac{\log y}{\log z}\Big)\Big\}\geqslant$$
$$\sum_K(-1)^{\omega(K)+v}\chi_v(K)\sum_{d\in K}\sum_{\substack{t\mid P(w)\\ t<w^s}}\xi_{\omega(K)+v}(t)R_{dt}-$$
$$\sum_{\substack{l<K\\ \omega(K)\equiv v+1(2)}}\chi_v(lK)\sum_{\substack{d\in K\\ p,p'\in l,p<p'}}\sum_{\substack{t\mid P(w)\\ t<w^s}}\xi_1(t)R_{pp'dt}+$$
$$O\Big(\sum_K\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}XW(w)e^{-\frac{1}{2}S\log S}\Big)+$$
$$O\Big(\sum_K\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}XW(w)\Big(1-\phi_{w(d)+v}\Big(\frac{\log y/d}{\log w}\Big)\Big)\Big)+$$
$$O\Big(\sum_{\substack{l<K\\ \omega(K)\equiv v+1(2)}}\chi_v(lK)\sum_{\substack{d\in K\\ p,p'\in l,p<p'}}XW(w)\frac{\rho(pp'd)}{pp'd}\Big)+$$
$$O\Big(XW(z)\frac{\log^2 z}{\log^3 w}\Big(L+\log z_1\log\frac{\log z}{\log w}\Big)\Big) \tag{83}$$

取 $\varepsilon=(\log\log z)^{-0.1}$, $w=z^{\varepsilon^3}$, $J=[\log\log z]=[\varepsilon^{-10}]$, $S=\varepsilon^{-1}=(\log\log z)^{0.1}$. 这时 $\log z_1<\frac{\log z}{\log\log z}$, $z_1<z^{\varepsilon^{10}}$.

我们有

$$\sum_K\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}XW(w)e^{-\frac{1}{2}S\log S}\ll\frac{XW(z)}{\log\log z} \tag{84}$$

$$XW(w)\sum_{\substack{l<K\\ \omega(K)=v+1(2)}}\chi_v(lK)\sum_{\substack{d\in K\\ p,p'\in l,p<p'}}\frac{\rho(pp'd)}{pp'd}\ll\frac{XW(z)}{(\log\log z)^{0.1}} \tag{85}$$

及

$$\sum_K\chi_v(K)\sum_{d\in K}\frac{\rho(d)}{d}XW(w)\exp\left(-\frac{\log y/d}{\log w}\right)\leqslant$$

$$\sum_{d\mid P(w,z)}\chi_v(d)XW(w)\frac{\rho(d)}{d}\exp\left(-\frac{\log y/d}{\log w}\right) \tag{86}$$

这里 $\chi_v(d)$ 按 ㊱ 定义(其中 $\beta=2$).

取 l 为满足

$$3^{l-1}\leqslant(\log\log z)^{0.2}<3^l$$

的正整数.与定理 2 的证明(㊽ ~ ㊸)相类似可证 ㊻ 右端远远小于

$$w(z)(\log\log z)^{-0.05} \tag{87}$$

又易知

$$\frac{\log^2 z}{\log^3 w}\left(L+\log z_1\log\frac{\log z}{\log w}\right)\ll(\log\log z)^{-0.05} \tag{88}$$

综合 ㊸ ~ ㊽ 即得到

$$(-1)^{v-1}\left\{S(\mathscr{A};z)-XW(z)\left(\phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}\right)+O(\log\log z)^{-0.05}\right)\right\}\leqslant$$

$$\sum_K\sum_{\substack{t\mid P(w)\\ t<w^s}}\lambda_v(K,t)\sum_{d\in K}R_{dt}+\sum_{\substack{l<K\\ \omega(K)=v+1(2)}}\sum_{\substack{t\mid P(w)\\ t<w^s}}\chi_v(lK,t)\sum_{\substack{d\in K\\ p,p'\in l\\ p<p'}}R_{pp'dt} \tag{89}$$

其中 $\lambda_v(K,t),\chi_v(lK,t)$ 皆是绝对值不超过 1 的实数.

由引理 22 可知 ㊾ 右边等于

$$\sum_K\sum_{\substack{t\mid P(w)\\ t<w^s}}\lambda_v(K,t)\sum_{\substack{d_1\in K_1\\ d_2\in K_2}}R_{d_1d_2t}+\sum_{\substack{l<K\\ \omega(K)=v+1(2)}}\sum_{\substack{t\mid P(w_s)\\ t<w^s}}\chi_v(lK,t)\sum_{\substack{d_1\in K_1,d_2\in K_2\\ p,p'\in l,p<p'}}R_{pp'd_1d_2t}\leqslant$$

$$2^{J+1}\max_{\alpha,\beta}\left|\sum_{\substack{m<Mw^s\\ m<N}}\alpha_m\beta_nR_{mn}\right| \tag{90}$$

把上面的 M 换成 MW^{-s},则由

$$\phi_v\left(\frac{\log MNW^{-s}}{\log z}\right)=\phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}-S\frac{\log w}{\log z}\right)=\phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}\right)+O(\log\log z)^{-0.2}$$

及

$$2^{J+1}<\log z$$

就得到定理.

定理 4 在定理 1 的假定下有

$$(-1)^{v-1}\left(S(\mathscr{A};z)-XW(z)\left(\phi_v\left(\frac{\log y}{\log z}\right)+O((\log\log z)^{-0.05})\right)\right)\leqslant$$

$$\sum_K\chi_v(K)\sum_{\substack{t\mid P(w)\\ t<w^s}}\xi_v(K,t)\left|\sum_{d\in K}R_{dt}\right|+$$

$$\sum_{l<K}\chi_v(lK)\sum_{\substack{t|P(w)\\ t<w^s}}\eta_v(lK,t)\Big|\sum_{\substack{d\in K\\ p,p'\in K\\ p<p'}}R_{pp'dt}\Big| \qquad ⑨①$$

其中 $\chi_v(K)$ 按⑦定义，$w=z^{\epsilon^3}$，$\epsilon=(\log\log z)^{-0.1}$，$S=(\log\log z)^{0.1}$. 而 $\xi_v(K,t)$ 与 $\eta_v(K,t)$ 均是小于 1 的非负数.

证明 由 ⑧⑨ 立刻可得.

定理 3 和定理 4 的余项形式与定理 2 不同. Heath-Brown 和 Iwaniec 利用这两个定理结合分析的方法，证明了我们在前言中提到的两个结果.

6 相邻素数差①

—— 楼世拓 姚琦

设 p_n 是第 n 个素数，本文研究相邻两素数之差 $d_n=p_n-p_{n-1}$ 的上界估计，即研究当 x 充分大，y 满足什么条件时

$$\pi(x)-\pi(x-y)>0 \qquad ①$$

当 $x>y\geqslant x^\theta$ 时，许多数学工作者研究了使式①成立的 θ 的下界. 1972 年 Huxley② 证明了 $\theta>7/12$，1979 年 Iwaniec 和 Jutila③ 证明了 $\theta>13/23$，Heath-Brown 和 Iwaniec④指出，应用注释②的方法，可以证明 $\theta>5/9$，同时他们③证明了当 $\theta>11/20$ 时式①成立. 本文证明：

定理 对于 $\theta\geqslant 35/64$ 及充分大的 $x=x(\theta)$，当 $x>y\geqslant x^\theta$ 时，下式成立

$$\pi(x)-\pi(x-y)>c_0(y/\log x) \qquad ②$$

这里 $c_0\geqslant 0.001\,9$. 因而也成立 $d_n=p_n-p_{n-1}\ll p_n^\theta$.

证明 取 $\mathscr{A}=\{n\mid x-y<n\leqslant x\}$，$y=x^\theta$，$\theta\geqslant 35/64$，$S(\mathscr{A},z)=|\{n\in\mathscr{A},(n,P(z))=1\}|$. 这里记号 $|\ |$ 表示集合中元素的个数；$P(z)=\prod_{p<z}p$，p 取遍小于 z 的素数. $\mathscr{A}_d=\{n\in\mathscr{A},d\mid n\}$. 于是有

$$\pi(x)-\pi(x-y)=S(\mathscr{A},x^{1/2})=S(\mathscr{A},z)-\sum_{z\leqslant p<z_1}S(\mathscr{A}_p,p)-$$
$$\sum_{z_1\leqslant p<z_2}S(\mathscr{A}_p,(D/p)^{1/3})+$$

---

① 原载《自然杂志》,7 卷 9 期.
② Huxley M. N., Invent. Math., 15(1972)164.
③ Iwaniec H., Jutila M., Arkiv för Matematik, 17(1979)167.
④ Heath-Brown D. R., Iwaniec H., Invent. Math., 55(1979)49.

$$\sum_{\substack{(D/p)^{1/3}\leqslant q<p\\ z_1\leqslant p<z_2}} S(\mathscr{A}_{pq},q) - \sum_{z_2\leqslant p<z_3} S(\mathscr{A}_p,p) -$$
$$\sum_{z_3\leqslant p<x^{1/2}} S(\mathscr{A}_p,(D/p)^{1/3}) + \sum_{\substack{(D/p)^{1/3}\leqslant q<p\\ z_3\leqslant p<x^{1/2}}} S(\mathscr{A}_{pq},q) =$$
$$\sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2 - \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 - \sum\nolimits_5 - \sum\nolimits_6 + \sum\nolimits_7$$

其中，$z = x^{(23-24t_0)/122}$，$z_1 = x^{(34-36t_0)/73}$，$z_2 = T^{16/5}x^{-1}$，$z_3 = T^{-6/5}x$，这里 $T = x^{1-2\eta}y^{-1}$，$t_0 = \log T/\log x$，η 是充分小的正数. 文中给出了函数 $D = D(p)$，用筛法估计 $\sum_1$ 的下界，$\sum_2$，$\sum_3$，$\sum_6$ 的上界；用加权密度筛法估计 $\sum_4$，$\sum_5$，$\sum_7$，从而得到式 ②.

塞尔伯格(Selberg, Atle, 1917—)，挪威-美国数学家. 生于挪威的朗厄松.

7 一个素数论中的初等方法

——塞尔伯格

下面我们概要描述一个初等方法，它可以用于由布朗发展的“筛法”所能处理的同样问题.

假定我们给出总数为 N 的数列 a. 命 N_Z 表示不能被小于等于 z 的素数整除的数 a 的个数①. 我们将研究寻求 N_Z 的上界估计问题.

当 $1 \leqslant v \leqslant z$ 时，我们定义整数列 λ_v 满足 $\lambda_1 = 1$ 而其他 λ_v 为任意实数，则得

$$N_Z \leqslant \sum_a \Big\{\sum_{v\mid a}\lambda_v\Big\}^2 = \sum_{v_1 v_2\leqslant z}\lambda_{v_1}\lambda_{v_2}\sum_{\frac{v_1 v_2}{\chi}\mid a} 1$$

此处 χ 表示 v_1 与 v_2 的最大公因子.

我们假定当 ρ 为一个正整数时，可以有一个能被 ρ 整除的 a 个数满足的渐近公式

$$\sum_{\rho\mid a} 1 = \frac{1}{f(\rho)}N + R_\rho$$

此处 R_ρ 表示余项. 我们进一步假定 $f(\rho)$ 是可积的，即当 ρ_1 与 ρ_2 互素时有 $f(\rho_1\rho_2) = f(\rho_1)f(\rho_2)$. 因 $\dfrac{1}{f(\rho)}$ 表示能被 ρ 整除的 a 的“概率”，所以后面的假定表示当 $(\rho_1,\rho_2) = 1$ 时，“事件” $\rho_1 \mid a$ 与“事件” $\rho_2 \mid a$ 是独立的，在这种情况下，

① 我们可以用 $a \not\equiv r_p$ 来代替 $a \not\equiv 0 \pmod p$，此处 $p \leqslant z$ 及 r_p 为仅依赖于 p 的整数.

我们有

$$\sum_{\frac{v_1v_2}{\chi}\Big|a} 1 = \frac{1}{f\left(\frac{v_1v_2}{\chi}\right)}N + R_{\frac{v_1v_2}{\chi}} = \frac{f(\chi)}{f(v_1)f(v_2)}N + R_{\frac{v_1v_2}{\chi}}$$

将这个式子代入关于 N_z 的不等式可得

$$N_z \leqslant N\sum_{v_1v_2\leqslant z}\frac{\lambda v_1}{f(v_1)}\cdot\frac{\lambda_{v_2}}{f(v_2)}f(\chi) + \sum_{v_1v_2\leqslant z}\lambda_{v_1}\lambda_{v_2}R_{\frac{v_1v_2}{\chi}}$$

记

$$Q(\lambda) = \sum_{v_1v_2\leqslant z}\frac{\lambda_{v_1}}{f(v_1)}\cdot\frac{\lambda_{v_2}}{f(v_2)}f(\chi)$$

我们将决定 $\lambda_v(2\leqslant v\leqslant z)$ 使 Q 达到极小. 当 ρ 为整数时,我们记

$$f_1(p) = \sum_{d/\rho}\mu(d)f\left(\frac{\rho}{d}\right)$$

此处 $\mu(d)$ 表示麦比乌斯函数,特别当 q 为无平方因子数时有

$$f_1(p) = f(\rho)\prod_{p/\rho}\left(1-\frac{1}{f(p)}\right)$$

由一个熟知的公式,我们得

$$f(\chi) = \sum_{\rho/x}f_1(\rho) = \sum_{\substack{\rho/v_1\\ \rho/v_2}}f_1(\rho)$$

代入表达式 Q,则得

$$Q = \sum_{\rho\leqslant z}f_1(\rho)\left\{\sum_{\substack{\rho/v\\ v\leqslant z}}\frac{\lambda_v}{f(v)}\right\}^2$$

当 $1\leqslant\rho\leqslant z$ 时,记

$$y_p = \sum_{\substack{\rho/v\\ v\leqslant z}}\frac{\lambda v}{f(v)}$$

则得

$$\frac{\lambda v}{f(v)} = \sum_{\rho\leqslant\frac{z}{v}}\mu(\rho)y_{\rho v}$$

现在我们在条件

$$\sum_{\rho\leqslant z}\mu(\rho)y_\rho = \frac{\lambda_1}{f(1)} = 1$$

之下来决定二次型

$$Q = \sum_{\rho\leqslant z}f_1(\rho)y_\rho^2$$

的极小,易知 y_p 取

$$\gamma_p = \frac{\mu(\rho)}{f_1(\rho)} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{\rho' \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho')}{f_2(\rho')}}$$

时，Q 有极小值

$$\frac{1}{\sum\limits_{\rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}}$$

对于对应的值 λ_v，当 $1 \leqslant v \leqslant z$ 时，我们有

$$\lambda_v = \frac{f(v)}{\sum\limits_{\rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}} \cdot \sum_{\rho \leqslant \frac{z}{v}} \frac{\mu(\rho)\mu(\rho v)}{f_1(\rho v)} =$$

$$\mu(v) \prod_{p/v} \left(1 - \frac{1}{f(p)}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{\rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}} \cdot \sum_{\substack{\rho \leqslant \frac{z}{v} \\ (\rho \cdot v) = 1}} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)} \qquad ②$$

将这些 λ 的值代入 ① 则得

$$N_z \leqslant \frac{N}{\sum\limits_{\rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}} + \sum_{v_1 v_2 \leqslant z} |\lambda_{v_1} \lambda_{v_2} R_{\frac{v_1 v_2}{z}}| \qquad ③$$

因此若当右端第二项不太大时，可得 N_z 的上界.

将这个方法用于数 $a = n(n+2), 1 \leqslant n \leqslant x$. 取 $z = x^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$，此处 ε 为一个充分小的正数，则得不超过 x 的孪生素数个数小于

$$\frac{10.6x}{\log^2 x}, x \geqslant x_0$$

这比用布朗方法得到的最佳上界更好.

基于同样原则，我亦发展了一个处理这个问题下界的方法. 关于这些方法的详细叙述及其在若干问题上的应用，将于以后发表.

8 表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和[①]

—— 王元

8.1 引言

V. Brun[②]最初在 1920 年证明了：

① 原载《数学学报》第 6 卷第 3 期，1956 年 9 月.

② Brun, V., de cribe d'Eratosthéne et le théorème de Goldbach, Videnskabs—selskabt: Kristiania Skrifter I, Mate.—Naturvidenskapelig Klasse. 3(1920), 1-36.

每一充分大的偶数可表为两个各不超过 9 个素数的乘积之和，简记之为(9,9).

后来，不少数学家改进与简化了 Brun 方法，因此，Brun 的结果也得到相应的改进，现在将其发展历史写于下：

(9,9)　(Brun 1920),

(7,7)　(Rademacher 1924)①

(6,6)　(Estermann 1932)②

(5,7),(4,9),(3,15),(2,366)(Ricci 1937)③

(5,5)　(Бухштаб 1938)④

(4,4)　(Бухштаб 1940)⑤

华罗庚教授指出用 Selberg⑥方法结合 Brun-Бухщтаб 方法可以改进上述结果，本文目的在于根据这一指示将上述结果改进为(3,4)，即

定理 1　每一充分大的偶数可表为一个不超过 3 个素数的乘积及一个不超过 4 个素数的乘积之和.

定理 2　存在无限多个整数 n，n 为不超过 3 个素数的乘积，而 $n+2$ 为不超过 4 个素数的乘积.

本文所用之 $p,p',p'',\cdots;p_1,p_2,\cdots$ 均表示素数.

用本文的方法证明(3,3)的可能性看来是存在的，但得涉及冗长而复杂的数值计算.

8.2　若干计算

引理 1　若 $x\geqslant 1,N\geqslant 1,\Omega(n)$ 表示 n 的不同的素因子的个数，则

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\(n,x)=1}}\frac{|\mu(n)|2^{\Omega(n)}}{n}=\frac{1}{2}\prod_{p\mid x}\frac{p}{p+2}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\left(1+\frac{2}{p}\right)\log^2 N+O(\log 2N\cdot\log\log 3xN)+O((\log\log 3x)^2)$$

此处 $\mu(n)$ 表示熟知的 Mobius 函数.

证明见相关文献⑦.

---

① Rademacher, H., Beitrage zur Viggo Brunshen Methode in der Zahlen—Theorie, Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.3(1924).12-30.

② Estermann,T., Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunschen Methode,J.Reine Angew. Math.168(1932),106-116.

③ Ricci,G.,Su la congettura di Goldbach e la constante di schnirelmann, Annali della R.Scuola Normale Superiore di pisa(2)6(1937),70-115.

④ Бухщтаб,А.А.,Новые улурщения в методе эратосфенова рещщта,матем.сб;4(1938),375-387.

⑤ Бухщтаб,А.А.,О разлохенни чётных чныел на ыумму двух олагаемых с ограниченным чиолом мнохнтелей,ДАН СССР;29(1940),544-548.

⑥ Selberg, A.,On an elementary method in the theory of primes, Norske Vid. Selsk. Forbdl.19 No.18(1947),64-67.

⑦ Shapiro,H.N.and Warga,J., On representation of large integers as sum of primes, part I.cOMM. Pure Appl. Math.,3(1950),286-292.

引理 2 命 $g(1)=1; g(2)=\frac{1}{2}; g(p)=\frac{2}{p}(p>2)$;当 n 无平方因子时,$g(n)=\prod_{p\mid n} g(p)$.则当 $z\geqslant 1$ 时

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\ 2\nmid N}} |\mu(n)| g(n)\prod_{p\mid n}(1-g(p))^{-1}=$$

$$\frac{1}{8}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2 z+O(\log 2z\cdot\log\log 3z)$$

证明 命 $\psi(q)=\prod_{p\mid q}(p-2)$,则

$$\sum_{\substack{2\leqslant z\\ z\nmid n}} |\mu(n)| g(n)\prod_{p\mid n}(1-g(p))^{-1}=\sum_{\substack{2\nmid n\\ n\leqslant z}} |\mu(n)|\frac{2^{\Omega(n)}}{n}\prod_{p\mid n}\frac{p}{p-2}=$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant z\\ 2\nmid n}} |\mu(n)|\frac{2^{\Omega(n)}}{n}\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{2}{p-2}\right)=$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant z\\ 2\nmid n}} |\mu(n)|\frac{2^{\Omega(n)}}{n}\sum_{r\mid n}\frac{2^{\Omega(r)}}{\psi(r)}=$$

$$\sum_{\substack{r\leqslant z\\ 2\nmid n}} |\mu(r)|\frac{2^{2\Omega(r)}}{\psi(r)r}\sum_{\substack{s\leqslant z/r\\ (s,2r)=1}}\frac{|\mu(s)|2^{\Omega(s)}}{s}=$$

$$\sum_{\substack{r\leqslant z\\ 2\nmid r}} |\mu(r)|\frac{2^{2\Omega(r)}}{\psi(r)r}\left(\frac{1}{2}\prod_{p}\frac{(p-1)^2(p+2)}{p^3}\prod_{p\mid 2r}\frac{p}{p+2}\cdot\right.$$

$$\left.\log^2\frac{z}{r}+O(\log 2z\cdot\log\log 3z)\right)=$$

$$\frac{1}{4}\prod_{p}\frac{(p-1)^2(p+2)}{p^3}\log^2 z\cdot\sum_{\substack{r\leqslant z\\ 2\nmid r}}\frac{4^{\Omega(r)}|\mu(r)|}{\prod_{p\mid r}(p^2-4)}+$$

$$O\left(\log 2z\cdot\sum_{\substack{r\leqslant z\\ 2\nmid r}}\frac{4^{\Omega(r)}|\mu(r)|\log r}{\prod_{p\mid r}(p^2-4)}\right)+O(\log 2z\cdot\log\log 3z)=$$

$$\frac{1}{8}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\cdot\log^2 z+O(\log 2z\cdot\log\log 3z)$$

引理 3 当 n 无平方因子时,命

$$f(n)=\sum_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{g\left(\frac{n}{d}\right)}=\frac{1}{g(n)}\prod_{p\mid n}(1-g(p))$$

则当 $z\geqslant 1$ 时,有

$$\sum_{n\leqslant z}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2 z+O(\log 2z\cdot\log\log 3z)$$

证明 $\sum_{n\leqslant z}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant z\\ 2\nmid n}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}+\sum_{\substack{n\leqslant z\\ 2\mid n}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=$

$$\sum_{\substack{n\le z\\2\nmid n}}|\mu(n)|g(n)\prod_{p\mid n}(1-g(p))^{-1}+\frac{1}{f(2)}\times$$
$$\sum_{\substack{n\le z/2\\2\nmid n}}|\mu(n)|g(n)\prod_{p\mid n}(1-g(p))^{-1}=$$
$$\frac{1}{8}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2 z+\frac{1}{8f(2)}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2\frac{z}{2}+$$
$$O(\log 2z\cdot\log\log 3z)=$$
$$\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2 z+O(\log 2z\cdot\log\log 3z)$$

引理 4 若 α 和 β 是固定两数, $2<\alpha<\beta$, 则

$$\sum_{x^{1/\beta}<p\le x^{1/\alpha}}\frac{1}{p\log^2\frac{x}{p}}=\frac{1}{\log^2 x}\left(\log\frac{\beta-1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\beta-1}\right)+O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right)$$

证明见相关文献①②.

8.3

给出一组数列

$$(w)a=0\text{ 或 }1,0\le a_i,b_i<p_i,a_i\ne b_i,1\le i\le r$$

此处 $3=p_1<p_2<\cdots<p_r\le\xi$ 为不超过 ξ 的全部奇素数.

命 $P_w(x,\xi)$ 为适合下面条件的整数 n 的个数

$$n\le x,n\equiv a(\bmod 2),n\not\equiv a_i(\bmod p_i)$$
$$n\not\equiv b_i(\bmod p_i),1\le i\le r \qquad ①$$

由孙子定理可知下面的联立同余式

$$\begin{cases}y\equiv 1+a(\bmod 2)\\y\equiv a_i(\bmod p_i),1\le i\le r\end{cases},\begin{cases}y\equiv 1+a(\bmod 2)\\y\equiv b_i(\bmod p_i),1\le i\le r\end{cases}$$

在区间 $0\le y<2p_1\cdots p_r$ 内均有唯一的解, 命其分别为 a^*,b^*.

现在来证明适合式 ① 的整数 n 的个数与适合下式的整数个数相同

$$n\le x,(n-a^*)(n-b^*)\not\equiv 0(\bmod p_i),1\le i\le r$$
$$(n-a^*)(n-b^*)\not\equiv 0(\bmod 2) \qquad ②$$

实际上, 当 n 适合式 ①, 则

$$(n-a^*)(n-b^*)\equiv(n-a_i)(n-b_i)\not\equiv 0(\bmod p_i),1\le i\le r$$
$$(n-a^*)(n-b^*)\equiv(a-1-a)^2\equiv 1(\bmod 2)$$

故 n 亦适合式 ②.

---

① Бухштаб, А.А., Новые улучшения в методе эратосфснова решета, матем.сб;4(1938),375-387.
② Бухштаб,А.А., Асимптотическая оцснка одной общей тсоретико-числовой Функции, матсм.сб; 2(1937),1239-1245.

反之,若 n 适合式②,则

$$(n-a_i)(n-b_i)\equiv(n-a^*)(n-b^*)\not\equiv 0(\bmod p_i),1\leqslant i\leqslant r$$

即

$$n\not\equiv a_i(\bmod p_i),n\not\equiv b_i(\bmod p_i),1\leqslant i\leqslant r$$

又

$$(n-1-a)^2\equiv(n-a^*)(n-b^*)\not\equiv 0(\bmod 2)$$

故 $n\not\equiv 1+a(\bmod 2)$,即 $n\equiv a(\bmod 2)$.因此 n 又适合式①.

定理 A　命 $c>0;P=\prod\limits_{p\leqslant\xi}p$.则对于任何给予的整数列$(w)$皆有

$$P_w(x,\xi)\leqslant\frac{x}{\sum\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant\xi\\ k\mid P}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}}+O\Big(\sum_{\substack{1\leqslant k_1,k_2\leqslant\xi\\ k_1\mid P\\ k_2\mid P}}|\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}|2^{\Omega(k_1)}2^{\Omega(k_2)}\Big)$$

此处 $g(1)=1;g(2)=\frac{1}{2};g(p)=\frac{2}{p}(p>2)$;当 n 无平方因子时 $g(n)=\prod\limits_{p\mid n}g(p);f(n)=\sum\limits_{d\mid n}\frac{\mu(d)}{g\left(\frac{n}{d}\right)}$;及

$$\lambda_n=\frac{\mu(n)}{g(n)f(n)}\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant\xi/n\\ (n,m)=1\\ m\mid P}}\frac{\mu^2(m)}{f(m)}\Big/\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant\xi\\ l\mid P}}\frac{\mu^2(l)}{f(l)}$$

证明　当 $k\mid P$ 时

$$\sum_{\substack{k\mid(n-a^*)(n-b^*)\\ n\leqslant x}}1=2^{\Omega(k)-\Omega((k,2))}\left[\frac{x}{k}\right]+O(2^{\Omega(k)})=$$

$$\frac{2^{\Omega(k)-\Omega((k,2))}}{k}x+O(2^{\Omega(k)})=g(k)x+O(2^{\Omega(k)})$$

由于满足条件①与条件②的整数个数相同,以及 $\lambda_1=1,\lambda_d=0(d>\xi^c)$,故

$$\begin{aligned}P_w(x,\xi)&=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ ((n-a^*)(n-b^*),P)=1}}1=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid((n-a^*)(n-b^*),P)}\mu(d)\leqslant\\ &\sum_{n\leqslant x}\Big(\sum_{d\mid((n-a^*)(n-b^*),P)}\lambda_d\Big)^2=\\ &\sum_{\substack{d_1\leqslant P\\ d_1\leqslant\xi}}\sum_{\substack{d_2\mid P\\ d_2\leqslant\xi}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{\substack{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\mid(n-a^*)(n-b^*)\\ n\leqslant x}}1=\\ &x\sum_{\substack{d_1\mid P\\ d_1\leqslant\xi}}\sum_{\substack{d_2\mid P\\ d_2\leqslant\xi}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}g\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)+\end{aligned}$$

$$O\Big(\sum_{\substack{d_1 \mid P \\ d_1 \leqslant \xi}} \sum_{\substack{d_2 \mid P \\ d_2 \leqslant \xi}} \mid \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \mid 2^{\Omega(d_1)+\Omega(d_2)}\Big) = xQ + R$$

当 n 无平方因子时

$$\frac{1}{g(n)} = \sum_{\tau \mid n} \frac{1}{g(\tau)} \sum_{d \mid n/\tau} \mu(d) = \sum_{d\tau \mid n} \frac{\mu(d)}{g(\tau)} = \sum_{k \mid n} \sum_{d \mid k} \frac{\mu(d)}{g\left(\frac{k}{d}\right)} = \sum_{k \mid n} f(k)$$

故

$$Q = \sum_{\substack{1 \leqslant d_1 \leqslant \xi \\ d_1 \mid P}} \sum_{\substack{1 \leqslant d_2 \leqslant \xi \\ d_2 \mid P}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \frac{g(d_1) g(d_2)}{g((d_1, d_2))} =$$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant d_1 \leqslant \xi \\ d_1 \mid P}} \sum_{\substack{1 \leqslant d_2 \leqslant \xi \\ d_2 \mid P}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} g(d_1) g(d_2) \sum_{d \mid (d_1, d_2)} f(d) =$$

$$\sum_{\substack{1 \leqslant d \leqslant \xi \\ d \mid P}} f(d) \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \xi \\ d \mid k \mid P}} \lambda_k g(k) \Big)^2$$

命

$$S = \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant \xi \\ m \mid P}} \frac{\mu^2(m)}{f(m)}$$

则

$$\lambda_k g(k) = \frac{1}{S} \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant \xi/k \\ (m,k)=1 \\ m \mid P}} \frac{\mu(k) \mu^2(m)}{f(k) f(m)} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant \xi/k \\ (m,k)=1 \\ m \mid P}} \frac{\mu(mk) \mu(m)}{f(mk)}$$

$$\sum_{\substack{d \mid k \mid P \\ 1 \leqslant k \leqslant \xi}} \lambda_k g(k) = \frac{1}{S} \sum_{\substack{d \mid k \mid P \\ 1 \leqslant k \leqslant \xi}} \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant \xi/k \\ m \mid P}} \frac{\mu(mk) \mu(m)}{f(mk)} =$$

$$\frac{1}{S} \sum_{\substack{1 \leqslant r \leqslant \xi \\ d \mid r \mid P}} \frac{\mu(r)}{f(r)} \sum_{d \mid k \mid r} \mu\left(\frac{r}{k}\right) = \frac{1}{S} \cdot \frac{\mu(d)}{f(d)}$$

故

$$Q = \frac{1}{S}$$

证毕.

8.4 定理 A 之应用

先估计定理 A 中不等式右端之第二项,命 $\xi > 3$,则

$$R = O\Big(\sum_{\substack{k_1 \leqslant \xi \\ k_1 \mid P}} \sum_{\substack{k_2 \leqslant \xi \\ k_2 \mid P}} \mid \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \mid 2^{\Omega(k_1)} \cdot 2^{\Omega(k_2)}\Big) = O\Big(\Big(\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \xi \\ k \mid P}} \mid \lambda_k \mid 2^{\Omega(k)} \Big)^2\Big) =$$

$$O\Big(\Big(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant\xi^c\\ k\mid P}}\frac{|\mu(k)|}{|f(k)g(k)|}2^{\Omega(k)}\Big)^2\Big)=O\left(\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi^c}\frac{|\mu(k)|2^{\Omega(k)}}{\prod\limits_{2\leqslant p\leqslant\xi^c}\Big(1-\dfrac{2}{p}\Big)}\right)^2\right)=$$

$$O\Big(\log^4\xi\cdot\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant\xi^c}d(k)\Big)^2\Big)=O(\xi^{2c}\log^6\xi) \qquad ③$$

此处 $d(k)=\sum_{r\mid k}1$，并用到熟知的事实：$2^{\Omega(k)}\leqslant d(k)$ 及 $\sum_{k\leqslant\xi}d(k)=O(\xi\log\xi)$.

当 $l\leqslant c\leqslant l+1$ 时（l 为正整数）

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ n\mid P}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=\sum_{1\leqslant n\leqslant\xi^c}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ p\mid n}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}+$$

$$\sum_{\substack{\xi<p_1<p_2\\ p_1p_2\leqslant\xi^c}}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ p_1p_2\mid n}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}-\cdots+\cdots+(-)^l\sum_{\substack{\xi<p_1<\cdots<p_l\\ p_1p_2\cdots p_l\leqslant\xi^c}}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ p_1\cdots p_l\mid n}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=$$

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant\xi^c}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c/p\\ (p,n)=1}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}+\sum_{\substack{\xi<p_1<p_2\\ p_1p_2\leqslant\xi^c}}\frac{1}{f(p_1)f(p_2)}\cdot$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c/p_1p_2\\ (p_1p_2,n)=1}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}-\cdots+\cdots+$$

$$(-1)^l\sum_{\substack{\xi<p_1<\cdots<p_l\\ p_1\cdots p_l\leqslant\xi^c}}\frac{1}{f(p_1)\cdots f(p_l)}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c/p_1\cdots p_l\\ (n,p_1\cdots p_l)=1}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)} \qquad ④$$

(1) 当 $1\leqslant c\leqslant 2$ 时，由于

$$\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{f(p)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{2}{p}=\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\Big(\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}\Big)=O\Big(\sum_{n>\xi}\frac{1}{n^2}\Big)=O\Big(\frac{1}{\xi}\Big)$$

故由式 ④ 及引理 3 可知

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c\\ n\mid P}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=\sum_{1\leqslant n\leqslant\xi^c}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}-\sum_{\xi\leqslant p\leqslant\xi^c}\frac{2}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant\xi^c/p}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}+O\Big(\frac{\log^2\xi}{\xi}\Big)=$$

$$\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2\xi^c-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log^2\frac{\xi^c}{p}+$$

$$O(\log\xi\log\log\xi)=$$

$$\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\{(2c-1)^2-2c^2\log c\}\log^2\xi+$$

$$O(\log\xi\log\log\xi)$$

此处用着熟知的公式

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\log\log x+c_1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\ (c_1\ 为常数)$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log^2 p}{p}=\frac{1}{2}\log^2 x+O(\log x)$$

取 $\xi=\dfrac{x^{\frac{1}{2c}}}{\log^5 x}$, $2c=d$,则由定理 A 及式 ③ 可知

$$P_w(x,x^{1/d})\leqslant P_w\left(x,\frac{x^{1/d}}{\log^5 x}\right)\leqslant$$

$$2\mathrm{e}^{-2r}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\Lambda(d)\frac{x}{\log^2 x}+O\left(\frac{x\log\log x}{\log^3 x}\right) \qquad ⑤$$

此处 r 为欧拉常数,及

$$\Lambda(d)=2e^{2r}\left[\frac{d^2}{(d-1)^2-2\left(\frac{d}{2}\right)^2\log\frac{d}{2}}\right]\quad(2\leqslant d\leqslant 4) \qquad ⑥$$

(2) 当 $2\leqslant c\leqslant 3$ 时,由于

$$\sum_{\xi\leqslant p\leqslant\xi^c}\frac{1}{f(p)}\sum_{1\leqslant n\leqslant\xi^c/p}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c/p\\(p,n)=1}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=$$

$$O\left(\sum_{\xi\leqslant p\leqslant\xi^c}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant\xi^c/p\\p|n}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}\right)=O\left(\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{f(p)^2}\log^2\xi\right)=O\left(\frac{\log^2\xi}{\xi}\right)$$

及

$$\sum_{\substack{\xi<p<p'\\pp'\leqslant\xi^c}}\frac{1}{f(p)f(p')}-\sum_{\substack{\xi<p<p'\\pp'\leqslant\xi^c}}\frac{4}{pp'}=\sum_{\substack{\xi<p<p'\\pp'\leqslant\xi^c}}\left(\frac{2}{p-2}\cdot\frac{2}{p'-2}-\frac{2}{p-2}\cdot\frac{2}{p'}\right)+$$

$$\sum_{\substack{\xi<p<p'\\pp'\leqslant\xi^c}}\left(\frac{2}{p-2}\cdot\frac{2}{p'}-\frac{4}{pp'}\right)=$$

$$O\left(\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{p'>\xi}\frac{1}{p'^2}\right)+$$

$$O\left(\sum_{\xi<p'\leqslant\xi^c}\frac{1}{p'}\sum_{p>\xi}\frac{1}{p^2}\right)=O\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

故由引理 3 及式 ④ 可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\n|P}}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}=\sum_{n\leqslant\xi^c}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{2}{p}\sum_{1<n\leqslant\xi^c/p}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}+$$

$$\sum_{\substack{\xi<p<p'\\pp'\leqslant\xi^c}}\frac{4}{pp'}\sum_{1\leqslant n\leqslant\xi^c/pp'}\frac{|\mu(n)|}{f(n)}+O\left(\frac{\log^2\xi}{\xi}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\Big[(2c-1)^2-2c^2\log c+$$

$$\left(\sum_{\substack{\xi<p<p'\\ pp'\leqslant\xi}}\frac{4}{pp'}\log^2\frac{\xi^c}{pp'}\right)\frac{1}{\log^2\xi}\Bigg]\log^2\xi+$$

$$O(\log\xi\log\log\xi)$$

取 $\xi=\frac{x^{\frac{1}{2c}}}{\log^5 x}$, $d=2c$. 则由定理 A 及式 ③ 可知式 ⑤ 当 $4\leqslant d\leqslant 6$ 时亦对, 但

$$\Lambda(d)=2e^{2r}\left(\frac{d^2}{(d-1)^2-2\left(\frac{d}{2}\right)^2\log\frac{d}{2}+\delta\left(\frac{d}{2}\right)}\right),4\leqslant d\leqslant 6 \qquad ⑦$$

此处

$$\delta(c)=4\sum_{\substack{\xi<p<p'\\ pp'\leqslant\xi}}\frac{1}{pp'}\log^2\frac{\xi^c}{pp'}/\log^2\xi\quad,c\geqslant 2 \qquad ⑧$$

同法可知当 $6\leqslant d\leqslant 8$ 时

$$\Lambda(d)=2e^{2r}\left(\frac{d^2}{(d-1)^2-2\left(\frac{d}{2}\right)^2\log\frac{d}{2}+\delta\left(\frac{d}{2}\right)-k\left(\frac{d}{2}\right)}\right),6\leqslant d\leqslant 8 \quad ⑨$$

此处

$$k(c)=8\sum_{\substack{pp'p''\leqslant\xi\\ \xi<p<p'<p''}}\frac{1}{pp'p''}\log^2\frac{\xi^c}{pp'p''}/\log^2\xi,c\geqslant 3 \qquad ⑩$$

以下可以依次类推了.

8.5

定理 B_1 若 $\Lambda_k(\alpha)$ 与 $\lambda_i(\alpha)(2\leqslant\alpha\leqslant 15)$ 为至多只有有限多个第一种类型的不连续点的递增函数, 且对于任何 (w) 皆有

$$P_w(x,x^{1/\alpha})>\lambda_i(\alpha)\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right),2\leqslant\alpha\leqslant 15 \qquad ⑪$$

$$P_w(x,x^{1/\alpha})<\Lambda_k(\alpha)\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right),2\leqslant\alpha\leqslant 15 \qquad ⑫$$

此处 $c=2e^{-2r}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$, r 为欧拉常数, 则

$$\psi(\alpha)=\begin{cases}0 & ,2\leqslant\alpha\leqslant\tau\\ \lambda_i(\beta)-2\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda_k(z)\frac{z+1}{z^2}dz & ,2\leqslant\tau\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 15\end{cases}$$

与

$$w(\alpha)=\Lambda_k(\beta)-2\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\lambda_i(z)\frac{z+1}{z^2}dz,2\leqslant\tau\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 15$$

亦分别适合 ⑪ 与 ⑫. 常记 $\psi(\alpha)=\lambda_{i+1}(\alpha)$, $w(\alpha)=\Lambda_{k+1}(\alpha)$.

证明见相关文献①.

给出一组整数

$$(w)a = 0\text{或}1, 0 \leqslant a_i < p_i, 1 \leqslant i \leqslant r; 0 \leqslant b_j < p_j, 1 \leqslant j \leqslant s$$

$$a_v \neq b_v, v = 1,2,\cdots,\min(r,s)$$

此处 $3 = p_1 < \cdots < p_r \leqslant y$ 为不超过 y 的全部奇素数, $3 = p_1 < p_2 < \cdots < p_s \leqslant z$ 为不超过 z 的全部奇素数.

命 $P_w(x,y,z)$ 为适合下面条件的整数的个数.

$$n \leqslant x, n \equiv a(\bmod 2), n \not\equiv a_i(\bmod p_i), 1 \leqslant i \leqslant r, n \not\equiv b_i(\bmod p_i), 1 \leqslant i \leqslant s \tag{13}$$

特别当 $y = z$ 时,即得 $P_w(x,y,z) = P_w(x,y)$.

定理 B_2 若对于任何 (w) 皆有

$$P_w(x,x^{1/\alpha}) < A(\alpha)\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right), 2 \leqslant \alpha \leqslant 15$$

此处 $A(d)$ 为仅有有限多个第一种类型的不连续点的递增函数.则对于给予的三个正数 $2 < \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha$,有

$$P_w(x,x^{1/\gamma},x^{1/\alpha}) > P_w(x,x^{1/\beta},x^{1/\alpha}) - A\left(\frac{(\beta-1)\alpha}{\beta}\right)c\int_{\gamma-1}^{\beta-1}\frac{z+1}{z^2}\mathrm{d}z\cdot\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

证明 若 $p_m \geqslant p_r$,则由定义可知 $P_w(x,p_m,p_r)$ 与 $P_w(x,p_{m+1},p_r)$ 之差为适合下面条件的整数个数

$$n \leqslant x, n \equiv a(\bmod 2), n \not\equiv b_i(\bmod p_i), 1 \leqslant i \leqslant r$$

$$n \not\equiv a_j(\bmod p_j), 1 \leqslant j \leqslant m, n \equiv a_{m+1}(\bmod p_{m+1}) \tag{14}$$

命同余式

$$\begin{cases} p_{m+1}y + a_{m+1} \equiv a_i(\bmod p_i), & 0 \leqslant y < p_i \\ p_{m+1}y + a_{m+1} \equiv b_i(\bmod p_i), & 0 \leqslant y \leqslant p_i \\ p_{m+1}y + a_{m+1} \equiv a(\bmod 2), & 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

的解分别是 a_i^*, b_i^* 及 $\tilde{a}_m$,可知 $a_i^* \neq b_i^* (1 \leqslant i \leqslant r)$.

因此,满足条件⑭的整数个数,即等于满足下条件的整数个数,即

$$n \leqslant \frac{x - a_{m+1}}{p_{m+1}}, n \equiv \tilde{a}_m(\bmod 2)$$

$$n \not\equiv a_i^*(\bmod p_i), 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$n \not\equiv b_i^*(\bmod p_i), i \leqslant r \tag{15}$$

① Бухштаб, А. А., Новые улурщения в методе эратосфенова решщта, матем. сб; 4(1938), 375-387.

命

$$(w_m)0 \leqslant \widetilde{a}_m \leqslant 1, 0 \leqslant a_i^* < p_i(i \leqslant m), 0 \leqslant b_j^* < p_j, j \leqslant r$$

则满足条件 ⑮ 的整数个数为 $p_{w_m}\left(\frac{x - a_{m+1}}{p_{m+1}}, p_m, p_r\right)$. 故得

$$P_w(x, p_m, p_r) - P_w(x, p_{m+1}, p_r) = p_{w_m}\left(\frac{x - a_{m+1}}{p_{m+1}}, p_m, p_r\right) \leqslant$$

$$P_{w_m}\left(\frac{x}{p_{m+1}}, p_m, p_r\right) \leqslant P_{w_m}\left(\frac{x}{p_{m+1}}, p_r\right) \qquad ⑯$$

现在将 $x^{1/\beta}$ 与 $x^{1/\gamma}$ 之间的素数排列如下

$$p_t \leqslant x^{1/\beta} < p_{t+1} < \cdots < p_s \leqslant x^{1/\gamma} < p_{s+1}$$

可知

$$P_w(x, x^{1/\beta}, x^{1/\alpha}) = P_w(x, p_t, x^{1/\alpha}), P_w(x, x^{1/\gamma}, x^{1/\alpha}) = P_w(x, p_s, x^{1/\alpha})$$

连续运用式 ⑯ 可知

$$P_w(x, x^{1/\beta}, x^{1/\alpha}) \leqslant P_w(x, x^{1/\gamma}, x^{1/\alpha}) + \sum_{x^{1/\beta} \leqslant p_{i+1} \leqslant x^{1/\gamma}} P_{w_i}\left(\frac{x}{p_{i+1}}, x^{1/\alpha}\right) =$$

$$P_w(x, x^{1/\gamma}, x^{1/\alpha}) + \sum_{x^{1/\beta} < p_{i+1} \leqslant x^{1/\gamma}} P_{w_i}\left(\frac{x}{p_{i+1}}, \left(\frac{x}{p_{i+1}}\right)^{\frac{\log x^{1/\alpha}}{\log \frac{x}{p_{i+1}}}}\right) \leqslant$$

$$P_w(x, x^{1/\gamma}, x^{1/\alpha}) + \sum_{x^{1/\beta} < p_{i+1} \leqslant x^{1/\gamma}} P_{w_i}\left(\frac{x}{p_{i+1}}, \left(\frac{x}{p_{i+1}}\right)^{\frac{1}{\frac{(\beta-1)\alpha}{\beta}}}\right) \leqslant$$

$$P_w(x, x^{1/\gamma}, x^{1/\alpha}) + \sum_{x^{1/\beta} < p_{i+1} \leqslant x^{1/\gamma}} A\left(\frac{(\beta - 1)\alpha}{\beta}\right)\frac{cx}{p_{i+1}\log^2 \frac{x}{p_{i+1}}} +$$

$$O\left(\sum_{x^{1/\beta} \leqslant p_{i+1} \leqslant x^{1/\gamma}} \frac{x}{p_{i+1}\log^3 \frac{x}{p_{i+1}}}\log\log \frac{x}{p_{i+1}}\right)$$

由引理 4 可知

$$P_w(x, x^{1/\beta}, x^{1/\alpha}) \leqslant P_w(x, x^{1/\gamma}, x^{1/\alpha}) +$$

$$A\left(\frac{(\beta - 1)\alpha}{\beta}\right)\left(\log\frac{\beta - 1}{\gamma - 1} + \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right) \cdot$$

$$\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right) =$$

$$P_w(x, x^{1/\gamma}, x^{1/\alpha}) + A\left(\frac{(\beta - 1)\alpha}{\beta}\right)\int_{\gamma-1}^{\beta-1}\frac{z + 1}{z^2}\mathrm{d}z \cdot$$

$$\frac{cx}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

证毕

8.6 定理的证明

命 $\lambda(\alpha)$ 及 $\Lambda(\alpha)$ 为对于(w)无关，使下式成立的仅有有限多个连续点的递增函数

$$\lambda(\alpha)\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)<p_w(x,x^{1/\alpha})<$$

$$\Lambda(\alpha)\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)\quad,2\leqslant\alpha\leqslant 15$$

这种函数记之以 $\lambda_0(\alpha),\Lambda_0(\alpha);\lambda_1(\alpha),\Lambda_1(\alpha);\cdots$

由⑥,⑦,⑨及定理 B_1 经过实际计算得

α	10	9	8	7	6	5	4
$\lambda_0(\alpha)$	99.981 81①	79.784 69	60.888 17	43.515 54	26.709 25	9.181 09	0
$\Lambda_0(\alpha)$	100.020 73*	82.720 7	68.525 11	54.393 52	43.008 2	34.896 66	29.390 23

将区间 $\alpha-1\leqslant x\leqslant\beta-1$ 分为 n 个小区间 $u_i<x\leqslant u_{i+1}(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，$u_0=\alpha-1$，$u_n=\beta-1$. 则由于 $\lambda(\alpha)$ 及 $\Lambda(\alpha)$ 均为递增函数，故

$$\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\lambda(z)\frac{z+1}{z^2}dz\geqslant\sum_{s=0}^{n-1}\lambda(u_s)\int_{u_s}^{u_{s+1}}\frac{z+1}{z^2}dz$$

$$\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\Lambda(z)\frac{z+1}{z^2}dz\geqslant\sum_{s=0}^{n-1}\lambda(u_s+1)\int_{u_s}^{u_{s+1}}\frac{z+1}{z^2}dz$$

取 $u_{s+1}-u_s=0.02$，从 $\lambda_0(\alpha)$ 及 $\Lambda_0(\alpha)$ 出发，利用定理 B_1 经过几次计算则得

α	10	9	…	6	5
$\lambda_i(\alpha)$	99.981 81*	80.711 87		29.286 27	11.758 11
$\Lambda_i(\alpha)$	100.020 73*	81.364 41		43.008 2	34.896 66

又由定理 B_2 得

$$P_w(x,x^{1/4},x^{1/5})>P_w(x,x^{\frac{1}{4.2}},x^{1/5})-\Lambda\left(\frac{3.2\times 5}{4.2}\right)\int_3^{3.2}\frac{z+1}{z^2}dz\cdot\frac{cx}{\log^2 x}+$$

$$O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)>\cdots>P_w(x,x^{1/5},x^{1/5})-\left(\Lambda\left(\frac{3.2\times 5}{4.2}\right)\int_3^{3.2}\frac{z+1}{z^2}dz+\right.$$

$$\Lambda\left(\frac{3.4\times 5}{4.4}\right)\int_{3.2}^{3.2}\frac{z+1}{z^2}dz+$$

① $\Lambda(10)=100.020\,73$ 及 $\lambda(10)=99.98\,181$ 取自 Бухштаб, А. А., О разлохенни чётных чиыел на ыумму двух олагаемых с ограниченным чиолом мнохнтелей, ДАН СССР; 29(1940), 544-548.

$$A\left(\frac{3.6\times 5}{4.6}\right)\int_{3.4}^{3.6}\frac{z+1}{z^2}\mathrm{d}z+A\left(\frac{3.8\times 5}{4.8}\right)\int_{3.6}^{3.8}\frac{z+1}{z^2}\mathrm{d}z+$$

$$A(4)\int_{3.8}^{4}\frac{z+1}{z^2}\mathrm{d}z\Big)\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)>$$

$$(11.758\,11-10.757\,28)\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)=$$

$$1.000\,83\frac{cx}{\log^2 x}+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right) \quad ⑰$$

(1) 当 x 为偶数时,命 $a=1,a_i=0,b_i\equiv x(\mathrm{mod}\ P_i)(i=1,2,\cdots)$,则由 ⑰ 可知存在 x_0 使

$$P_w(x,x^{1/4},x^{4/5})=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n\Rightarrow p>x^{1/4}\\ p\mid(x-n)\Rightarrow p>x^{1/5}}}1>\frac{cx}{\log^2 x},x>x_0$$

即存在 $n\leqslant x$,而 n 的素因子皆大于$x^{1/4}$,故 n 的素因子个数不能多于3,又 $x-n$ 的素因子皆大于$x^{1/5}$,故其素因子个数不能多于4.但是 $x=n+(x-n)$,故定理1成立.

(2) 取 $a=1,a_i=0,b_i=p_i-2(i=1,2,\cdots)$,则式 ⑰ 即为

$$P_w(x,x^{1/4},x^{4/5})=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\mid n\Rightarrow p>x^{1/4}\\ p\mid(n+2)\Rightarrow p>x^{1/5}}}1>\frac{cx}{\log^2 x},x>x_0$$

故定理2得证.

A.Selberg曾在两次国际数学集会的报告中,宣布若干用他的方法或能获得的结果.例如,在1950年他说任一充分大的偶数可能表为一个不超过2个素数的乘积及一个不超过3个素数乘积之和①.但在1952年仅说任一充分大的偶数可能表为两个各不超过3个素数的乘积之和②.至今虽已经过了五年多,但在文献上并未见到他本人或别人发表这类结果.

运用这一方法,作者还证明了其他的结果(即将在另文发表),例如,命 $F(x)$ 为无固定素因子的既约 k 次整值多项式;$\pi(N;F(x))$ 为当 $x=1,2,\cdots,N$ 时,使 $F(x)$ 为素数的 x 的个数,则:

(i) 存在无限多个 x,而 $F(x)$ 为不超过$[2.1k]$个素数的乘积.

(ii)$\pi(N;F(x))\leqslant 2e^r\mu_F\frac{N}{\log N}+O\left(\frac{N}{\log N}\right)$.

此处 r 为 Euler 常数,μ_F 为仅与 $F(x)$ 有关之常数,与“O”有关之常数仅与 $F(x)$ 有关.

---

① Selberg, A., The general sieve method and its place in prime number theory, proc. of the international congress of math. 1(1950), 286-292.

② Selberg, A., On elmentary methods in prime number theory and their limitations. Den 11-te Skandinaviske Matematikerkongress; (1952), 13-22.

又有广义 Riemann 猜测之下，即假定所有的 Dirichlet L - 函数 $L(s,\chi)$ 的零点的实数部分皆小于等于$\frac{1}{2}$，则：

(iii) 每一充分大的偶数可表为一个素数及一个不超过 4 个素数乘积之和.

(iv) 命 $Z_2(N)$ 表示不超过 N 的孪生素数的对数(当 p 与$p+2$同时为素数，就称$(p,p+2)$ 为一对孪生素数)，则

$$Z_2(N) \leqslant (8+\varepsilon)\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{N}{\log^2 N}+O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right)$$

此处 $\varepsilon > 0$ 为任何正数，与"O"有关之常数只与 ε 有关.

9　表大偶数为两个殆素数之和[①②]

——王元

为简单记，我们将下面的命题记为(a,b)：

每一充分大的偶数可表为两个大于 1 的整数 c_1 与 c_2 之和，c_1 与 c_2 的素因子个数分别不超过 a 与 b.

本文的目的在于用作者过去所用的方法[③④]，将作者 1955 年的结果(3,4)[⑤]改进为(3,3) 及$(a,b)(a+b\leqslant 5)$. 并进一步运用 Бухщтаб[⑥]方法及比较复杂的数值计算，我们证明了(2,3). 最近，我们发现 A.H.Вниоградов[⑦]关于(3,3)的证明中某些数值计算的错误，将在文章末指出.

本文以 p 表示素数，p_i 表示第 i 个奇素数.

给出偶数 x 及实数ξ. 给出一组整数

$$(\omega)a;a_i,b_i,1\leqslant i\leqslant r$$

适合下面的条件

(1)$a=0$或1，$0\leqslant a_i,b_i<p_i$，若 $p_i\mid x$，则 $a_i=b_i$，否则 $a_i\neq b_i(1\leqslant i\leqslant r)$，此处 $p_r\leqslant\xi<p_{r+1}$，命 $P_\omega(x,\xi)$ 表示适合下面条件的 n 的个数；

(2)$1\leqslant n\leqslant x$，$n\equiv a(\bmod 2)$，$n\not\equiv a_i(\bmod p_i)$，$n\not\equiv b_i(\bmod p_i)(1\leqslant i\leqslant r)$；

---

① 殆素数者即素因子个数不超过某一确定限之整数.
② 原载《科学记录》新辑第 1 卷第 5 期，1957 年.
③ 王元. 论筛法及其有关的若干问题，科学记录新辑 1 卷 1 期，1957，9-11.
④ 王元. 论筛法及其若干应用，科学记录新辑 1 卷 3 期，1957，1-4.
⑤ 王元. 表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和，数学学报，1956，3 500-513.
⑥ Бухщтаб, А. А. 1940. О Разложении Чётных чисел на Сумму Двух Слагаемых с Ограниченным Числом Множителей, Д АН СССР, 29, 544-548.
⑦ Виноградов, А. И. 1957. Применение $\zeta(s)$ к Решету эратосфена, Мамем. сб., 41:1, 49-80.

给出两数 $v > u > 1$. 以 N 表示适合下面条件的整数 $n(x-n)$ 的集合;

(3) $1 \leqslant n \leqslant x, n(x-n) \not\equiv 0 \pmod 2, n(x-n) \not\equiv 0 \pmod{p_i} (1 \leqslant i \leqslant s)$;

此处 $p_s \leqslant x^{\frac{1}{v}} < p_{s+1}$. 以 M 表示适合(3)再加上下面的条件的整数 $n(x-n)$ 的集合;

(4) $n(x-n) \not\equiv 0 \pmod{p_{s+j}^2} (1 \leqslant j \leqslant t-s)$;

此处 $p_t \leqslant x^{\frac{1}{u}} < p_{t+1}$. 集合 N 及 M 的元素的个数①分别记之以 $N(x, x^{\frac{1}{v}})$ 与 $M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}})$.

引理 1 $M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{\mu}}) = N(x, x^{\frac{1}{v}}) + O(x^{1-\frac{1}{v}}) + O(x^{\frac{1}{\mu}})$.

证明 $N(x, x^{\frac{1}{v}}) - M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{\mu}}) \leqslant \sum\limits_{x^{\frac{1}{v}} < p \leqslant x^{\frac{1}{u}}} \sum\limits_{\substack{1 \leqslant n \leqslant a \\ n(x-n) \equiv 0 \pmod{p^2}}} 1 = \sum\limits_{x^{\frac{1}{v}} < p \leqslant x^{\frac{1}{v}}} S_p$

(i) $p \mid x: S_p \leqslant \sum\limits_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n \equiv 0 \pmod p}} 1 \leqslant \left[\frac{x}{p}\right] + 1 = O(x^{1-\frac{1}{v}})$;

(ii) $p \nmid x: S_p = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n(x-n) \equiv 0 \pmod{p^2}}} 1 \leqslant 2\left[\frac{x}{p^2}\right] + 2$.

故得

$$\sum_{x^{\frac{1}{v}} < p \leqslant x^{\frac{1}{u}}} S_p = O\Big(\sum_{\substack{p \mid x \\ p > x^{\frac{1}{v}}}} x^{1-\frac{1}{v}}\Big) + O\Big(\sum_{m > x^{\frac{1}{v}}} \frac{x}{m^2}\Big) + O\Big(\sum_{m \leqslant x^{\frac{1}{u}}} 1\Big) =$$

$$O(x^{1-\frac{1}{v}}) + O(x^{\frac{1}{u}})$$

引理证毕.

引理 2 存在适合(1)之诸整数列 $(\omega_j)(1 \leqslant j \leqslant t-s)$, 使 M 中至少被 l 个 p_{s+j} 整除的 $n(x-n)$ 的个数不超过

$$\frac{2}{l} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant t-s \\ p_{s+j} \nmid x}} P_{w_j}\left(\frac{x}{P_{s+j}}, x^{\frac{1}{v}}\right) + O(x^{1-\frac{1}{v}})$$

证明 当 $1 \leqslant j \leqslant t-s$ 时, M 中能被 p_{s+j} 整除的元素的集合记之以 Γ_j, 实际上, Γ_j 就是适合(3), (4)及下面条件的整数 $n(x-n)$ 的集合.

(5) $n(x-n) \equiv 0 \pmod{p_{s+j}}$;

(i) $p_{s+j} \mid x$: Γ_j 的元素的个数显然不超过 $\sum\limits_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n \equiv 0 \pmod{p_{s+j}}}} 1 = O(x^{1-\frac{1}{v}})$.

(ii) $p_{s+j} \nmid x$: 由条件(5)得出 $n \equiv 0 \pmod{p_{s+j}}$ 或 $n \equiv x \pmod{p_{s+j}}$. 命 $(\omega_j) a = 1$; 当 $p_i \mid x$ 时, $a_i = b_i = 0$, 否则 $a_i = 0, b_i p_{s+j} \equiv x \pmod{p_i}$

---

① 若 $n = x - n'$ 而 $n(x-n) \in R$(或 M), 则规定 $n(x-n)$ 与 $(x-n')[x-(x-n')]$ 各算一次.

$(1 \leqslant i \leqslant s)$. 显然, Γ_j 的元素的个数不超过 $2P_{\omega_j}\left(\frac{x}{p_{s+j}}, x^{\frac{1}{v}}\right)$.

若 $n(x-n) \in M$ 且至少被 l 个 p_{s+j} 整除, 则 $n(x-n)$ 至少属于 l 个类 Γ_j. 故得引理.

引理 3 命 $c > 1$ 为一常数. 则存在非负递增且仅有有限多个不连续点之函数 $\lambda(z)$ 及 $\Lambda(z)(0 < z \leqslant c)$ 使下式对(ω)与 z 一致成立.

$$(6)\lambda(z)\frac{c_x x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_x x}{\log^2 x \log\log x}\right) \leqslant P_\omega(x, x^{\frac{1}{z}}) \leqslant \Lambda(z)\frac{c_x x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_x x}{\log^2 x \log\log x}\right) \quad (0 < z \leqslant c);$$

此处 $c_x = 2e^{2r}\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$, 而 r 为 Euler 常数.

此引理可以立刻由 Brun 方法得出.

基本定理 命 $\lambda(z)$ 与 $\Lambda(z)(0 < z \leqslant c)$ 为具有引理 3 所述之性质之两函数. 命 $c > v > u > 1$ 为两个给定之正数; m 为非负整数. 若

$$(7)\lambda(v) - \frac{1}{m+1}\int_{u-1}^{v-1}\Lambda\left(\frac{vz}{z+1}\right)\frac{z+1}{z^2}\mathrm{d}z > 0;$$

则当 x 充分大时, 区间 $1 < n < x-1$ 中存在 n 使 $n(x-n)$ 不能被小于等于 $x^{\frac{1}{v}}$ 的素数整除, 最多被区间 $x^{\frac{1}{v}} < p \leqslant x^{\frac{1}{u}}$ 中 m 个素数整除.

证明 取$(\overline{\omega})a = 1$; 当 $p_i \mid x$ 时, $a_i = b_i = 0$, 否则 $a_i = 0, b_i \equiv x(\mathrm{mod}\ p_i)$, $i = 1, 2\cdots$ 则得 $N(x, x^{\frac{1}{v}}) = P_{\overline{\omega}}(x, x^{\frac{1}{v}})$. 由引理 1, 引理 2, 引理 3 可知当 x 充分大时, M 中最多被 m 个 $p_{s+j}(1 \leqslant j \leqslant t-s)$ 整除的元素的个数不少于

$$M(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}}) - \frac{1}{m+1}\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant t-s \\ p_{s+j} \nmid x}} P_{\omega_j}\left(\frac{x}{p_{s+j}}, x^{\frac{1}{v}}\right) + O(x^{1-\frac{1}{v}}) =$$

$$P_{\overline{\omega}}(x, x^{\frac{1}{v}}) - \frac{1}{m+1}\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant t-s \\ p_{s+j} \nmid x}} P_{\omega_j}\left(\frac{x}{p_{s+j}}, x^{\frac{1}{v}}\right) + O(x^{1-\frac{1}{v}}) + O(x^{\frac{1}{u}}) \geqslant$$

$$\left(\lambda(v) - \frac{1}{m+1}\int_{u-1}^{v-1}\Lambda\left(\frac{vz}{z+1}\right)\frac{z+1}{z^2}\mathrm{d}z\right)\frac{c_x x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_x x}{\log^2 x \log\log x}\right) > 3$$

此即意为当 x 充分大时, 区间 $1 < n < x-1$ 中存在 n 使 $n(x-n)$ 不能被小于等于 $x^{\frac{1}{v}}$ 的素数整除, 最多被区间 $x^{\frac{1}{v}} < p \leqslant x^{\frac{1}{u}}$ 中 m 个素数整除, 明所欲证.

由 Brun-Бухштаб-Selberg 方法(参看相关文献①) 中得下表.

---

① 王元. 表大偶数为一个不超过三个素数的乘积及一个不超过四个素数的乘积之和, 数学学报, 1956, 3 500-513.

(8)

α	…	8	…	6	…	5	…	4	…
$\Lambda(\alpha)$	…	68.525 11	…	43.008 2	…	34.896 66	…	29.390 23	…
$\lambda(\alpha)$	…	60.888 17	…	26.709 25	…	9.181 09	…	0	…

由上表经计算得

$$\lambda(6)-\frac{2}{3}\int_{2}^{5}\Lambda\left(\frac{6z}{z+1}\right)\frac{z+1}{z^{2}}\mathrm{d}z>0.338\,29$$

及

$$\lambda(8)-\frac{1}{2}\int_{1}^{7}\Lambda\left(\frac{8z}{z+1}\right)\frac{z+1}{z^{2}}\mathrm{d}z>0.561\,25$$

故由基本定理得(3,3)与$(a,b)(a+b\leqslant 5)$.

进一步运用 Бухштаб 方法①及比较复杂的数值计算,表中的数值可以改善,得到下表.

(9)

α	…	8	…	7	…	6	…	5	…
$\Lambda(\alpha)$	…	64.403 149	…	50.529 826	…	41.018 97	…	34.896 66	…
$\lambda(\alpha)$	…	63.599 31	…	47.471 252	…	31.004 145	…	13.615 59	…

由上表得出

$$\lambda(8)-\frac{2}{3}\int_{\frac{9}{7}}^{7}\Lambda\left(\frac{8z}{z+1}\right)\frac{z+1}{z^{2}}\mathrm{d}z>0.43$$

故由基本定理得出(2,3).

最后我们将要指出 А.И.Виноградов 关于(3,3)证明中的某些错误②.在此我们用他的记号不作任何解释,他得到

(10)$3.2I-2I_{1}<0.316\,7$;

故当 z 充分大时

(11)$\int_{1.1}^{\lambda}\varepsilon(u)(2u+1)\mathrm{d}u\leqslant\frac{e^{2\omega-1.1}}{\pi}(3.2I-2I_{1})+O\left(\frac{1}{\sqrt{\log z}}\right)<0.5$;

另一方面,由于 $\varepsilon(u)$ 是非负递减函数及 $1-\varepsilon(2)=(4.5-4\log 2)e^{-2\gamma}$,故得

(12)$\int_{1.1}^{\lambda}\varepsilon(u)(2u+1)\mathrm{d}u\leqslant\int_{1.1}^{2}\varepsilon(u)(2u+1)\mathrm{d}u\geqslant\varepsilon(2)\int_{1.1}^{2}(2u+1)\mathrm{d}u>$

① Бухштаб, А.А.1940.О Разложении Чётных чисел на Сумму Двух Слагаемых с Олраниченным Числом Мнохителей, Д АН СССР, 29, 544-548.

② 我收到通知,他亦发现了该错并作了更正(见 Матем.сб.No.41(83):3,415,1957).作者于1957年9月6日.

1.5;

此与(11)相矛盾.进一步,我们还能证明

$$(13)(4.1)^2 - 4\int_{1.55}^{\lambda}\frac{\varepsilon(u)}{1-\varepsilon(u)}(2u+1)\mathrm{d}u < 16.81,$$

$$-4\int_{1.55}^{3}\frac{\varepsilon(u)}{1-\varepsilon(u)}(2u+1)\mathrm{d}u < -1.$$

我们亦获得了关于孪生素数问题对应的结果.

10 嵌入定理与代数数域上的大筛法[①]

——丁夏畦

丁夏畦(Dīng Xiàqī,1929—)中国数学家.生于湖南益阳.

10.1 记号

本文把数理方程研究中常用的嵌入定理稍作推广,应用到代数数域上来,并把相关文献[②③④]中第四章的定理4.2和均值定理推广到代数数域上.

为此,先介绍一些符号与约定[⑤].

设 K 为一 n 次代数数域,按通常的记号,记作 $n = r_1 + 2r_2$.以 Z_K 表 K 中的整数环.

(1)设 $\mathscr{A}$ 为一理想,如 $\alpha,\beta\in Z_K$,$\mathscr{A}\mid(\alpha-\beta)$,则记 $\alpha\equiv\beta(\bmod\mathscr{A})$.按此可把 K 中的整数分类,其类数为 $N\mathscr{A}$. Z_K 中与 $\mathscr{A}$ 互素的整数在上述分类中占住类数为 $\phi(\mathscr{A})$,如此之类构成一 Abel 群,其上之特征记为 $X(\alpha)$.

(2)K 中任二理想 $\mathscr{A},\mathscr{B}$,如果存在 $\alpha,\beta\in Z_K$,使 $(\alpha)\mathscr{A}=(\beta)\mathscr{B}$,则称 $\mathscr{A}\sim\mathscr{B}$,按此可将 K 中理想分类,其类数为 h,这是理想的广义分类.

(3)如果 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 和 Q 互素,且 $\alpha,\beta\in Z_K$ 与 Q 互素,$(\alpha)\mathscr{A}=(\beta)\mathscr{B}$,$\alpha\equiv\beta(\bmod Q)$,$\alpha\succ 0$,$\beta\succ 0$,则称 $\mathscr{A}\sim\mathscr{B}(\bmod Q)$,$\alpha\succ 0$ 之意义指 α 的诸共轭实数为正按此可将 K 中与 Q 互素的理想分类,此诸类构成一 Abel 群,其阶数为 $h(Q)=\dfrac{h\cdot 2^{r_1}\phi(Q)}{T(Q)}$,其中 $T(Q)$ 表整数,按 mod Q 的既约剩余类中含单位者之类数[⑥].

把任何主理想均表为(α),其中 α 的诸共轭元的绝对值小于等于

① 1977年7月9日收到.原载自学学报第22卷,第4期,1979年7月.

② Hugh T.Montgomery, Topics in multipricative number theory, Lecture Notes in Math,227(1971).

③ 潘承洞,丁夏畦.一个均值定理 J.数学学报,1975,18,254-262.

④ Pan Cheng-dong, Ding Xia-xi, Wang Yuan. On the representaion of every large even integer as a sum of a prime and an almost pruire, Scientia Sinica, XVIII 5(1975),599-610.

⑤ 111

⑥ Robin J.Wilson. The large sieve in Algebraic number Fields, Mathematika,1969,16(2),189-240.

$c(N(\alpha))^{\frac{1}{n}}$.

设 $Q = Q_1Q_2\cdots Q_s$，其中 Q_j 为整除同一有理素数的素理想的乘积，则必有 Q'_j 使 $Q_jQ'_j = (q_j)$，q_j 为 Q_j 中的最小正整数．今后并假定 Q 无分支素理想因子．这样显然 $(Q_j, Q'_j) = 1, (Q_i, Q_j) = 1, (Q_i, Q'_j) = 1, i \neq j$．故对 K 中任何整数 α，同余式组

$$\alpha^* \equiv \alpha (\bmod Q_j), \alpha^* \equiv 0 (\bmod Q'_j) \qquad ①$$

有公解 α^*，定义

$$E\left(\frac{\alpha}{Q}\right) = e\left(tr\frac{\alpha^*}{q}\right), q = q_1\cdots q_s \qquad ②$$

设 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为 K 中之一组整底，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为对应于迹函数的共轭底，即为适合

$$\mathrm{tr}(\omega_j\lambda_k) = \begin{cases}1, j = k\\ 0, j \neq k\end{cases}$$

的一组底(不一定为整底)，令

$$S\left(\frac{\alpha}{Q}\right) = \sum_{v\in\Gamma} a_v E\left(\frac{v\alpha}{Q}\right) = \sum_{v\in\Gamma} a_v e\left(\mathrm{tr}\frac{v\alpha^*}{q}\right) = \sum_{v\in\Gamma} a_v e(r_1v_1 + \cdots + r_nv_n) \qquad ③$$

其中

$$v = v_1\omega_1 + \cdots + v_n\omega_n$$

$$\frac{\alpha^*}{q} = r_1\lambda_1 + \cdots + r_n\lambda_n$$

Γ 中的整数 v 均先假定其所有共轭数的绝对值小于等于 $c(Nv)^{\frac{1}{n}}$.

10.2 大筛法

我们证明了如下的嵌入不等式①：

定理 1 如 $f \in W_2^l(E^n)$，即 $f \in L_2(E^n)$，所有的 $\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}} \in L_2(E^n)$，$l = l_1 + \cdots + l_n$，$n < 2l$，则

$$|f|^2 \leqslant c\left(\int_{E^n} |f|^2 \mathrm{d}x\right)^{1-\frac{n}{2l}}\left(\int_{E^n} \sum_{l=l_1+\cdots+l_n} \frac{l!}{l_1!\cdots l_n!}\left(\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{2l}} \qquad ④$$

今将上定理稍作推广．

以 $O_{2,n_1,\cdots,n_k}^{l_1,\cdots,l_k}$ 表如下的函数空间：

$f(x_1, \cdots, x_n) \in L_2(E^n)$，令 $f^\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 表 f 的富氏积分，$\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n_1}^2 = r_1^2, \alpha_{n_1+1}^2 + \cdots + \alpha_{n_1+n_2}^2 = r_2^2, \cdots, \alpha_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^2 + \cdots + \alpha_n^2 = r_k^2, n = n_1 + \cdots + n_k$,

① 丁夏畦．一类泛函不等式．数学进展，7:1(1964)，49－56．

有

$$(1+r_1^2)^{\frac{l_1}{2}}\cdots(1+r_k^2)^{\frac{l_k}{2}}f^{\Lambda}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in L_2$$

推广的嵌入定理　如 $f\in O_{2,n_1,\cdots,n_k}^{l_1,\cdots,l_k}$，$n_i<2l_i$，则

$$|f|^2\leqslant c\left(\int_{E^n}|f|^2\mathrm{d}x\right)^{\left(1-\frac{n_1}{2l_1}\right)\cdots\left(1-\frac{n_k}{2l_k}\right)}\cdot$$

$$\left[\prod_i\left(\int_{E^n}r_i^{2l_i}|f^{\Lambda}(\alpha)|\mathrm{d}\alpha\right)^{\left(1-\frac{n_1}{2l_1}\right)\cdots\frac{n_i}{2l_i}\cdots\left(1-\frac{n_k}{2l_k}\right)}\right]\cdot\cdots\cdot$$

$$\left(\int_{E^n}r_1^{2l_1}\cdots r_k^{2l_k}|f^{\Lambda}(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{n_1}{2l_1}\cdots\frac{n_k}{2l_k}}=$$

$$c\left(\int_{E^n}|f|^2\mathrm{d}x\right)^{\left(1-\frac{n_1}{2l_1}\right)\cdots\left(1-\frac{n_k}{2l_k}\right)}\cdot$$

$$\prod_{i=1}^k\left[\int_{E^n}\sum_{l_i=l_{i_1}+\cdots+l_{i_{ni}}}\frac{l_i!}{l_{i_1}!\cdots l_{i_{ni}}!}\left(\frac{\partial^{l_i}f}{\partial^{l_{i_1}}_{x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}}\cdots\partial^{l_{i_{ni}}}_{x_{n_1+\cdots+n_i}}}\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\left(1-\frac{n_1}{2l_1}\right)\cdots\frac{n_i}{2l_i}\cdots\left(1-\frac{n_k}{2l_k}\right)}\cdots$$

$$\left[\int_{E^n}\sum_{l_i=l_{i_1}+\cdots+l_{i_{ni}}}\prod_{i=1}^k\frac{l_i!}{l_{i_1}!\cdots l_{i_{ni}}!}\cdot\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial^{l_1+\cdots+l_k}f}{\partial x_1^{l_{11}}\cdots\partial x_{n_1}^{l_{1n_1}}\cdots\partial x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}^{l_{i1}}\cdots\partial x_{n_1+\cdots+n_i}^{l_{in_i}}\cdots\partial x_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{l_{k1}}\cdots\partial_{x_n}^{l_{kn_k}}}\right)^2\mathrm{d}x\right]^{\frac{n_1}{2l_1}\cdots\frac{n_k}{2l_k}} \qquad ⑤$$

此定理之证明，只须按 n_i 的顺序连续使用式 ④ 即得. 此定理实际上对 Соболев 嵌入定理作了加强. 因为在 Соболев 的定理中，要把 $W_2^l(E^n)$ 嵌入 C，需要所有的 $l(n<2l)$ 阶广义导数属于 $L_2(E^n)$. 此定理指出这是不需要的. 这里只须要于最高阶 $l_1+\cdots+l_k$ 的某些混合微商属于 $L_2(E^n)$，再加上某些低阶微商属于 $L_2(E^n)$ 之后，就可得出嵌入定理.

引理 1(大筛法)　设 $S(\boldsymbol{x})=\sum_{\lambda=1}^k\sum_{|\boldsymbol{m}_\lambda|\leqslant N_\lambda}a_{\boldsymbol{m}}e(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m})$，其中

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_n)$$

$$\boldsymbol{m}_\lambda=(0,\cdots,0,m_1+\cdots+m_{\lambda-1}+1,\cdots,m_1+\cdots+m_\lambda,0,\cdots,0)$$

$$\boldsymbol{x}_\lambda=(0,\cdots,0,x_{m_1+\cdots+m_{\lambda-1}+1},\cdots,x_{m_1+\cdots+m_\lambda},0,\cdots,0)$$

于单位立方体内任取 P 个点 $\boldsymbol{x}^i$，$i=1,\cdots,P$，有

$$\min_{\substack{n_1+\cdots+n_{\lambda-1}+1\leqslant t\leqslant n_1+\cdots+n_\lambda\\ x_t^i\neq x_t^j}}\|x_t^i-x_t^j\|=2\delta(\boldsymbol{x}_\lambda^i)$$

则有

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{(N_1^{n_1}+\delta^{-n_1}(x_1^i))\cdots(N_k^{n_k}+\delta^{-n_k}(x_k^i))}\mid S(\boldsymbol{x}^i)\mid^2\ll\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\mid m_\lambda\mid\leqslant N_\lambda}\mid a_m\mid^2 \quad ⑥$$

证明 对每一个 $\boldsymbol{x}^i$ 取函数

$$\varepsilon_i(\boldsymbol{x})=\begin{cases}e^{\frac{r^2}{r^2-\delta^2(\boldsymbol{x}^i)}}, & r\leqslant\delta(\boldsymbol{x}^i)\\ 0, & r\geqslant\delta(\boldsymbol{x}^i)\end{cases}$$

则 $\varepsilon_i(\boldsymbol{x})$ 为无穷可微，且 $D_x^j\varepsilon_i(\boldsymbol{x})\ll\delta^{-j}(\boldsymbol{x}^i)$，$j=j_1+\cdots+j_n$。令

$$\varepsilon(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\varepsilon_i(\boldsymbol{x}),当\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^i\mid\leqslant\delta(\boldsymbol{x}^i)\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

$$f_i(\boldsymbol{x})=\varepsilon_i(\boldsymbol{x})S(\boldsymbol{x}),\Omega_i:\mid\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}\mid\leqslant\delta$$

其中，Ω 表单位立方体，在式④中令 $l=n$，得

$$\begin{aligned}\mid f_i(\boldsymbol{x}^i)\mid^2=\mid S(\boldsymbol{x}^i)\mid^2&\leqslant c\left(\int_{\Omega_i}\mid f_i(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega_i}\sum_{l=l_1+\cdots+l_n}\left(\frac{\partial^l f_i}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}\right)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\\ &c\left(\int_{\Omega_i}\mid f_i(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{l=l_1+\cdots+l_n}\sum_{l-j的分量\geqslant0}\left(\int_{\Omega_i}\mid D_x^j\varepsilon_i(\boldsymbol{x})D^{l-j}S(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]\leqslant\\ &c\left(\int_{\Omega_i}\mid f(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{l=l_1+\cdots+l_n}\sum_{l-j的分量\geqslant0}\delta^{-j}(\boldsymbol{x}^i)\left(\int_{\Omega_i}\mid D^{l-j}S(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{P}\frac{1}{N^n+\delta^n(\boldsymbol{x}^i)}\mid S(\boldsymbol{x}^i)\mid^2\leqslant\\ &C\sum_{i=1}^{P}\left(\int_{\Omega_i}\mid f_i(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{l=l_1+\cdots+l_n}\sum_{l-j的分量\geqslant0}\frac{1}{N^n}\left(\int_{\Omega_i}\mid D^{l-j}S(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]\leqslant\\ &c\left(\int_{\Omega}\mid S(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{l=l_1+\cdots+l_n}\sum_{l-j的分量\geqslant0}\frac{1}{N^n}\left(\int_{\Omega}\mid D^{l-j}S(\boldsymbol{x})\mid^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]\ll\\ &\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{\mid m_\lambda\mid\leqslant N_\lambda}\mid a_m\mid^2\end{aligned}$$

令 $S\left(\frac{\alpha}{\mathscr{D}}\right)=\sum_{v\in\Gamma}a_vE\left(\frac{\alpha_v}{\mathscr{D}}\right)$，则有引理 2.

引理 2

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant d}{}'\frac{1}{\prod_{\lambda=1}^{k}(N_\lambda^{n_\lambda}+(N\mathscr{D}\cdot d)^{\frac{n_\lambda}{n}})}\sum_{\substack{\alpha\bmod\mathscr{D}\\(\alpha,\mathscr{D})=1}}\left|S\left(\frac{\alpha}{\mathscr{D}}\right)\right|^2\ll\sum_{v\in\Gamma}\mid a_v\mid^2 \quad ⑦$$

其中 $\sum{}'$ 的意思是指对所有无分支素理想因子的乘积求和.

证明

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant d}{}' \frac{\sum\limits_{a \bmod \mathscr{D}} \left| S\left(\frac{\alpha}{\mathscr{D}}\right) \right|^2}{\prod\limits_{\lambda=1}^{k} \left(N_\lambda^{n_\lambda} + (N\mathscr{D}\cdot d)^{\frac{n_\lambda}{n}} \right)} =$$

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant d}{}' \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{k} \left(N_\lambda^{n_\lambda} + (N\mathscr{D}\cdot d)^{\frac{n_\lambda}{n}} \right)} \sum_{\substack{a \bmod \mathscr{D} \\ (a,\mathscr{D})=1}} \left| \sum_{v\in\Gamma} a_v e\left(\operatorname{tr} \frac{v\alpha^*}{q} \right) \right| \leqslant$$

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant d}{}' \frac{1}{\prod\limits_{\lambda=1}^{k} \left(N_\lambda^{n_\lambda} + (N\mathscr{D}\cdot d)^{\frac{n_\lambda}{n}} \right)} \left| \sum_{v\in\Gamma} a_v e(r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n) \right|^2 \ll \sum_{v\in\Gamma} |a_v|^2 \qquad ⑧$$

上面的最后一步用到了 $|r_i - \tilde{r}_i| \gg (dN\mathscr{D})^{-\frac{1}{n}}$.(参看相关文献①中引理 5.)

和相关文献① 中引理 7 的推导过程类似,容易得到

引理 3 设 $S(\chi) = \sum\limits_{v\in\Gamma} a_v \chi(\mathscr{A}_v)$,则

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant d}{}' \frac{N(\mathscr{D})}{\phi(\mathscr{D})} \prod_{\lambda=1}^{k} \frac{1}{\left(N_\lambda^{n_\lambda} + (dN\mathscr{D})^{\frac{n_\lambda}{n}} \right)} \sum_{\chi \bmod \mathscr{D}}{}^* |S(\chi)|^2 \ll \sum_{v\in\Gamma} |a_v|^2$$

10.3 应用

我们把上面的引理用到代数数域上,就能得到

定理 2

$$\left| \sum_{v\in\Gamma} a_v \right|^2 \ll \frac{N_1^{n_1} \cdots N_k^{n_k}}{L'} \sum_{v\in\Gamma} |a_v|^2 \qquad ⑨$$

其中,a_v 为复数集合,对于每一素理想 P,以 $\omega(P)$ 表使 $a_v = 0$ 的 v 的 mod P 的剩余类数.

$$L' = \sum_{NQ\leqslant x} \mu^2(Q) \prod_{\lambda=1}^{k} \frac{1}{\left(1 + N_\lambda^{-n_\lambda} (NQ\cdot x)^{\frac{n_\lambda}{n}}\right)} \prod_{P|Q} \frac{\omega(P)}{NP - \omega(P)}$$

且 Q 的不同素因子,整除不同的有理素数.

如果 a_v 只取 0 与 1 二值,则得到 Γ 中的整数 v 筛去属于若干个剩余类中的 v 之后的估计式.

欲证明此定理,只须证明如下的引理:

引理 4

$$\left| \sum_{v\in\Gamma} a_v \right|^2 \mu^2(Q) \prod_{P|Q} \frac{\omega(P)}{NP - \omega(P)} \leqslant \sum_{a \bmod Q}{}^* \left| S\left(\frac{\alpha}{Q}\right) \right|^2 \qquad ⑩$$

---

① Robin J. Wilson. The large sieve in Algebraic number Fields, Mathematika, 16:2(1969), 189-240.

此引理证明之后，问题就归结到

$$\sum_{NQ\leqslant x}\prod_{\lambda}\frac{1}{(N_{\lambda}^{n_{\lambda}}+(NQ\cdot x)^{\frac{n_{\lambda}}{n}})}\sum_{\substack{a \bmod Q\\(a,Q)=1}}\left|S\left(\frac{\alpha}{Q}\right)\right|^{2}\ll\sum_{v\in\Gamma}|a_{v}|^{2}$$

而此即引理 2.

引理 4 的证明　由 10.1 中 Q 的定义知 Q 无平方因子，凡使 $a_v=0$ 之 v 构成集合 Γ_1，其它的 v 构成 Γ_2，设对于素理想 P_i 来说，mod P_i 的 NP_i 个剩余类的代表为 $v_i^1,\cdots,v_i^{NP_i}$，设 Γ_1 中的 v 占有前 $\omega(P_i)$ 个剩余类，我们知道由孙子定理 $\sum_i M'_iM_iv_i^j$ 将构成 mod Q 的一组完全剩余系，其中

$$M'_iM_i\equiv 1\pmod{p_i}$$

$$q=p_1\cdots p_k=p_iM_i$$

以 $\beta_1,\cdots,\beta_{NQ}$ 表上述剩余系，$R(Q)$ 表诸 β 之集合，对于 $a_v\neq 0$ 之 v 满足 $(v-\beta,Q)=1$ 者，容易看出 $R(Q)$ 中之 β 正是所有 $\sum_i M'_iM_iv_i^j,j\leqslant\omega(P_i)$ 者. 事实上，对于 Γ_2 中之 v，$\left(v-\sum_i M'_iM_iv_i^j,Q\right)=1,j\leqslant\omega(P_i)$，否则，存在 P_i 使 $P_i\left|\left(v-\sum_i M'_iM_iv_i^j\right)\right.$，所以 $v\equiv\sum_i M'_iM_iv_i^j(P_i)$，所以 $v\equiv v_i^j(P_i),j\leqslant\omega(P_i)$，故 $v\in\Gamma_1$ 内，此不可；又如对 Γ_2 中之所有 v，$\left(v-\sum_i M'_iM_iv_i^j,Q\right)=1$，其中 j 可跑过某些大于等于 $\omega(P_i)$ 者，则必有某些 $j\geqslant\omega(P_i)$ 使 $\left(v-\sum_i M'_iM_iv_i^j,P_i\right)=1$，即 $(v-M'_iM_iv_i^j,P_i)=1$ 或 $(v-v_i^j,P_i)=1$，所以 $v\not\equiv v_i^j(P_i),j\geqslant\omega(P_i)$，此不可，故无 $j\geqslant\omega(P_i)$ 者. 上面就证明了 $R(Q)$ 中恰好含有 $\prod_{P|Q}\omega(P)$ 个数，由 Ramanujan 公式知

$$\mu(Q)=\sum_{\substack{a \bmod Q\\(a,Q)=1}}E\left(\frac{\alpha}{Q}\right)$$

如 $(\beta,Q)=1$，则亦有 $\mu(Q)=\sum\limits_{\substack{a \bmod Q\\(a,Q)=1}}E\left(\frac{\alpha\beta}{Q}\right)$，故对所有的 $\beta\in R(Q)$ 有

$$a_v\mu(Q)=\sum_{\substack{a \bmod Q\\(a,Q)=1}}a_vE\left(\frac{(v-\beta)\alpha}{Q}\right)$$

对所有的 v 及 $\beta\in R(Q)$ 求和得

$$\left(\sum_{v\in\Gamma}a_v\right)\mu(Q)\prod_{P|Q}\omega(P)=\sum_{\substack{a \bmod Q\\(a,Q)=1}}\left[\left(\sum_{v\in\Gamma}a_vE\left(\frac{v\alpha}{Q}\right)\right)\left(\sum_{\beta\in R(Q)}E\left(\frac{-\alpha\beta}{Q}\right)\right)\right]$$

$$\left|\sum_{v\in\Gamma}a_v\right|^2\mu^2(Q)\prod_{P|Q}\omega^2(P)\leqslant\left(\sum_{\substack{a \bmod Q\\(a,Q)=1}}\left|S\left(\frac{\alpha}{Q}\right)\right|^2\right)\left(\sum_{\substack{a \bmod Q\\(a,Q)=1}}\left|\sum_{\beta\in R(Q)}E\left(\frac{-\beta\alpha}{Q}\right)\right|^2\right)$$

但最后一个乘积等于

$$\prod_{P\mid Q}\Big(\sum_{\substack{\alpha \bmod P\\(\alpha,P)=1}}\Big|\sum_{\beta\in R(P)}E\Big(\frac{-\alpha\beta}{P}\Big)\Big|^2\Big)=\prod_{P\mid Q}\Big(\sum_{\beta_1\in R(P)}\sum_{\beta_2\in R(P)}\sum_{\substack{\alpha \bmod P\\(\alpha,P)=1}}E\Big(\frac{\alpha(\beta_2-\beta_1)}{P}\Big)\Big)$$

易知最内和当 $P\mid(\beta_2-\beta_1)\mid$ 时为 $NP-1$，否则为 -1，故得

$$\text{上式}=\prod_{P\mid Q}((NP-1)\omega(P)-\omega(P)(\omega(P)-1))=\prod_{P\mid Q}\omega(P)(NP-\omega(P))$$

引理证毕.

注：$\sum_{\substack{\alpha \bmod Q\\(\alpha,Q)=1}}\Big|\sum_{\beta\in R(Q)}E\Big(\frac{-\beta\alpha}{Q}\Big)\Big|^2=\prod_{P\mid Q}\Big(\sum_{\alpha \bmod P}\Big|\sum_{\beta\in R(P)}E\Big(\frac{-\alpha\beta}{P}\Big)\Big|^2\Big)$ 的证明如下：

(1) α 可写成 $\alpha=\sum_{i=1}^{k}x_i\alpha_i$，$x_ip_i=p_1\cdots p_k$，$P_k\mid p_k$，其中 α_i 跑过 mod P_i 的既约剩余类，所以

$$E\Big(\frac{-\beta\alpha}{Q}\Big)=\prod_i E\Big(\frac{-\beta(x_i\alpha_i)}{P_1\cdots P_k}\Big)=$$

$$\prod_i e\Big(\mathrm{tr}\,\frac{-\beta x_i\alpha_i^*}{p_1\cdots p_k}\Big)=\prod_i e\Big(\mathrm{tr}\,\frac{-\beta\alpha_i^*}{p_i}\Big)=\prod_i E\Big(\frac{-\beta\alpha_i}{P_i}\Big)$$

而

$$\beta=\sum_i M'_iM_iv_i^j\equiv v_i^j(\bmod P_i)$$

所以

$$E\Big(\frac{-\beta\alpha}{Q}\Big)=\prod_i E\Big(\frac{-v_i^j\alpha_i}{P_i}\Big)$$

(2) 所以上式右端等于

$$\prod_{P\mid Q}\Big(\sum_{\alpha \bmod P}\Big|\sum_{\beta\in R(P)}E\Big(\frac{-\alpha\beta}{P}\Big)\Big|^2\Big)$$

10.4 均值定理

为了证明均值定理，我们在引理 3 中取 $k=1$，可得

引理 5

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant d}{}'\frac{N\mathscr{D}}{\phi(\mathscr{D})}\sum_{\chi \bmod \mathscr{D}}{}^*|S(\chi)|^2\ll(N+d^2)\sum_{v\in\Gamma}|a_v|^2 \qquad ⑪$$

$$\sum_{d_1<N\mathscr{D}\leqslant d}{}'\frac{1}{\phi(\mathscr{D})}\sum_{\chi \bmod \mathscr{D}}{}^*|S(\chi)|^2\ll\Big(\frac{N}{d_1}+d\Big)\sum_{v\in\Gamma}|a_v|^2 \qquad ⑫$$

其中 $N=\max_{v\in\Gamma}N(v)$. 如果 $S(\chi)$ 里 $\chi(\mathscr{A})$ 的系数依赖于理想 $\mathscr{A}$，则上面 N 应相应换为 $N=\max N\mathscr{A}$.

令

$$\psi(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D})=\sum_{\substack{N\mathscr{B}\mathscr{A}\leqslant y\\ \mathscr{B}\mathscr{A}\equiv\mathscr{X} \bmod \mathscr{D}}}\Lambda(\mathscr{B})$$

其中$(\mathscr{A},\mathscr{D}) = (\mathscr{S},\mathscr{D}) = 1$,则有

均值定理 若$1 \leqslant a_1 < a_2 \leqslant x^{1-\varepsilon}$,则

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant x^{\frac{1}{n+1}}\log^{-b}x} \max_{y\leqslant x} \max_{(\mathscr{S},\mathscr{D})=1} \frac{1}{T(\mathscr{D})}\left| \sum_{a_1\leqslant N\mathscr{A}<a_2} f(\mathscr{A}) \cdot \left(\psi(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D}) - \frac{y}{N\mathscr{A}h(\mathscr{D})}\right)\right| \ll \frac{x}{\log^a x} \quad ⑬$$

其中,b 为由 a 而定之适当大正常数,a_1,a_2 一般可为 x 的函数.

证明 当 $a_2 \leqslant \log^b x, b > \frac{n+1}{n}B(a+1)$,$B(a)$ 为推广的 Bombieri 定理所得出的常数 $B(A)$.参看相关文献①.

这样

$$x^{\frac{1}{n+1}}\log^{-b}x \leqslant \left(\frac{x}{N\mathscr{A}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\log^{-b}x(N\mathscr{A})^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \left(\frac{x}{N\mathscr{A}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\log^{-\frac{n}{n+1}b}x \leqslant \left(\frac{x}{N\mathscr{A}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\log^{-B(a+1)}\frac{x}{N\mathscr{A}}$$

故由相关文献①中推出的推广的 Bombieri 定理得出

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant x^{\frac{1}{n+1}}\log^{-b}x} \max_{y\leqslant x} \max_{(\mathscr{S},\mathscr{D})=1} \frac{1}{T(\mathscr{D})}\left| \sum_{N\mathscr{A}\leqslant\log^b x} f(\mathscr{A}) \times \left(\psi\left(\frac{y}{N\mathscr{A}},\mathscr{S},\mathscr{D}\right) - \frac{y}{N\mathscr{A}h(\mathscr{D})}\right)\right| \leqslant$$

$$\sum_{N\mathscr{A}\leqslant\log^b x}\ \sum_{N\mathscr{D}\leqslant\left(\frac{x}{N\mathscr{A}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\log^{-b(a+1)}\frac{x}{N\mathscr{A}}} \max_{y\leqslant x} \max_{(\mathscr{S},\mathscr{D})=1} \frac{1}{T(\mathscr{D})} \cdot$$

$$\left|\psi\left(\frac{y}{N\mathscr{A}},\mathscr{S},\mathscr{D}\right) - \frac{y}{N\mathscr{A}h(\mathscr{D})}\right| \ll \sum_{N\mathscr{A}\leqslant\log^b x} \frac{\frac{x}{N\mathscr{A}}}{\log^{(a+1)}\frac{x}{N\mathscr{A}}} \leqslant \frac{x}{\log^a x}$$

上面用到了

$$\sum_{N\mathscr{A}\leqslant x}\frac{1}{N\mathscr{A}} \ll \log x$$

故只须考虑

$$\log^b x < a_1 \leqslant a_2 < x^{1-\varepsilon} \quad ⑭$$

为此,我们令

$$\psi_1(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D}) = \sum_{\substack{N\mathscr{B},\mathscr{A}\leqslant y\\ \mathscr{B}\mathscr{A}\equiv\mathscr{S} \bmod \mathscr{D}}} \Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}} \quad ⑮$$

先证

$$\sum_{N\mathscr{D}\leqslant x^{\frac{1}{n+1}}\log^{-b}x} \max_{y\leqslant x} \max_{(\mathscr{S},\mathscr{D})=1} \frac{1}{T(\mathscr{D})}\left| \sum_{a_1\leqslant N\mathscr{A}<a_2} f(\mathscr{A}) \cdot \left(\psi_1(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D}) - \frac{y}{N\mathscr{A}h(\mathscr{D})}\right)\right| \ll \frac{x}{\log^a x}$$

---

① Robin J. Wilson. The large sieve in Algebraic number Fields, Mathematika, 16:2(1969), 189-240.

实际上,我们还可得出较强的结果,即可将上式左边算到 $\sum'_{N\mathscr{A}\leq x^{\frac{1}{2}}\log^{-b}x}$.注意

$$\psi_1(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D}) = \sum_{\substack{N\mathscr{B}\mathscr{A}\leq y\\ \mathscr{B}\mathscr{A}\equiv\mathscr{S}\bmod\mathscr{D}}} \Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}} =$$

$$\frac{1}{h(\mathscr{D})}\sum_{\chi}\bar{\chi}(\mathscr{S})\chi(\mathscr{A})\sum_{\substack{N\mathscr{B}\leq\frac{y}{N\mathscr{A}}\\ (\mathscr{B},\mathscr{D})=1}}\chi(\mathscr{B})\Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}}$$

所以

$$\psi_1(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D}) - \frac{1}{h(\mathscr{D})}\sum_{\substack{N\mathscr{B}\leq\frac{y}{N\mathscr{A}}\\ (\mathscr{B},\mathscr{D})=1}}\Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}} =$$

$$\frac{1}{h(\mathscr{D})}\sum_{\chi\neq\chi_0}\bar{\chi}(\mathscr{S})\chi(\mathscr{A})\sum_{\substack{N\mathscr{B}\leq\frac{y}{N\mathscr{A}}\\ (\mathscr{B},\mathscr{D})=1}}\chi(\mathscr{B})\Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}} =$$

$$\frac{1}{h(\mathscr{D})}\sum_{\mathscr{D}_1|\mathscr{D}}\sum_{\chi\bmod\mathscr{D}_1}{}^{*}\bar{\chi}(\mathscr{S})\chi(\mathscr{A})\sum_{\substack{N\mathscr{B}\leq\frac{y}{N\mathscr{A}}\\ (\mathscr{B},\mathscr{D}_2)=1}}\chi(\mathscr{B})\Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}}$$

由于

$$\sum_{\substack{N\mathscr{B}\leq\frac{y}{N\mathscr{A}}\\ (\mathscr{B},\mathscr{D})=1}}\Lambda(\mathscr{B}) = \frac{y}{N\mathscr{A}} + O\left(\frac{y}{N\mathscr{A}}e^{-\varepsilon\sqrt{\log y}}\right)$$

所以

$$I = \sum_{N\mathscr{D}\leq d}{}' \max_{y\leq x}\max_{(\mathscr{S},\mathscr{D})=1}\frac{1}{T(\mathscr{D})}\left|\sum_{a_1\leq N\mathscr{A}<a_2} f(\mathscr{A})\cdot\right.$$

$$\left.\left(\psi_1(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D}) - \frac{y}{N\mathscr{A}\mathscr{B}}\right)\right| \leq$$

$$\sum_{N\mathscr{D}_1\leq d}{}'\frac{1}{\phi(\mathscr{D}_1)}\sum_{N\mathscr{D}_2\leq d}{}'\frac{1}{\phi(\mathscr{D}_2)}$$

$$\max_{y\leq x}\sum_{\chi}{}^{*}\left|\sum_{\substack{a_1\leq N\mathscr{A}<a_2\\ (\mathscr{A},\mathscr{D}_2)=1}} f(\mathscr{A})\chi_{\mathscr{D}_1}(\mathscr{A})\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{\substack{N\mathscr{B}\leq\frac{cx}{N\mathscr{A}}\\ (\mathscr{B},\mathscr{D}_2)=1}}\chi_{\mathscr{D}_1}(\mathscr{B})\Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}}\right| \leq$$

$$\log x\max_{N\mathscr{M}\leq d}\sum_{N\mathscr{D}\leq d}{}'\frac{1}{\phi(\mathscr{D})}\max_{y\leq x}\sum_{\chi}{}^{*}\left|\sum_{\substack{a_1\leq N\mathscr{A}<a_2\\ (\mathscr{A},\mathscr{M})=1}} f(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A})\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{\substack{N\mathscr{B}\leq\frac{y}{N\mathscr{A}}\\ (\mathscr{B},\mathscr{M})=1}}\chi(\mathscr{B})\Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}}\right| + O\left(\frac{x}{\log^a x}\right)$$

由 Siegel-Walfisz 定理知,当 $d_1 = \log^{\frac{b}{2}}x$ 时

$$I \leqslant \log x \max_{N\mathscr{M}\leqslant d} \sum_{d_1 < N\mathscr{D}\leqslant d} \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \max_{y\leqslant x} \sum_{\chi}{}^{*} \Big| \sum_{a_1\leqslant N\mathscr{A}\leqslant a} f(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A}) \cdot \sum_{\substack{N\mathscr{B}\leqslant \frac{y}{N\mathscr{A}} \\ (\mathscr{B},\mathscr{M})=1}} \chi(\mathscr{B}) \log \frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}} \Lambda(\mathscr{B}) \Big| + O\Big(\frac{x}{\log^a x}\Big)$$

令

$$I_{\mathscr{M}} \leqslant \sum_{d_1 < N\mathscr{D}\leqslant d} \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \max_{y\leqslant x} \sum_{\chi}{}^{*} \Big| \sum_{\substack{a_1\leqslant N\mathscr{A}< a_2 \\ (\mathscr{A},\mathscr{M})=1}} f(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A}) \cdot \sum_{\substack{N\mathscr{B}\leqslant \frac{y}{N\mathscr{A}} \\ (\mathscr{B},\mathscr{M})=1}} \chi(\mathscr{B})\Lambda(\mathscr{B}) \log \frac{y}{N\mathscr{A}N\mathscr{B}} \Big| \tag{16}$$

$$I_m(j,k) = \sum_{2^j d_1 < N\mathscr{D}\leqslant 2^{j+1}d_1}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \max_{y\leqslant x} \sum_{\chi}{}^{*} \Big| \sum_{2^k a_1\leqslant N\mathscr{A}< 2^{k+1}d_1} g(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A}) \cdot \sum_{N\mathscr{B}\leqslant \frac{y}{N\mathscr{A}}} \chi(\mathscr{B}) d^k(\mathscr{B}) \tag{17}$$

其中，$g(\mathscr{A}) = f(\mathscr{A}), d^k(\mathscr{B}) = \Lambda(\mathscr{B})\log\frac{y}{N\mathscr{A}\mathscr{B}}$，当$(\mathscr{A},\mathscr{M}) = (\mathscr{B},\mathscr{M}) = 1$时，$g(\mathscr{A}) = 0, d^k(\mathscr{B}) = 0$，其他.

今取

$$M_2 = (2^j d_1)^2, N = e^{\log^2 x}$$

$$\begin{aligned} f_k(s,\chi) &= \sum_{(\mathscr{A})} \frac{d^k(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A})}{(N\mathscr{A})^s} = \\ &\sum_{N\mathscr{A}\leqslant M_2} \frac{d^k(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A})}{N\mathscr{A}^s} + \sum_{M_2 < N\mathscr{A}\leqslant N} \frac{d^k(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A})}{N\mathscr{A}^s} + O(x^{-\frac{4}{5}}) = \\ &f_1(s,\chi) + f_2(s,\chi) + O(x^{-\frac{4}{5}}) \end{aligned} \tag{18}$$

以下以$(\mathscr{D})$简记

$$2^j d_1 < N\mathscr{D} \leqslant 2^{j+1} d_1$$

则

$$\begin{aligned} I_m(j,k) &\ll \int_{(1/2)} \sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |g_k(s,\chi) f_1(s,\chi)| \frac{|y^s|}{|s|^2} |\mathrm{d}s| + \\ &\int_c \sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |g_k(s,\chi) f_2(s,\chi)| \frac{|y|^a}{|s|^2} |\mathrm{d}s| + O\Big(\frac{x}{\log^a kx}\Big) \leqslant \\ &x^{\frac{1}{2}} \max_{a=\frac{1}{2}} \Big(\sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |g_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |f_1(s,\chi)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} + \\ &x \max_{a=c=1+\frac{1}{\log x}} \Big(\sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |g_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |f_2(s,\chi)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

易知,当 $\mathrm{Re}\, s = a = \frac{1}{2}$ 时,由引理 4

$$\sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |g_k(s,\chi)|^2 \ll \left(2^{j+1}d_1 + \frac{2^{k+1}a_1}{2^j d_1}\right)\log x$$

$$\sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |f_1(s,\chi)|^2 \ll \left(2^{j+1}d_1 + \frac{(2^j d_1)^2}{2^j d_1}\right)\log^2 x$$

又 $\mathrm{Re}\, s = a = 1 + \frac{1}{\log x}$ 时

$$\sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |f_2(s,\chi)|^2 \ll \log^2 x \sum_{i=0}^{2\log^2 x} \sum_{(\mathscr{D})}{}' \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \cdot$$

$$\sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{2^i M_2 \leqslant N\mathscr{A} < 2^{i+1}M_2} \frac{d^k(\mathscr{A})\chi(\mathscr{A})}{N\mathscr{A}} \right| \ll \left(\frac{2^{j+1}d_1}{M_2} + \frac{1}{2^j d_1}\right)\log^6 x$$

$$\sum_{(\mathscr{D})} \frac{1}{\phi(\mathscr{D})} \sum_{\chi}{}^{*} |g_k|^2 \ll \left(\frac{2^{j+1}d_1}{2^k a_1} + \frac{1}{2^j d_1}\right)$$

故对适当大的 b,得

$$I_{\mathscr{M}}(j,k) \ll x^{\frac{1}{2}}\log^4 x(d^2 + a_2)^{\frac{1}{2}} + x\log^5 x\left(\frac{1}{2^k a_1} + \frac{1}{d_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{x}{\log^{(a+3)} x}\right) \ll$$

$$dx^{\frac{1}{2}}\log^4 x + x\log^{(5-\frac{b}{2})} x + O\left(\frac{x}{\log^{(a+3)} x}\right) = O\left(\frac{x}{\log^{(a+3)} x}\right)$$

故对所有 k

$$I_{\mathscr{M}}(j,k) = O\left(\frac{x}{\log^{(a+3)} x}\right)$$

$$I_{\mathscr{M}} \ll \log^2 x \frac{x}{\log^{(a+3)} x} = O\left(\frac{x}{\log^{(a+1)} x}\right)$$

故

$$I = O\left(\frac{x}{\log^a x}\right) \tag{19}$$

由上述对于 $\psi_1(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D})$ 的均值定理,经过熟知的方法,就可得到 $\psi(y,\mathscr{A},\mathscr{S},\mathscr{D})$ 的均值定理.

如果我们采用相关文献①的处理法,当然能把上述均值定理提成更一般的形式,即 A_1, A_2 可为 y 的函数,就是说,当 $1 \leqslant A_1(y) \leqslant N\mathscr{A} < A_2(y) \leqslant y^{1-\epsilon}$ 时,上述均值定理依然正确. 又相关文献① 中的均值定理的证法,实际上给出了 Bombieri 的均值定理的另一证法,此方法当然也可以推广到代数数域上来.

① 龙瑞麟.局部紧 Abel 群上的加权大筛法不等式.

从维诺格拉多夫到吴方

第六章

1 哥德巴赫问题①

——维诺格拉多夫

在本文里，我要来解决哥德巴赫关于任何大于等于 c_0（c_0 充分大）的奇数 N 可以表示成三个素数之和的问题，并导出表法的种数的渐近公式.

这里所运用的方法也有可能用来解决更一般的堆垒素数问题；例如，对于整数 $n > 1$，将整数 $N \geqslant c_0$ 表成

$$N = p_1^n + \cdots + p_s^n$$

的形式的问题（素变数的华林问题）. 但我不在这里来讨论这类一般性的问题.

为要解决哥德巴赫问题，我先来研究一个积分，它与哈代及李特伍德为了同一目的所曾指出的积分相似. 亦如将积分区间分成基本区间及余区间，关于对应于基本区间的那部分积分之研究，在 1937 年论哥德巴赫问题的工作出现之前不久，英国的学者们即曾做出了一般性的方法以佩治关于算术数列中的素数分布的结果为基础的埃斯特曼方法，这种方法，既可用于哥特巴赫问题，也可以用于更一般的素变数的堆垒问题. 这种方法是以近代的 L - 级数论为基础. 在这里，关于这一部分积分的研究，

① 摘自《数学进展》第一卷.

我利用了简化过的佩治的结果(引理1)结合着布朗方法的某些基本成分.对于与余区间对应的那部分积分的估值,我只用我自己的一般性方法.

在本文里,p 常表示素数,c_0 为一充分大的数,N 为大于等于 c_0 的整数,最后,$\ln N = r$.

引理1(佩治) 设 ε_0 为正数,c_1 与 c 为任意大的数.则在算术数列

$$qx + l, 0 < q \leqslant r^{c_1}, (q, l) = 1, 0 \leqslant l < q$$

中,其不超过 N 的素数的个数 $\pi(N, q, l)$ 可以表示成公式

$$\pi(N, q, l) = \frac{1}{q_1}\int_2^N \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} + H, q_1 = \varphi(q)$$

于此,对于一切 q,可能除去一列特殊的 q,其为某一满足条件

$$q_0 \geqslant r^{2-\varepsilon_0}$$

的 $q = q_0$ 的倍数者,之外,我们有不等式

$$H \ll \frac{Nr^{-c}}{q_1 r}$$

证明 此定理的证明,我不能放在这里,它是佩治①作出的.证明所根据的是一般 L 级数论,这是由迪利克雷、黎曼、阿达玛、哈代 - 李特伍德、朗道等人的劳力所研究出来的.

引理2 设 $\tau = Nr^{-c}$,于此,$c \geqslant 4$,又设

$$R = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (J(z))^3 \mathrm{e}^{-2\pi izN}\mathrm{d}z, J(z) = \int_2^N \frac{\mathrm{e}^{2\pi izx}}{\ln x}\mathrm{d}x$$

则有

$$R = \frac{N^2}{2r^3} + O\left(\frac{N^2}{r^4}\right)$$

证明 将积分 R 与积分

$$R_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (I(z))^3 \mathrm{e}^{-2\pi izN}\mathrm{d}z, I(z) = \int_2^N \frac{\mathrm{e}^{2\pi izx}}{r}\mathrm{d}x$$

比较,我们有

$$R - R_0 = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} ((J(z))^3 - (I(z))^3)\mathrm{e}^{-2\pi izN}\mathrm{d}z + \left(\int_{-1/\tau}^{1/\tau} (I(z))^3 \mathrm{e}^{-2\pi izN}\mathrm{d}z - R_0\right)$$

但在右边第一项中的被积函数,我们有

$$| J(z) - I(z) | < \int_2^N \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{r}\right)\mathrm{d}x \ll \frac{N}{r^2}$$

因之,此第一项将远远小于

① Proc. London Math. Soc. (2), 39, 1935, 116-141.

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau}\frac{N}{r^2}3z^2\mathrm{d}z \ll \int_0^{N-1}\frac{N^3}{r^4}\mathrm{d}z+\int_{N^{-1}}^{1/\tau}\frac{N}{r^4z^2}\mathrm{d}z \ll \frac{N^2}{r^4}$$

又右边第二项远远小于

$$\int_{1/\tau}^{\frac{1}{2}}z^3\mathrm{d}z \ll \int_{1/\tau}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{z^3r^3} \ll \frac{N^2}{r^{11}}$$

故 $R-R_0 \ll N^2r^{-4}$. 此外,假定

$$R' = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(S(z))^3\mathrm{e}^{-2\pi izN}\mathrm{d}z,\ S(z) = \sum_{x=3}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi izx}}{r}$$

我们即有

$$I(z)-S(z) \ll r^{-1}$$

$$R_0-R' \ll \int_0^{\frac{1}{2}}z^2r^{-1}\mathrm{d}z = \int_0^{N^{-1}}\frac{N^2}{r^3}\mathrm{d}z+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{r^3z^2} \ll \frac{N}{r^3}$$

因之,$R-R' \ll N^2r^{-4}$.但 r^3R' 显然是表示将数 N 表成

$$N = x_1+x_2+x_3$$

的形式的表法个数,于此,x_1,x_2,x_3 是大于 2 的整数.对每一 $x_1 = 3,4,\cdots,N-6$,等式 $x_2+x_3 = N-x_1$ 有 $N-x_1-5$ 次得以实现,故

$$r^3R' = \sum_{x_1=3}^{N-6}(N-x_1-5) = \frac{(N-7)(N-8)}{2} = \frac{N^2}{2}+O(N)$$

由是,我们的引理即已证明.

定理 1 将奇正数 N 表成三个素数之和

$$N = p_1+p_2+p_3$$

的形式的表法个数 $I(N)$ 可以写成公式

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3}S(N)+O\left(\frac{N^2}{r^{3.5-\varepsilon}}\right)$$

于此

$$S(N) = \prod_p\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod{}''\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)$$

$\prod_p$ 系展布于所有的素数,而 $\prod''$ 则仅展布于数目 N 的素因子.此外

$$S(N) > 0.6$$

推论(哥德巴赫定理) 存在一数 c_0,使得所有奇数 $N \geqslant c_0$ 皆可表成三个素数之和

$$N = p_1+p_2+p_3$$

的形式.

证明 设 $\tau = Nr^{-14}$,我们有

$$I(N)=\int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1}S_{\alpha}^{3}e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,S_{\alpha}=\sum_{p\leqslant N}e^{-2\pi i\alpha p}$$

包含所有形如

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,(a,q)=1,-\tau^{-1}\leqslant z\leqslant\tau^{-1},0<q\leqslant r^{3}$$

的 α 的区间名为基本区间；自区间 $-\tau^{-1}\leqslant\alpha\leqslant-\tau^{-1}+1$ 中除去基本区间后留下之区间名为余区间.所有余区间中之 α 皆可表成

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,(a,q)=1,-\frac{1}{q\tau}\leqslant z\leqslant\frac{1}{q\tau},r^{3}<q\leqslant\tau$$

的形式.不难看出，当 N 充分大时，对应于不同数对 a 与 q 之基本区间不可能包含共有的 α 值.实际上，由

$$\frac{a}{q}+z=\frac{a_1}{q_1}+z_1,\frac{a}{q}\gtrless\frac{a_1}{q_1},|z|\leqslant\frac{1}{\tau},|z_1|\leqslant\frac{1}{\tau}$$

就会得出

$$\left|\frac{aq_1-a_1q}{qq_1}\right|\leqslant\frac{2}{\tau},\frac{1}{qq_1}\leqslant\frac{2}{\tau},N\leqslant 2r^{20}$$

对应于所说的将积分区间分成基本区间及余区间的分法，积分 $I(N)$ 即被分成两项之和

$$I(N)=I_1(N)+I_2(N)$$

(1) $I_2(N)$ 的估值. 当 $q>r^{14}$ 时，有

$$S_{\alpha}\ll Nr^{4.5}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{N}}+e^{-0.5\sqrt{r}}\right)\ll Nr^{-2.5}$$

而当 $r^{3}<q\leqslant r^{14}$ 时有

$$S_{\alpha}\ll Nr^{-2.5+\varepsilon_1}$$

因之

$$I_2(N)\ll Nr^{-2.5+\varepsilon_1}\int_0^1|S_{\alpha}|^2d\alpha=Nr^{-2.5+\varepsilon_1}\int_0^1\sum_{p'\leqslant N}\sum_{p\leqslant N}e^{2\pi i\alpha(p-p')}d\alpha\ll N^2r^{-3.5+\varepsilon_1}$$

(2) 与不算为特殊的 q 值对应的基本区间. 任给一 ε_0，并令 $c_1=3,c=48$，则对引理 1 中所说的 H，可能除去一列特殊的 q，其为某一满足条件

$$q_0\geqslant r^{2-\varepsilon_0}$$

的 $q=q_0$ 的倍数者，之外，我们有

$$H\ll\frac{Nr^{-49}}{q_1}$$

我们现来研究积分 $I_1(N)$ 中对应于包有分数 $\frac{a}{q}$ 的部分 $I_{a,q}$，这里的分母 q 不算

在特殊者之内，且满足条件 $q \leqslant r^3$. 在如是之区间中任取一 α，我们将和数 S_α 分成$[r^{31}]$个形如

$$S_{\alpha,N_1} = \sum_{N_1-A<p\leqslant N_1} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p}, A = N[r^{31}]^{-1}$$

之和. 对于这和数中的项，$|zp - zN_1| \leqslant zA$；又这种项的数目（引理 1，令 $q = 1$）将远远小于 Ar^{-1}，而 $zAAr^{-1} \ll Ar^{-18}$. 因之

$$S_{\alpha,N_1} = e^{2\pi i zN_1}\sum_{N_1-A<p\leqslant N_1} e^{2\pi i\frac{a}{q}p} + O(Ar^{-18})$$

但当满足条件 $0 \leqslant l < q, (l,q) = 1$ 的 l 给定时，区间 $N_1 - A < p \leqslant N_1$ 中形如 $qx + l$ 的素数 p 的个数可以表示成公式

$$\frac{1}{q_1}\int_{N_1-A}^{N_1}\frac{dx}{\ln x} + O\left(\frac{Ar^{-18}}{q_1}\right)$$

因之

$$S_{\alpha,N_1} = \sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\frac{1}{q_1}\int_{N_1-A}^{N_1}\frac{e^{2\pi i zN_1}}{\ln x}dx + O(Ar^{-18})$$

再我们有

$$\sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l} = \mu(q),\ |zN_1 - zx| \leqslant |z|A, \frac{1}{q_1}\int_{N_1-A}^{N_1}\frac{|z|A}{\ln x}dx \ll \frac{|z|A^2}{q_1 r} \ll \frac{Ar^{-18}}{q_1}$$

$$S_{\alpha,N_1} = \int_{N_1-A}^{N_1}\frac{e^{2\pi i zx}}{\ln x}dx + O(Ar^{-18})$$

$$S_\alpha = \frac{\mu(q)}{q_1}J(z) + O(Nr^{-18}), J(z) = \int_2^N\frac{e^{2\pi i zx}}{\ln x}dx$$

但

$$\frac{1}{q_1}J(z) \ll \frac{Z}{q_1}, \frac{Z}{q_1} \gg \frac{\tau r^{-1}}{q_1} \gg Nr^{-18}, S_\alpha^3 - \frac{\mu(q)}{q_1^3}(J(z))^3 \ll \frac{Z^2}{q_1^2}Nr^{-18}$$

$$I_{\alpha,q} - \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\frac{\mu(q)}{q_1^3}(J(z))^3 e^{-2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}dz \ll \int_0^{\tau^{-1}} Z^2 q_1^{-2} Nr^{-18}dz \ll$$

$$Nr^{-18}q_1^{-2}\left(\int_0^{N^{-1}} N^2 r^{-2}dz + \int_{N^{-1}}^{\tau^{-1}}\frac{dz}{r^2 z^2}\right) \ll N^2 r^{-20} q_1^{-2}$$

对于给定的 q，就数列 $0,1,\cdots,q-1$ 中所有与 q 互素的 a 求和，并注意这些 a 值关于模 q 仍某种次序与 $-a$ 所取之值同余，我们即得

$$\sum_a I_{\alpha,q} = G(q)R + O(N^2 r^{-20} q_1^{-1})$$

$$G(q) = \frac{\mu(q)}{q_1^3}\sum_a e^{2\pi i\frac{a}{q}N}; R = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}(J(z))^3 e^{-2\pi i zN}dz$$

由是，由引理 2 及不等式 $|G(q)| \leqslant q_1^{-2}$，我们易得

$$\sum_a I_{a,q}=\frac{N^2}{2r^3}G(q)+O\left(\frac{N^2}{r^4q_1^2}\right)$$

(3) 对应于特殊 q 值之基本区间. 现设 q 属于特殊者之内. 我们有

$$I_{a,q}=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\sum_{p'\leqslant N}\sum_{p''\leqslant N}\sum_{p'''\leqslant N}e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)(p'+p''+p'''-N)}dz$$

令 $D=[r^{33}]$,则

$$A=ND^{-1}$$

$$I_{a,q}=\sum_{s'=1}^{D}\sum_{s''=1}^{D}\sum_{s'''=1}^{D}I'_{a,q}$$

于此

$$I'_{a,q}=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\sum_{(s'-1)A<p'\leqslant s'A}\sum_{(s''-1)A<p''\leqslant s''A}\sum_{(s'''-1)A<p'''\leqslant s'''A}e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)(p'+p''+p'''-N)}dz$$

将乘积 $zs'A,zs''A,zs'''A$ 分别代替 zp',zp'',zp''', 则除远远小于 $A^4r^{-3}\tau^{-2}\ll N^2r^{-8}D^{-3}$ 之误差外,积分 $I'_{a,q}$ 等于乘积 UW,于此

$$U=\sum_{(s'-1)A<p'\leqslant s'A}\sum_{(s''-1)A<p''\leqslant s''A}\sum_{(s'''-1)A<p'''\leqslant s'''A}e^{2\pi i\frac{a}{q}(p'+p''+p'''-N)}$$

$$W=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}e^{2\pi iz(s'+s''+s'''-D)A}dz$$

但

$$U\ll\frac{A^3r^{\varepsilon_2}}{r^3q^{1.5}},\ W\ll\min\left(\frac{1}{\tau},\frac{1}{|s'+s''+s'''-D|A}\right)$$

此外,对于给定的整数 $h\ll D$, $s'+s''+s'''-D=h$ 的解的个数将远远小于 D^2. 因之

$$I_{a,q}\ll\frac{N^2}{r^8}+\frac{A^3r^{\varepsilon_2}}{r^3q^{1.5}}D^2\left(\frac{1}{\tau}+\sum_{h=1}^{2D}\frac{1}{hA}\right)\ll\frac{N^2r^{\varepsilon_3}}{r^3q^{1.5}},\ \sum_a I_{a,q}\ll\frac{N^2r^{\varepsilon_3}}{r^3q^{0.5}}$$

由于 $N^2r^{-3}G(q)\ll N^2r^{-3}q_1^{-2}$,我们可以写

$$\sum_a I_{a,q}=\frac{N^2}{2r^3}G(q)+O\left(\frac{N^2r^{\varepsilon_3}}{r^3q^{0.5}}\right)$$

(4) $I(N)$ 的初步公式. 我们有

$$I_1(N)-\sum_{q\leqslant r^3}\frac{N^2}{2r^3}G(q)\ll\sum_{q\leqslant r^3}\frac{N^2}{r^4q_1^2}+\sum_{s\leqslant r^3q_0^{-1}}\frac{N^2r^{\varepsilon_3}}{r^3(q_0s)^{0.5}}\ll$$

$$\frac{N^2}{r^4}+\frac{N^2r^{\varepsilon_3}}{r^3\sqrt{q_0}}\sqrt{\frac{r^3}{q_0}}\ll\frac{N^2r^{\varepsilon_3}}{r^{3.5}}$$

$$\sum_{q>r^3}\frac{N^2}{2r^3}G(q)\ll\sum_{q>r^3}\frac{N^2}{r^3q_1^2}\ll\frac{N^2}{r^4}$$

$$I(N)=\frac{N^2}{2r^3}S(N)+O\left(\frac{N^2r^{\varepsilon}}{r^{3.5}}\right)$$

$$S(N)=\sum_{q=1}^{\infty}G(q)$$

(5) $S(N)$ 的转换与研究. 我们现来研究级数 $S(N)$. 不难证明, 对于两两互素的正数 $q_1,\cdots,q_k$, 我们有

$$G(q_1)\cdots G(q_k)=G(q_1\cdots q_k) \qquad ①$$

欲明此, 只须考察 $k=2$ 的情形即可. 令 $\varphi(q_1)=q_{1,1},\varphi(q_2)=q_{2,1}$, 我们有

$$G(q_1)G(q_2)=\frac{\mu(q_1)\mu(q_2)}{q_{1,1}^3q_{2,1}^3}\sum_{\substack{0\leqslant a_1<q_1\\(a_1,q_1)=1}}\sum_{\substack{0\leqslant a_2<q_2\\(a_2,q_2)=1}}e^{2\pi i\left(\frac{a_1}{q_1}N+\frac{a_2}{q_2}N\right)}=$$

$$\frac{\mu(q_1)\mu(q_2)}{(q_{1,1}q_{2,1})^3}\sum_{a_1}\sum_{a_2}e^{2\pi i\frac{a_1q_2+a_2q_1}{q_1q_2}N}=G(q_1q_2)$$

因为 $\mu(q_1)\mu(q_2)=\mu(q_1q_2),q_{1,1}q_{2,1}=\varphi(q_1q_2)$ 及 $a_1q_2+a_2q_1$ 跑过模 q_1q_2 的一既约剩余系.

由于 $G(q)\ll q_1^{-2}$, 故级数 $S(N)$ 绝对收敛. 级数

$$\xi_p=1+G(p)+G(p^2)+\cdots$$

也绝对收敛, 因为它的项皆包含在 $S(N)$ 内. 运用(1), 当 $x>2$ 时, 我们有

$$\prod_{p\leqslant x}\xi_p=\sum_{q\leqslant x}G(q)+\sum_{q>x}{}'G(q)$$

于此, $\sum'$ 系展布于不为大于 x 之素数所除尽的 q. 由于 $S(N)$ 绝对收敛, 故当 x 无限增大时, 右边前一项趋于 $S(N)$, 而第二项则趋于零. 因之, 若用记号 $\prod_p$ 来记展布于所有素数之上的乘积, 我们即有

$$S(N)=\prod_p\xi_p$$

但当 $s>1$ 时 $G(p^s)=0$, 此外, 显而易见

$$G(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{(p-1)^3}, \text{若 } N \text{ 不为 } p \text{ 除尽}\\[2ex]\dfrac{-1}{(p-1)^2}, \text{若 } N \text{ 能为 } p \text{ 除尽}\end{cases}$$

故得

$$S(N)=\prod{}'\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod{}''\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \qquad ②$$

于此, $\prod'$ 系展布于除不尽 N 之 p, 而 $\prod''$ 则展布于除得尽 N 之 p. 但我们有

$$\prod{}'\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)>1,\prod{}''\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)>\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)>\frac{6}{\pi^2}>0.6$$

因为在 $\prod''$ 中，由于 N 为奇，故只包含奇素数，因而常有 $p_1 - 1 \geqslant p$，此处的 p 是与 p_1 最接近且小于 p_1 的素数. 因而我们真正有 $S(N) > 0.6$.

等式 ② 可以改写成

$$S(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod{}'' \frac{1 - \frac{1}{(p-1)^2}}{1 + \frac{1}{(p-1)^3}} =$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod{}'' \left(1 - \frac{\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}}{1 + \frac{1}{(p-1)^3}}\right)$$

这已经容易化成定理的陈述中所说的形式.

2 表奇数为三个素数之和

——维诺格拉多夫

维诺格拉多夫（Виноградов, Иван Матвеевич, 1891—1983）前苏联数学家. 生于米洛留普镇.

我的方法在素数论中的应用的一些简单例子已于相关文献①中给出.

本文，我们给出这个方法在和

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}$$

的估计方面的应用. 运用这一估计及一条算术级数中素数分布的新定理（数列中的项之差与项数同时缓慢增加），我得到将一个奇数 $N > 0$ 表示为

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

的表示法的渐近公式，由此直接推出每个大奇数都是三个素数之和，这是关于奇数的哥德巴赫问题的完全解决.

本文给出的估计可以换成更准确的估计.

记号：$N > 0$ 为一个大奇数，$n = \log N$.

$h, h_1, h_2, \cdots$ 为任意大常数大于 3；

$$\tau = Nn^{-3h}, \tau_1 = Nn^{-h}$$

θ 为实数及 $|\theta| \leqslant 1$；

$$A \ll B, A = 0(B)$$

表示 $|A|/B$ 不超过某一常数；

不超过 $\sqrt{N}$ 的所有素数的乘积记为 H，(d) 表示满足 $d \leqslant N$ 的 H 的因子的

① I. M. Vinogradov, Dokl, Akad. Nauk, Ⅲ, 1, Ⅳ, 4(1934).

集合;(d_0)表示(d)的子集,其中d具有偶数个素因子;(d_1)为具有奇数个素因子的d构成的子集,集合(d)亦可分成两个集合(d')与(d'').前者包含这样的数d,其素因子皆远远小于n^{3h},后者包含其余的d.

集合(d_0)与(d_1)亦对应地分成集合(d'_0),(d''_0)与(d'_1),(d''_1).

引理1 命(x)与(y)表示两个递增的正整数集合.

$$1 < U_0 < U_1 \leqslant N_1 \leqslant N$$

m为正整数;

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, (a,q) = 1, 0 < q \leqslant \tau, m = m_1\delta$$

$$q = q_1\delta, \delta = (m,q), T = \sum_x \sum_y e^{2\pi i\alpha mxy}$$

此处x过(x)中适合

$$U_0 < x \leqslant U_1$$

的数,而给予x后,y过(y)中适合

$$0 < y \leqslant N_1/x$$

的数.则

$$T \ll N_1 n\sqrt{\frac{n}{U_0} + \frac{U_1}{N_1} + \frac{q_1 n}{N_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{m_1}{\tau}}$$

定理1 命

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^c}, (a,q) = 1, n^{3h} \leqslant q \leqslant \tau$$

则得

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i\alpha p} \ll Nn^{2-h}$$

证明 我们有

$$S = \sum_{(d)} \mu(d) S^d + O(\sqrt{N}), S_d = \sum_{m=1}^{\frac{N}{d}} e^{2\pi i\alpha md} \quad ①$$

所以

$$S = \sum_{d > \tau_1} \mu(d) S_d + O(Nn^{-h+1}) = T_0 - T_1 + O(Nn^{-h+1})$$

$$T_0 = \sum_{d_0} S_d, T_1 = \sum_{d_1} S_d \quad ②$$

此处d过大于τ_1的值.我们仅仅估计T_0,而T_1的估计是类似的.

交换求和次序得

$$T_0 = \sum_m T(m), T(m) = \sum_d e^{2\pi i\alpha md} \quad ③$$

此处m过下列诸数

$$m = 1, \cdots, [n^k]$$

而对于每个 m,d 过以下诸数

$$\tau_1 < d \leqslant N/m$$

进而言之,我们有

$$T(m) = T''(m) + O\left(\frac{N}{m}n^{-h}\right) \quad ④$$

此处 $T''(m)$ 含有 $T(m)$ 中对应于集合(d''_0)的那些项. $T(m)$ 的对应于 d'_0 的部分 $T'(m)$ 不超过(d')中不超过 N/m 的项数,这个数的阶大大地小于

$$\frac{N}{m}n^{-h}$$

若 $d \in (d''_0)$ 及 k 为 d 的超过 n^{3h} 的素因子个数,则

$$k < n$$

所以

$$T''(m) = \sum_{k<n} T_k(m) \quad ⑤$$

此处 $T_k(m)$ 包含 $T''(m)$ 的那些项,其中 d 正好含有 k 个素因子大于 n^{3h}. 进而言之

$$T_k(m) = \frac{1}{k}T_{ko}(m) + O\left(\frac{N}{mk}n^{-3h}\right) \quad ⑥$$

此处

$$T_{ko}(m) = \sum_u \sum_v e^{2\pi i amuv}$$

及 u 过属于(d)且大于等于 n^{3h} 的素数,而固定 u,v 过属于(d_1)且满足

$$\frac{\tau_1}{u} < v \leqslant \frac{N}{mu}$$

的整数,直接应用引理 1,我们得

$$T_{ko}(m) \ll N\frac{n^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}h}}{\sqrt{m}}$$

所以由 ⑥,⑤,④,③,② 即得定理 1.

定理 2 命 I_N 表示

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

的表示法个数,则

$$I_N = RS + O(N^2 n^{-c})$$

此处 c 为任意大常数大于 3 及

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q_1^2} \sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q}N}$$

$$R = \frac{N^2}{2n^3}(1+\lambda);\lim_{N\to\infty}\lambda = 0; q_1 = \varphi(q)$$

证明 (1) 我们有

$$I_N = \int_0^1 S_\alpha^3 e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha, S_\alpha = \sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}$$

我们划分积分区间为两类:

(i) $\alpha = \frac{a}{q} + z; (a,q) = 1; 0 < q \leqslant n^{3h}, -\frac{1}{\tau} \leqslant z \leqslant \frac{1}{\tau}$.

(ii) 剩余的诸区间;对于这些区间有

$$\alpha = \frac{d}{q} + z, (a,q) = 1, n^{3h} < q \leqslant \tau, |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}$$

对应于这种分割,我们有

$$I_N = I_{N_1} + I_{N_2} \qquad ⑦$$

(2) 由定理 1 我们得

$$I_{N_2} \ll Nn^{2-h}\int_0^1 |S_\alpha|^2 d\alpha \ll Nn^{2-h}\int_0^1 \sum_{p\leqslant N}\sum_{p_1\leqslant N} e^{2\pi i\alpha(p-p_1)} d\alpha \ll$$

$$Nn^{2-h}\frac{N}{n} \ll N^2 n^{1-h} \qquad ⑧$$

(3) I_{N_1} 的估计是没有困难的.它与华林问题的做法是一样的,但这里我们用到算术级数中素数分布的一条新定理,若 α 属于第一类区间,则

$$S_\alpha = \frac{\mu(q)}{q}V(z) + O(Nn^{-h_1})$$

$$V(z) = \int_z \frac{e^{2\pi izx}}{\log x}dx$$

因此 I_{N_1} 对应于分数 $\frac{a}{q}$ 的部分可以表为

$$R\frac{\mu(q)}{q_1^3}e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} + O(Nn^{-h_2})$$

$$R = \int_{-\frac{1}{v}}^{\frac{1}{v}} (V(z))^3 e^{-2\pi izN} dz$$

此处 R 可以表示为

$$R = \frac{N^2}{2n^3}(1+\lambda), \lim_{N\to\infty}\lambda = 0$$

因此我们容易算出

$$I_{N_1} = RS + O(N^2 n^{-h_3})$$

故由 ⑦,⑧ 即得定理.

附录 Representation of an Odd Number as the Sum of Three Primes①

Doklady Akademii Nauk SSSR, 15 no. 6 – 7 (1937) 291-294.

Simple examples② illustrating the application of my method to the theory of primes were given in 1934.

In this paper I shall apply this method to estimate the sum

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p}$$

Using this estimate and a new theorem on the distribution of primes in an arithmetical progression③ (the common difference increasing slowly with the increasing number of terms), I shall derive an asymptotic expression for the number of representations of an odd number $N > 0$ in the form

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

It directly follows that any sufficiently large odd number can be represented in the form ofa sum of three primes. This is the complete solution of the Goldbach problem for odd numbers.

The estimates derived in this paper can be improved further.

Notations. $N > 0$ is a sufficiently large odd number; $n = \ln N$; h, h_1, h_2 are arbitrary large constants > 3; $\tau = Nn^{-3h}$; $\tau_1 = Nn^{-h}$; θ is a real number; $|\theta| \leqslant 1$; $A \ll B$ or $A = O(B)$ denotes that the ratio $|A|/B$ does not exceed a certain constant; (d) stands for a sequence of divisors $d \leqslant N$ of the product H of all primes $\leqslant \sqrt{N}$; (d_0) denotes that part of this squence which contains all d with an odd number of prime divisors, while (d_1) denotes that part which contains all d with an even number of prime divisors. The sequence (d) can also be divided into two subsequences (d') and (d'') as follows: the first contains the numbers d satisfying the condition that all prime divisors are less than n^{3h} and the second contains all the remaining numbers d.

Accordingly, the sequences (d_0) and (d_1) are divided into subsequences (d'_0), (d''_0) and (d'_1), (d''_1), respectively.

Lemma. Let (x) and (y) denote two increasing sequences of positive integers

$$1 < U_0 < U_1 \leqslant N_1 \leqslant N,\ m = \text{an integer} > 0$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau},\ (a, q) = 1,\ 0 < q \leqslant \tau,\ m = m_1\delta,\ q = q_1\delta$$

---

① 摘自：I.M.维诺格拉多夫选集.(译自俄文)斯普林格出版公司，1985.
注：由于一些众所周知的原因，这本文集从来没在中国正式发售过，但为了研究的需要，一些机构翻印过，本书于 1988 年购于长春一家小书店.

② On some new problems in the theory of numbers; Dokl. akad. nauk SSSR (1934, vol. 3, no. 1)

③ 1 – 6. Some theorems in analytic number theory; Dokl. akad. nauk SSSR (1934, vol. 4, no. 4) 185 – 187. Walfisz, A.: Zur additiven Zahlentheorie II: Math. Z. 40 (1935) 592 – 607.

$$\delta = (m, q), T = \sum_x \sum_y e^{2\pi i a m x y}$$

where x runs through all the members of (x) satisfying the condition

$$U_0 < x \leqslant U_1$$

and y, for a given x, runs through all the members of (y) satisfying the condition

$$0 < y \leqslant \frac{N_1}{x}$$

Then

$$T \ll N_1 n \sqrt{\frac{n}{U_0} + \frac{U_1}{N_1} + \frac{q_1 n}{N_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{m_1}{\tau}}$$

Theorom 1 Let

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, (a, q) = 1, n^{3h} \leqslant q \leqslant \tau$$

Then

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \alpha p} \ll N n^{2-h}$$

Proof We have

$$S = \sum_{(d)} \mu(d) S_d + O(\sqrt{N}), S_d = \sum_{m=1}^{N/d} e^{2\pi i \alpha m d} \quad ⑨$$

Hence we find

$$S = \sum_{d > \tau_1} \mu(d) S_d + O(N n^{-h+1}) = T_0 - T_1 + O(N n^{-h+1})$$

$$T_0 = \sum_{(d_0)} S_d, T_1 = \sum_{(d_1)} S_d \quad ⑩$$

where d runs through those values which are $> \tau_1$. We shall only estimate T_0, because T_1 can be estimated in the same manner. By changing the order of summation, we obtain

$$T_0 = \sum_m T(m), T(m) = \sum_d e^{2\pi i \alpha m d} \quad ⑪$$

where m runs through

$$m = 1, \cdots, [n^h]$$

and d, for each given m, runs through the numbers (d_0) satisfying the condition

$$\tau_1 < d \leqslant \frac{N}{m}$$

Furthermove, we find that

$$T(m) = T''(m) + O\left(\frac{N}{m} n^{-h}\right) \quad ⑫$$

where $T''(m)$ contains only those terms in the sum $T(m)$ that correspond to the values

of d in the sequence (d''_0). Indeed, the part $T''(m)$ of the sum $T(m)$ which corresponds to the values of d in the sequence (d'_0) does not exceed the number of those terms in the sequence (d') which are not greater than N/m. But the order of this numbers is far less than

$$\frac{N}{m}n^{-h}$$

If d belongs to (d''_0) and k is the number of prime divisors of d, then

$$k < n$$

Therefore

$$T''(m) = \sum_{k<n} T_k(m) \tag{13}$$

where $T_k(m)$ contains those terms in $T''(m)$ which contain exactly k prime divisors greater than n^{3h}. Moreover

$$T_k(m) = \frac{1}{k}T_{k_0}(m) + O\left(\frac{N}{mk}u^{-3h}\right) \tag{14}$$

where

$$T_{k_0}(m) = \sum_u \sum_v e^{2\pi i \alpha m u v}$$

Here u runs through the primes $\geq n^{3h}$ belonging to (d), while v runs, for a given u, through the numbers satisfying the condition

$$\frac{\tau_1}{u} < v \leq \frac{N}{mu}$$

Applying the lemma to the sum T_{k_0}, we obtain

$$T_{k_0}(m) \ll N\frac{n^{(3/2)-(3h/2)}}{\sqrt{m}}$$

Thus, from ⑭, ⑬, ⑫, ⑪ and ⑩ we obtain Theorem 1.

Theorem 2 The number I_N of the representations of N in the form

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

is given by the expression

$$I_N = RS + O(N^2 n^{-c})$$

where c is an arbitrarily large constant >3 and

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{q_1^3} \sum_{\substack{0 \leq a < q \\ (a,q)=1}} e^{2\pi i \frac{a}{q} N}, R = \frac{N^2}{2n^3}(1+\lambda), \lim_{N\to\infty}\lambda = 0, q_1 = \varphi(q)$$

Proof (1) We have

$$I_N = \int_0^1 S_\alpha^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, S_\alpha = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$$

Divide the range of integration into intervals of two classes as follows: Class I contains

all intervals satisfying the conditions

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, (a, q) = 1, 0 < q \leqslant n^{3h}, -\frac{1}{\tau} \leqslant z \leqslant \frac{1}{\tau}$$

Class II contains all other remaining intervals for which

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, (a, q) = 1, n^{3h} < q \leqslant \tau, |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}$$

Accordingly, we have

$$I_N = I_{N_1} + I_{N_2} \qquad ⑮$$

(2) Applying Theorem 1 we find that

$$I_{N_2} \ll Nn^{2-h}\int_0^1 |S_\alpha|^2 \mathrm{d}\alpha \ll Nn^{2-h}\int_0^1 \sum_{p\leqslant N}\sum_{p_1\leqslant N} \mathrm{e}^{2\pi i\alpha(p-p_1)}\mathrm{d}\alpha \ll$$

$$Nn^{2-h}\frac{N}{n} \ll N^2 n^{1-h}$$

(3) It is not difficult to calculate I_{N_1}. It is calculated by the procedure that was used in Waring's problem, but here we have to use a new theorem on the distribution of primes in an arithmetical progression.

If α belongs to an interval of the first class, then we find

$$S_\alpha = \frac{\mu(q)}{q_1}V(z) + O(Nn^{-h_1}), V(z) = \int_2^N \frac{\mathrm{e}^{2\pi izx}}{\ln x}\mathrm{d}x$$

Hence that part of I_{N_1} which corresponds to a given fraction a/q is represented as

$$R\frac{\mu(q)}{q_1^3}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{a}{q}N} + O(Nn^{-h_2}), R = \int_{-1/\tau}^{1/\tau}(V(z))^3\mathrm{e}^{-2\pi izN}\mathrm{d}z \qquad ⑯$$

where R can be expressed in the from

$$R = \frac{N^2}{2n^3}(1+\lambda), \lim_{N\to\infty}\lambda = 0$$

Hence, without any difficulty we find that

$$I_{N_1} = RS + O(N^2 n^{-h_3})$$

and by virtue of ⑮ and ⑯ the theorem follows immediately.

林尼克（Линник, Юрий Владимирович, 1915—1972）前苏联数学家. 生于基辅.

3 哥德巴赫－维诺格拉多夫定理的新证明

——林尼克

3.1

在我的论文《On the possibility of a method for Some"additive"and"distributive"

problems in the theory of prime numbers》[①]中，我概要地给出了哥德巴赫问题的一个证明，它基于 L－级数与围道积分的纯黎曼－阿达玛方法与 L－级数零点密度的某些定理.

本文给出用黎曼－阿达玛方法证明三素数定理的详细过程，从而哈代－李特伍德的条件解决被完全解决了.

3.2

我们的基本工具为下述引理，其详细证明含于我的文章《On the density of the zeros of L-series》[②]中.

基本引理 命 q 为一个自然数，χ 为一个原特征(mod q)及 $L(\omega,\chi)$ 为它对应的 L－级数.命

$$\omega = \sigma + it, T \geqslant q^{50}, \beta \geqslant 1 \text{ 及 } v = \beta - \frac{1}{2} \geqslant 0$$

则 $L(\omega,\chi)$ 在矩形 $\beta \leqslant \sigma \leqslant 1, |t| \leqslant T$ 中的零点个数满足估计

$$Q(\beta,T) < c_1 q^{2v} T^{1-\frac{v}{1-v}} \ln^{10} T + c_2 q^{30} \qquad ①$$

此处 c_1 与 c_2 为绝对常数.

3.3

命

$$S(N,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A(n) e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i n\theta}$$

此处 N 为一个奇数，我们希望把它分解成三个素数之和，则

$$Q(N) = e\int_0^1 S(N,\theta)^3 e^{2\pi i N\theta} d\theta + O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

此处
$$Q(N) = \sum_{p+p'+p''=N} \ln p \ln p' \ln p''$$

命

$$r = \ln N, \tau = r^{10\,000}, H_1 = \tau^{100}$$

对于每个 $\theta \in [0,1]$，我们有连分数逼近

$$\theta = \frac{a}{q} + \alpha, |\alpha| \leqslant \frac{1}{q\tau}, q \leqslant \tau \qquad ②$$

满足 $|\alpha| \leqslant H_1 N^{-1} = \tau^{100} N^{-1}$ 的那些 θ 构成的集合 M 称为“优弧”[③].

当 $\theta \in M$ 时，$S(N,\theta)$ 的渐近性质可以由经典的黎曼－阿达玛方法结合西

① Ju. V. Linnik, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 48, 1945, 3－7.
② Ju. V. Linnik, Nzv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat; 10, 1946, 35－46.
③ E. Landau, Vorlesungen Uber Zahlentheorie. Bd. II, 1927.

革尔①与帕奇②定理来建立,因此积分

$$\int_M S(N,\theta)^3 e^{2\pi i N\theta} d\theta$$

构成了我们问题的主项.

我们用 m 表示 M 相对于$[0,1]$ 的余区间.

对于 $\theta \in m$,我们有

$$\theta = \frac{a}{q} + \alpha, \frac{1}{q\tau} \geqslant |\alpha| \geqslant \frac{H_1}{N}, q \leqslant \tau \qquad ③$$

我们现在来证明当 $\theta \in m$ 时,$S(N,\theta)$ 的估计可以由黎曼 - 阿达玛方法来建立.

3.4

我们用 χ 表示一个原特征(mod q),此处 q 满足③;$E(\chi) = 1$,此处 χ 为主特征,否则 $E(x) = 0$;及 ρ 表示 $L(\omega,\chi)$ 的一个非寻常零点.

假定 x 满足 $R_e^x > 0$,则由李特伍德③的推导可知,若 $L(0,\chi) \neq 0$,则

$$S(N,\alpha,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n)e^{-nx} = E(\chi)x^{-1} - \sum_{\rho} x^{-\rho}\Gamma(\rho) - \frac{L'}{L}(0,\chi) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} x^{-\omega}\left(-\frac{L'}{L}(\omega,\chi)\right)\Gamma(\omega)d\omega$$

而当 $L(0,\chi) = 0$ 时的证明并无实质改变.

命 $x = N^{-1} + 2\pi i\alpha$,此处 α 满足③.则 $|x| < 1$.

为了估计余项

$$R = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} x^{-\omega}\left(-\frac{L'}{L}(\omega,\chi)\right)\Gamma(\omega)d\omega$$

我们注意当 $\sigma = -\frac{1}{2}$ 时

$$\frac{L'}{L}(\omega,\chi) \ll \ln q(|t|+2)$$

$$x^{-\omega} = e^{-\omega\ln|x| - i\omega\operatorname{arc} x}$$

$$|e^{-\omega\ln|x|}| < 1, |e^{-i\omega\operatorname{arc} x}| \leqslant e^{|t|\operatorname{arc} x}$$

$$\Gamma(\omega) \ll |t|^{-1}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}$$

取 $\eta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}x = \arctan\frac{1}{2\pi N\alpha}$,则

---

① C. L. Siegel, Acta Arith; 1, 1935, 83 - 86.
② A. Page, Proc. London Math. Soc; 39, 1935, 116 - 141.
③ J. E. Littlewood, Proc. London. Math. Soc; 27; 1928, 358 - 371.

$$R \ll \int_2 e^{(\mathrm{arc}\ x-\frac{\pi}{2})t} \cdot \frac{\ln qt}{t}\mathrm{d}t \ll \ln^3\frac{1}{\eta}$$

对于 $\theta \in m$

$$\arctan\frac{1}{2\pi N\alpha} > \frac{1}{4\pi N\alpha}, R \ll (\ln N\alpha)^3$$

因$\frac{L'}{L}(0,\chi) \ll q$ 及 $x^{-1} \ll \alpha^{-1}$,所以

$$S(N,\alpha,\chi) \ll \alpha^{-1} + (\ln N\alpha)^3 + \left|\sum_{\rho} x^{-\rho}\Gamma(\rho)\right| \tag{④}$$

3.5

命 $v_0 = \frac{\ln\ln N}{\ln N}$, 为了估计$\left|\sum_{\rho} x^{-\rho}\Gamma(\rho)\right|$, 我们将临界带区域分成带 $\sigma_0: 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2} + v_0 = \beta_0$ 与诸带 $\sigma_\rho: \beta \leqslant \sigma \leqslant \beta + \frac{1}{\ln N}, \beta \geqslant \frac{1}{2} + v_0$ 之和,命 $\alpha > 0$ 及 $N_0 \geqslant N\alpha$. 习知 $L(\omega,\chi)$ 在矩形 $0 \leqslant \sigma \leqslant \beta$, $|t| \leqslant N_0$ 中的零点个数有寻常估计

$$Q_L(\beta, N_0) \ll N_0\ln(qN_0)$$

置 $\rho_k = \beta_k + \mathrm{i}t_k$,因 $|x| \sim 2\pi\alpha$ 及

$$|\Gamma(\beta + \mathrm{i}t)| < c_3 t^{\beta_0-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi|t|}{2}}, |t| \geqslant 1, -\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1 \tag{⑤}$$

故得

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_{\rho_0}} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \alpha^{-\beta_0}\sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} e^{(\mathrm{arc}\ x-\frac{\pi}{2})|tk|}$$

$$|t_k|^{\beta_k-\frac{1}{2}} \ll \alpha^{-\beta_0}\sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} e^{-\frac{|t_k|}{4\pi N^\rho}} |t_k| \beta_0^{-\frac{1}{2}} \ll$$

$$\alpha^{-\beta_0} N\alpha\ln(N\alpha)(N\alpha)\beta_0 \ll \alpha^{\frac{1}{2}-V_0}N^{\frac{1}{2}+V_0}N$$

此处与 $\ll$ 有关的常数与 χ, N, α, v 无关.

因 $\alpha = \frac{1}{q\tau}$,所以

$$\alpha^{-v_0} \ll (\ln N)^{20\,000} \ll 1, N^{2v_0} = (tnN)^2 = r^2$$

从而

$$\alpha^{\frac{1}{2}-V_0}N^{\frac{1}{2}+V_0}N \ll \frac{Nr^2}{(q\tau)^{1/2}} < \frac{N}{q^{1/2}\tau^{1/4}} \tag{⑥}$$

3.6

假定$\frac{1}{2} + v_0 \leqslant \beta \leqslant 0.6$,即 $v_0 \leqslant v \leqslant 0.1$. 则由基本引理(不等式 ①) 得

$$Q_L(\beta,N_0) < c_1 q^{2v} N_0^{1-\frac{v}{1-v}} \ln^{10} N_0 + c_2 q^{30}$$

注意 $N_0 \geqslant N\alpha > H_1 = \tau^{100} \geqslant q^{100}$. 因此

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \alpha^{-\frac{1}{2}-v} \sum_{\rho_k\in\sigma_\beta} e^{-\frac{|t_k|}{4\pi N\alpha}|t_k|^v} \ll$$

$$(N\alpha)^{1-\frac{v}{1-v}} q^{2v} (N\alpha)^v \alpha^{-\frac{1}{2}-v} \ln^{10} N \ll$$

$$(N\alpha)^{1-v^2} q^{2v} \alpha^{-\frac{1}{2}-v} r^{10} =$$

$$N^{1-v^2} \alpha^{\frac{1}{2}-v-v^2} r^{10} q^{2v} \leqslant \frac{N q^{2v} r^{10}}{(q\tau)^{\frac{1}{2}-v-v^2}} \ll \frac{N}{q\tau^{1/4}} \quad ⑦$$

3.7

假定 $0.1 - v \leqslant 1/3$, 则 $\frac{3}{2} - \frac{1}{1-v} \geqslant 0$, 所以

$$\left|\sum_{\rho_k\in\sigma_\beta} x^{-\sigma_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \alpha^{-\frac{1}{2}-v}(N\alpha)^{1-\frac{v}{1-v}}$$

$$(N\alpha)^v q^{2v} \ln^{10} N \ll N^{1-v^2} \alpha^{\frac{3}{2}-\frac{1}{1-v}} q^2 \ll N^{1-0.01} q^{2v}$$

因 $q \leqslant \tau$, 所以

$$\left|\sum_{-\rho_k\in\sigma_\beta} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \frac{N}{q^{1/2} N^{0.005}} \quad ⑧$$

假定 $\frac{1}{3} \leqslant v \leqslant 0.4$. 则 $\frac{3}{2} - \frac{1}{1-v} < 0$, 而最大估计是由在范围 $\alpha \geqslant H_1/N$ 中取极小而求得的, 即 ⑧ 的右端远远小于

$$N^{1-\frac{v^2}{1-v}} r^{10} q^{2v} \left(\frac{N}{H_1}\right)^{\frac{1}{1-v}-\frac{3}{2}} \ll \frac{N^{\frac{1}{2}+v} q^{2v1} v^{10}}{H_1^{\frac{1}{1-v}-3/2}} < N^{0.9} q r^{10} < \frac{N}{q^{1/2} N^{0.05}} \quad ⑨$$

最后, 对于 $0.4 \leqslant v \leqslant 1/2$, 则上述和满足

$$\alpha^{-\frac{1}{2}-v}(N\alpha)^{1-\frac{v}{1-v}} r^{10} q^{2v} (N\alpha)^r < N^{1-\frac{v^2}{1-v}}$$

$$r^{10} q^{2v} \left(\frac{N}{H_1}\right)^{\frac{1}{1-v}-\frac{3}{2}} \ll \frac{N^{\frac{1}{2}+v} q^{2v} r^{10}}{H_1^{5/3-3/2}} \ll \frac{N}{qH_1^{0.1}} \quad ⑩$$

3.8

对于 $\theta = \frac{a}{q} + \alpha (\theta \in m)$, 由 ④ ~ ⑩ 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n) e^{-\frac{n}{N}} e^{-2\pi i \alpha d} \ll r\,|\,\alpha\,|^{-1} + (\ln N\alpha)^3 +$$

$$\frac{N}{q^{1/2}\tau^{1/4}} + \frac{N}{q^{1/2} N^{0.005}} + \frac{N}{q^{1/2} N^{0.05}} + \frac{N}{qH_1^{0.1}}$$

$$|\alpha|^{-1} \ll \frac{N}{qH_1^{1/2}}$$

因此有一个小正数 $c_5 > 0$ 使

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{N}}\mathrm{e}^{-2\pi in\alpha} \ll \frac{N}{q^{\frac{1}{2}+c_5}\tau^{0.1}} \qquad ⑪$$

从而当 $\theta = \frac{a}{q} + \alpha(\theta \in m)$ 时有

$$S(N,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{N}}\mathrm{e}^{-2\pi in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{N}e^{2\pi i(\frac{a}{q}+\alpha)N}}) =$$

$$\sum_{\substack{(l,q)=1 \\ (\mathrm{mod}\ q)}} \mathrm{e}^{-2\pi i\frac{a}{q}n\theta} \sum_{n \equiv l(\mathrm{mod}\ q)} \Lambda(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{N}}\mathrm{e}^{-2\pi in\alpha} + O(q^{\varepsilon}) =$$

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\Big(\sum_{l}\overline{\chi}(l)\mathrm{e}^{\frac{-2\pi ial}{q}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{N}}\mathrm{e}^{-2\pi in\alpha} + O(q^{\varepsilon})$$

因

$$\sum_{l}\overline{\chi}(l)\mathrm{e}^{-2\pi ial/q} \ll q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

故由 ⑪ 可知

$$S(N,\theta) \ll \frac{q^{\frac{1}{2}}\varphi(q)}{\varphi(q)} \cdot \frac{q^{\varepsilon}N}{q^{\frac{1}{2}+C_5}\tau^{0.1}} \ll \frac{N}{\tau^{0.1}} < \frac{N}{(\ln N)^{1.000}} \qquad ⑫$$

这对于解决哥德巴赫问题已经充足了.

4　哥德巴赫－维诺格拉多夫定理①

——闵嗣鹤

4.1　引论

哥德巴赫曾经猜测过:每一个大于 7 的奇数都可以表成三个奇素数之和.哈代与李特伍德借助一个至今还未证明的假设②证明了充分大的奇数都可以表成三个素数之和.但在 1937 年维诺格拉多夫不用任何假设证明了同样的结果.因此这个结果常称为哥德巴赫－维诺格拉多夫定理.

在维诺格拉多夫的证明中起着主要作用的是他对于形如

$$\sum_{p \leqslant v} \mathrm{e}(px)(\mathrm{e}(z) = \mathrm{e}^{2\pi iz}) \qquad ①$$

① 摘自:闵嗣鹤.数论的方法(下册).科学出版社,1983.

② 他们假定有实数 $\theta < \frac{3}{4}$ 存在,使得所有 Dirichlet L-函数在 $\sigma > \theta$ 半面上都无零点.

(其中，v 是正数，x 是实数，而 p 通过不超过 v 的素数) 的三角和的估计. 本文的目的就是介绍维诺格拉多夫的方法. 在证明中要用到西格尔的一个很深刻的定理(引理 2).

4.2 证明的主要步骤

用 $r(n)$ 表示把自然数 n 表成三个素数和

$$n = p_1 + p_2 + p_3$$

的方法的个数，那么，哥德巴赫 - 维诺格拉多夫定理就等于说：对于充分大的奇数 n 都有 $r(n) > 0$. 实际上，我们可以把 $r(n)$ 的渐近公式找出来，从而推出 $r(n) > 0$. 首先需要说明怎样利用形如 ① 的三角和表出 $r(n)$.

设

$$f(x, v) = \sum_{p \leq v} e(px), v \geq 0 \quad ②$$

则

$$f^3(x, n) = \sum_{p_1 \leq n} \sum_{p_2 \leq n} \sum_{p_3 \leq n} e\{(p_1 + p_2 + p_3)x\} = \sum_{m=6}^{3n} r(m, n) e(mx)$$

其中，$r(m, n)$ 是把 m 表成三个素数(每一个不超过 n) 和的方法个数. 特别是 $r(n, n) = r(n)$，因而对于任何实数 x_0 都有

$$r(n) = \int_{x_0}^{x_0+1} f^3(x, n) e(-nx) \mathrm{d}x \quad ③$$

摆在我们面前的是一个非常有趣的问题：怎样把 $r(n)$ 的主要部分求出来. 哈代与李特伍德首先观察到除去当 x 接近一个分母很小的有理数的时候以外，$|f(x, n)|$ 的值都是很小的；而当 x 接近于那种有理数$\left(\text{如} \frac{h}{q}\right)$时，则可以利用 $f\left(\frac{h}{q}, n\right)$ 求出 $f(x, n)$ 的近似公式. 因此，我们最好把积分区间$(x_0, x_0 + 1)$ 分成两部分，记作 E_1 及 E_2，其中 E_1 是区间中接近于分母很小的有理数的各数的集合，而 E_2 则包含区间内剩下的部分. 因此，E_1 包含着许多的小区间，每一小区间包含一个分母很小的有理数. 所谓“接近” 和“很小” 的确切意义并不是很重要的. 为便利计，我们取

$$x_0 = n^{-1} \log^{15} n \quad ④$$

并且把“接近” 解释作“距离不超过 x_0”，把“很小” 解释作“不超过 $\log^{15} n$”. 我们通常称 E_1 为基本区间，E_2 为余区间. 于是由 ③

$$r(n) = \sum_{q \leq \log^{15} n} \sum_{\substack{0 < h \leq q \\ (h, q) = 1}} J(h, q) + \int_{E_2} f^3(x, n) e(-nx) \mathrm{d}x = \sum + I \quad ⑤$$

其中

$$J(h,q)=\int_{h/q-x_0}^{h/q+x_0}f^3(x,n)e(-nx)\mathrm{d}x \tag{⑥}$$

应该注意的是上面的$\frac{h}{q}$是分母很小的分数，并且当 n 大于某一常数 n_0 即

$$n>n_0 \tag{⑦}$$

时，由 ④ 知道当 $q\leqslant\log^{15}n, 0<h\leqslant q, (h,q)=1$ 时，各封闭小区间 $\left[\frac{h}{q}-x_0,\frac{h}{q}+x_0\right]$ 彼此不相重叠并且都包含在 (x_0, x_0+1) 内.

剩下要作的有两件事：其一是从$\sum$内提出 $r(n)$ 的主要部分，这当然等于从 $J(h,q)$ 内提出主要部分再求和；另一件是估计 I，这里要用到Виноградов的创造性的三角和估计方法. 我们先作较容易的第一件工作.

4.3　基本区间上的积分

前面曾经提过，当 x 接近于某一有理数$\frac{h}{q}$时，可以利用$f\left(\frac{h}{q},v\right)$求出$f(x,v)$的近似公式. 我们首先估计

$$f\left(\frac{h}{q},v\right)=\sum_{p\leqslant v}e\left(\frac{h}{q}p\right) \tag{⑧}$$

这里我们假定 q 比起v来相当的小(即 $q\leqslant\log^{15}n$，而 $v\leqslant n$). 为此，我们引进所谓拉马努金和，即

$$C_m(h)=\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant m\\(l,m)=1}}e\left(\frac{hl}{m}\right) \tag{⑨}$$

我们有

引理 1　$C_m(h)=\sum_{d\mid h,d\mid m}\mu\left(\frac{m}{d}\right)d.$

特别当 $(h,q)=1$ 时，就得到

$$C_q(h)=\mu(q)$$

证明　考虑 m 个分数

$$\frac{l}{m}(1\leqslant l\leqslant m) \tag{⑩}$$

其中每一个可以唯一地表成不可约分数，如

$$\frac{l}{m}=\frac{a}{d}$$

其中

$$d\mid m, 1\leqslant a\leqslant d, (a,d)=1 \tag{⑪}$$

反过来，每一个满足 ⑪ 的不可约分数$\frac{a}{d}$必等于 ⑩ 中的一个. 因此，对于任

何函数 $F(x)$(特别是 $F(x)=e(hx)$) 都有

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant m} f\left(\frac{l}{m}\right)=\sum_{d\mid m}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant d\\(a,d)=1}} f\left(\frac{a}{d}\right) \tag{12}$$

设

$$g(m)=\sum_{1\leqslant l\leqslant m} f\left(\frac{l}{m}\right),f(m)=\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant m\\(l,m)=1}} f\left(\frac{l}{m}\right)$$

则 ⑫ 变成

$$g(m)=\sum_{d\mid m} f(d)$$

由麦比乌斯反转公式[1]

$$f(m)=\sum_{d\mid m}\mu\left(\frac{m}{d}\right)g(d)$$

即

$$\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant m\\(l,m)=1}} F\left(\frac{l}{m}\right)=\sum_{d\mid m}\mu\left(\frac{m}{d}\right)\sum_{1\leqslant a\leqslant d} F\left(\frac{a}{d}\right) \tag{13}$$

令 $F(x)=e(hx)$,即得

$$f(m)=C_m(h)$$

$$g(m)=\sum_{1\leqslant l\leqslant m} e\left(\frac{lh}{m}\right)=\begin{cases}m, m\mid h\\0, m\nmid h\end{cases}$$

于是 ⑬ 变成

$$C_m(h)=\sum_{d\mid m,d\mid h}\mu\left(\frac{m}{d}\right)d$$

特别当 $(m,h)=1$ 时即得

$$C_m(h)=\mu(m)$$

设

$$g(x,v)=\sum_{2\leqslant m\leqslant v}\frac{e(mx)}{\log m},v\geqslant 2 \tag{14}$$

我们要证明可以用 $\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}g(0,v)$ 来很好地逼近 $f\left(\frac{h}{q},v\right)$.现在把它写成一个引理如下:

引理2 设正整数 $m\geqslant 3$,$k\leqslant \log^u m$(u 是任意大的正数),而 $(k,l)=1$.若用 $\pi(m;k,l)$ 表示在算术级数 $kn+l$,$n=1,2,\cdots$ 内不超过 m 的素数个数,则

$$\left|\pi(m;k,l)-\frac{lsm}{\phi(k)}\right|\leqslant Am\exp\left(-\frac{\sqrt{\log m}}{200}\right),A\text{ 是常数}$$

根据上面的引理我们容易证明:

---

① 见 И.М.维诺格拉多夫著.数论基础.裘光明,译,第二章问题 17c.

引理 3 设$(h,q)=1, q\leqslant \log^{15}n, n>n_0$(充分大),则

$$\left|f\left(\frac{h}{q},v\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(0,v)\right|<2nq\log^{-100}n, 0\leqslant v\leqslant n$$

证明 当$v\leqslant n^{1/2}$时上式显然成立.因而不妨假定$n^{1/2}<v\leqslant n$,由②知

$$\left|f\left(\frac{h}{q},v\right)-\sum_{\substack{p\leqslant v\\ p\nmid q}}e\left(\frac{ph}{q}\right)\right|\leqslant \sum_{p\mid q}1<q$$

又由引理 1 和引理 2 知

$$\sum_{\substack{p\leqslant v\\ p\nmid q}}e\left(\frac{ph}{q}\right)=\sum_{\substack{0<l\leqslant q\\ (l,q)=1}}e\left(\frac{lh}{q}\right)\sum_{\substack{p\leqslant v\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}1=$$

$$\sum_{\substack{0<l\leqslant q\\ (l,q)=1}}e\left(\frac{lh}{q}\right)\pi([v];q,l)=\frac{Is[v]}{\phi(q)}C_q(h)+R$$

这里

$$|R|\leqslant Aqn\exp\left(-\frac{\sqrt{\log n}}{200}\right)<qn\log^{-100}n$$

注意到$Is[v]=g(0,v)$及$C_q(h)=\mu(q)$,从而得到

$$\left|f\left(\frac{h}{q},v\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(0,v)\right|\leqslant q+qn\log^{-100}n<2nq\log^{-100}n$$

进一步,我们要估计$f\left(\frac{h}{q}+y,n\right)$,这要用到下面的引理.

引理 4 若

$$F(x,v)=\sum_{0<m\leqslant v}a_m e(mx)$$

则

$$F(x_1+x_2,v)=e(vx_2)F(x_1,v)-2\pi i x_2\int_0^v e(ux_2)F(x_1,u)\mathrm{d}u$$

现在我们可以证明:

引理 5 设

$$q\leqslant \log^{15}n,\ |y|\leqslant x_0,(h,q)=1 \tag{15}$$

则当$n>n_0$(n_0充分大)时

$$\left|f\left(\frac{h}{q}+y,n\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(y,n)\right|<n\log^{-69}n$$

证明 由引理 4

$$f\left(\frac{h}{q}+y,n\right)=e(ny)f\left(\frac{h}{q},n\right)-2\pi i y\int_0^n e(yv)f\left(\frac{h}{q},v\right)\mathrm{d}v$$

$$g(y,n)=e(ny)g(0,n)-2\pi i y\int_0^n e(yv)g(0,v)\mathrm{d}v$$

故

$$\left|f\left(\frac{h}{q}+y,n\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(y,n)\right| = \left|e(ny)\left(f\left(\frac{h}{q},n\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(0,n)\right)-\right.$$
$$\left.2\pi i y\int_0^n e(vy)\left(f\left(\frac{h}{q},v\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(0,v)\right)dv\right| \leqslant$$
$$\left|f\left(\frac{h}{q},n\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(0,n)\right| +$$
$$2\pi x_0\int_0^n\left|f\left(\frac{h}{q}v\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}g(0,v)\right|dv$$

最后一步用到 $|y|\leqslant x_0$.

我们记得 $x_0=\frac{1}{n}\log^{15}n$,故由引理 3,当 $n>n_0$ 时,上式右边不超过

$$2n\log^{-85}n(1+2\pi x_0 n) < 14n\log^{-70}n < n\log^{-69}n$$

进一步,我们可以证明下面的引理:

引理 6 设

$$\rho(n)=\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n\\ m_1\geqslant 2,m_2\geqslant 2,m_3\geqslant 2}}\frac{1}{\log m_1\log m_2\log m_3} \tag{16}$$

则

$$\frac{1}{3}n^2\log^{-3}n < \rho(n) < n^2(n\text{ 充分大}) \tag{17}$$

且在上述引理的条件下

$$\left|J(h,q)-\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}\rho(n)e\left(-\frac{nh}{q}\right)\right|\leqslant 6n^2\log^{-54}n+n^2\phi^{-3}(q)\log^{-30}n \tag{18}$$

证明 (1)⑯ 右边的项数是$\frac{1}{2}(n-4)(n-5)$,而每一项在 $\log^{-3}n$ 与 1 之间,故 ⑰ 成立.

(2) 当 $|Z|\leqslant C$, $|W|\leqslant C$ 时,易见

$$|Z^3-W^3|\leqslant 3C^2|Z-W|$$

又显然 $|f(x,n)|\leqslant n$, $|g(y,n)|\leqslant n$.故由上述引理立刻可以推出

$$\left|f^3\left(\frac{h}{q}+y,n\right)-\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}g^3(y,n)\right|\leqslant 3n^3\log^{-69}n$$

(3) 由 $J(h,q)$ 的定义(即式 ⑥) 知

$$J(h,q)=e\left(-\frac{nh}{q}\right)\int_{-x_0}^{x_0}f^3\left(\frac{h}{q}+y,n\right)e(-ny)dy$$

故由(2) 及 $x_0=\frac{1}{n}\log^{15}n$ 知

$$\left|J(h,q)-\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}J_1 e\left(\frac{-nh}{q}\right)\right|\leqslant 6n^2\log^{-54}n \tag{19}$$

其中

$$J_1 = \int_{-x_0}^{x_0} g^3(y,n)e(-ny)\mathrm{d}y$$

(4) 我们要证明可以用 $\rho(n)$ 去逼近 J_1. 用分项积分容易看出

$$\rho(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g^3(y,n)e(-ny)\mathrm{d}y$$

但

$$\left|\sum_{m=2}^{m_1} e(my)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \pi y|} \leqslant \frac{1}{2|y|}, m_1 \geqslant 2, 0 < |y| \leqslant \frac{1}{2}$$

故由阿贝尔引理

$$|g(y,n)| = \left|\sum_{2\leqslant m\leqslant n} \frac{e(my)}{\log m}\right| < |y|^{-1}, 0 < |y| \leqslant \frac{1}{2}$$

因此

$$|\rho(n) - J_1| \leqslant 2\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} y^{-3}\mathrm{d}y < x_0^{-2} = n^2\log^{-30} n$$

而由上式及 ⑲ 容易得到

$$\left|J(h,q) - \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}\rho(n)e\left(\frac{-nh}{q}\right)\right| \leqslant 6n^2\log^{-54} n + \frac{n^2\log^{-30} n}{\phi^3(q)}$$

最后,我们回到 $\sum$ 的估计:

引理 7 当 $n > n_0$ 时

$$\left|\sum - \rho(n)\sum_{q\leqslant \log^{15} n} \frac{\mu(q)}{\phi^3(q)} C_q(n)\right| < 7n^2\log^{-24} n$$

证明 由引理 6 及 $C_q(n)$ 的定义(见 ⑨) 知道

$$\left|\sum_{q\leqslant\log^{15} n}\sum_{\substack{0<h\leqslant q\\(h,q)=1}} J(h,q) - \rho(n)\sum_{q\leqslant\log^{15} n}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(n)\right| \leqslant$$

$$6n^2\log^{-24} n + n^2\log^{-30} n\sum_{q\leqslant\log^{15} n}\phi^{-2}(q) <$$

$$6n^2\log^{-21} n + n^2\log^{-24} n, \text{当 } n > n_0, n_0 \text{ 充分大}$$

最后一步可以利用 $\phi(q) \geqslant \pi(q) > \frac{Aq}{\log q}$($A$ 是常数) 得出来.

4.4 余区间上的积分

在这一节里面,我们要估计余区间上的积分. 首先让我们证明下面的引理:

引理 8 设

$$n\log^{-3} n < v \leqslant n, \log^{15} n < q \leqslant n\log^{-15} n (h,q) = 1 \qquad ⑳$$

则当 $n > n_0$(充分大) 时

$$\left|f\left(\frac{h}{q}, v\right)\right| \leqslant n\log^{-3} n \qquad ㉑$$

证明 (1) 我们在下面用 j, m, l, L 及 ξ 表正整数，p 表素数. 令

$$b_1 = \sum_{\substack{m \leqslant v \\ (m, a_1)=1}} e\left(\frac{mh}{q}\right) \qquad ㉒$$

其中

$$a_1 = \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} p \,(p \text{ 通过素数}) \qquad ㉓$$

则 m 通过 1 及满足 $\sqrt{n} < p \leqslant v$ 的一切素数. 因此

$$\left|f\left(\frac{h}{q}, v\right) - b_1\right| \leqslant \sqrt{n} \qquad ㉔$$

所以，我们只要证明

$$|b_1| \leqslant \frac{2}{3} n\log^{-3} n, n > n_0 \qquad ㉕$$

引理即随之成立.

(2) 由于 $\sum_{d|a} \mu(d) = 1$ 或 0 视 $a = 1$ 或 $a > 1$ 而定，故

$$\sum_{j|a_1, j|m} \mu(j) = \sum_{j|(m, a_1)} \mu(j) = \begin{cases} 1, (m, a_1) = 1 \\ 0, (m, a_1) > 1 \end{cases}$$

故

$$b_1 = \sum_{m \leqslant v} e\left(\frac{mh}{q}\right) \sum_{j|a_1, j|m} \mu(j) = \sum_{j|a_1} \sum_{k \leqslant \frac{v}{j}} \mu(j) e\left(\frac{hjk}{q}\right) = b_2 + b_3 \qquad ㉖$$

其中

$$b_2 = \sum_{\substack{j|a_1 \\ j \leqslant v\log^{-5} n}} \mu(j) \sum_{k \leqslant \frac{v}{j}} e\left(\frac{hjk}{q}\right) \qquad ㉗$$

$$b_3 = \sum_{k < \log^5 n} \sum_{\substack{j|a_1 \\ v\log^{-5} n < j \leqslant \frac{v}{k}}} \mu(j) e\left(\frac{hjk}{q}\right) \qquad ㉘$$

今先估计 b_2. 显然

$$|b_2| \leqslant \sum_{j \leqslant v\log^{-5} n} \left|\sum_{k \leqslant \frac{v}{j}} e\left(\frac{hjk}{q}\right)\right| = \sum_{-\frac{q}{2} < l \leqslant \frac{q}{2}} b_4(l) \qquad ㉙$$

其中

$$b_4(l) = \sum_{\substack{j \leqslant v\log^{-5} n \\ hj \equiv l \pmod{q}}} \left|\sum_{k \leqslant \frac{v}{j}} e\left(\frac{lk}{q}\right)\right| \qquad ㉚$$

由 ⑳ 得

$$b_4(0)=\sum_{\substack{j\leqslant v\log^{-5}n\\ q\mid j}}\left[\frac{v}{j}\right]=\sum_{m\leqslant q^{-1}v\log^{-5}n}\left[\frac{v}{qm}\right]\leqslant\frac{n}{q}\sum_{m\leqslant n}\frac{1}{m}\leqslant 2n\log^{-14}n \qquad ㉛$$

$$(n>n_0,\text{充分大})$$

又若 $0<|l|\leqslant\frac{q}{2}$,则

$$\left|\sum_{k\leqslant\frac{v}{j}}e\left(\frac{lk}{q}\right)\right|=\left|\frac{e\left(l\left[\frac{v}{j}\right]/q\right)-1}{e\left(\frac{l}{q}\right)-1}\right|\leqslant\frac{2}{\left|e\left(\frac{l}{q}\right)-1\right|}=\frac{1}{|\sin(\pi l/q)|}\leqslant\frac{q}{2|l|}$$

代入 ㉚ 即得(注意 $(h,q)=1$)

$$b_4(l)\leqslant\frac{q}{2|l|}\sum_{\substack{j\leqslant v\log^{-5}n\\ hj\equiv l(\bmod q)}}1\leqslant\frac{1}{2|l|}(v\log^{-5}n+q)$$

故

$$\sum_{\substack{l\neq 0\\ -\frac{1}{2}q<l\leqslant\frac{1}{2}q}}b_4(l)\leqslant(v\log^{-5}n+q)\sum_{0<l\leqslant\frac{q}{2}}l^{-1}\leqslant 2n\log^{-4}n$$

由上式及 ㉛ 得

$$|b_2|\leqslant 3n\log^{-4}n \qquad ㉜$$

因此,由 ㉖ 知道只要证明

$$|b_3|\leqslant\frac{1}{3}n\log^{-3}n,\ n>n_0 \qquad ㉝$$

即容易推出 ㉕,而引理即随之成立.

(3) 现在要估计 b_3.我们有

$$b_3=\sum_{k<\log^5 n}\sum_{\substack{j\mid a_1\\ v\log^{-5}n<j\leqslant\frac{v}{k}}}\mu(j)e\left(\frac{hjk}{q}\right)=\sum_{k<\log^5 n}b_5(k) \qquad ㉞$$

其中

$$b_5(k)=\sum_{\substack{j\mid a_1\\ v\log^{-5}n<j\leqslant v/k}}\mu(j)e\left(\frac{hjk}{q}\right) \qquad ㉟$$

令

$$a_2=\prod_{p\leqslant\log^{15}n}p \qquad ㊱$$

则

$$b_5(k)=b_6+b_7 \qquad ㊲$$

其中

$$b_6=\sum_{\substack{j\mid a_2\\ v\log^{-5}n<j\leqslant v/k}}\mu(j)e\left(\frac{hjk}{q}\right) \qquad ㊳$$

与(利用㉓)

$$b_7 = \sum_{\substack{j \mid a_1, j \nmid a_2 \\ v\log^{-5} n < j \leqslant v/k}} \mu(j) e\left(\frac{hjk}{q}\right) \tag{39}$$

显然由⑳

$$| b_6 | \leqslant \sum_{\substack{j \mid a_2 \\ v\log^{-8} n < j \leqslant n}} 1 \tag{40}$$

用 $\omega(m)$ 表 m 的不同素因数的个数,则由㊱,当 $j \mid a_2$ 时

$$j \leqslant (\log^{15} n)^{\omega(j)}$$

因 $\tau(j) = 2^{\omega(j)}$,故 $\tau(j) \geqslant j^{\log 2/15\log\log n}$. 当 $j > n\log^{-8} n$ 时

$$\tau(j) \geqslant (n\log^{-8} n)^{\log 2/15\log\log n} > \log^{101} n, n > n_0 \text{ 充分大}$$

因此

$$| b_6 | \log^{101} n \leqslant \sum_{j \leqslant n} \tau(j) = \sum_{j \leqslant n} \sum_{L \mid j} 1 =$$

$$\sum_{L \leqslant n} \sum_{\substack{j \leqslant n \\ L \mid j}} 1 = \sum_{L \leqslant n} \left[\frac{n}{L}\right] \leqslant n \sum_{L \leqslant n} \frac{1}{L} < n(1 + \log n)$$

故

$$| b_6 | \leqslant n\log^{-100} n, n > n_0 \text{ 充分大} \tag{41}$$

剩下只有去估计 b_7,容易看出,若能证明

$$| b_7 | \leqslant 10nk^{-\frac{1}{2}}\log^{-6} n\log\log n, k < \log^5 n, n > n_0 \tag{42}$$

㉝即随之成立,因而引理成立.

(4) 现在估计 b_7. 由㊴

$$b_7 = b_8\left(\frac{v}{k}\right) - b_8(v\log^{-5} n), k < \log^5 n \tag{43}$$

其中

$$b_8(x) = \sum_{\substack{j \mid a_1, j \nmid a_2 \\ j \leqslant x}} \mu(j) e\left(\frac{hjk}{q}\right), 0 < x \leqslant \frac{n}{k} \tag{44}$$

显然我们只要证明

$$| b_8(x) | \leqslant 5nk^{-\frac{1}{2}}\log^{-6} n\log\log n, 0 < x \leqslant \frac{n}{k} \tag{45}$$

㊸即成立,因而引理成立.

(5) 现在考虑 $b_8(x)$. 设 $j \mid a_1$ 及 $j \nmid a_2$. 由 a_1 及 a_2 的定义(㉓与㊱),j 所包含超过 $\log^{15} n$ 的素因数个数是 $\omega\left\{\left(j, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\}$. 若 $j \nmid a_2$ 且 $j \leqslant n$,则

$$1 \leqslant \omega\left\{\left(j, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} \leqslant \log n$$

故由 ㊹ 知

$$b_8(x) = \sum_{m \leqslant \log n} b_9(m) \tag{46}$$

其中

$$b_9(m) = \sum_{\substack{j \mid a_1, j \leqslant x \\ \omega\left\{\left(j, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} = m}} \mu(j) e\left(\frac{hjk}{q}\right) \tag{47}$$

因此

$$mb_9(m) = \sum_{\substack{j \mid a_1, j \leqslant x \\ \omega\left\{\left(j, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} = m}} \mu(j) e\left(\frac{hjk}{q}\right) \sum_{p \mid \left(j, \frac{a_1}{a_2}\right)} 1 = \sum_{p \mid \frac{a_1}{a_2}} \sum_{\substack{pL \mid a_1, pL \leqslant x \\ \omega\left\{\left(pL, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} = m}} \mu(pL) e\left(\frac{hpLk}{q}\right) =$$

$$- \sum_{p \mid \frac{a_1}{a_2}} \sum_{\substack{L \mid \frac{a_1}{p}, L \leqslant \frac{x}{p} \\ \omega\left\{\left(L, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} = m-1}} \mu(L) e\left(\frac{hpLk}{q}\right)$$

由 a_1 及 a_2 的定义(㉓ 与 ㊱),条件 $p \mid \frac{a_1}{a_2}$ 等价于 $\log^{15} n < p \leqslant \sqrt{n}$,又在这条件成立时,条件 $L \mid \frac{a_1}{p}$ 可用 $L \mid a_1$ 及 $p \nmid L$ 两条件代替. 因此

$$mb_9(m) = -b_{10} + b_{11} \tag{48}$$

其中

$$b_{10} = \sum_{\log^{15} n < p \leqslant \sqrt{n}} \sum_{\substack{L \mid a_1, L \leqslant \frac{x}{p} \\ \omega\left\{\left(L, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} = m-1}} \mu(L) e\left(\frac{hpLk}{q}\right) \tag{49}$$

$$b_{11} = \sum_{\log^{15} n < p \leqslant \sqrt{n}} \sum_{\substack{L \mid a_1, p \mid L, L \leqslant \frac{x}{p} \\ \omega\left\{\left(L, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} = m-1}} \mu(L) e\left(\frac{hpLk}{q}\right) \tag{50}$$

显然

$$|b_{11}| \leqslant \sum_{p > \log^{15} n} \sum_{L \leqslant \frac{x}{p}, p \mid L} 1 = \sum_{p > \log^{15} n} \left[\frac{x}{p^2}\right] < 2x \log^{-15} n$$

故

$$|b_{11}| \leqslant 2nk^{-1} \log^{-15} n, \quad x \leqslant \frac{n}{k} \tag{51}$$

剩下只有去估计 b_{10},我们要证明

$$|b_{10}| \leqslant 3nk^{-\frac{1}{2}} \log^{-6} n, \quad x \leqslant \frac{n}{k} \tag{52}$$

假定上式成立,则结合 ⑤① 即知(看 ㊽)

$$m \mid b_9(m) \mid \leqslant 4nk^{-\frac{1}{2}}\log^{-6} n, n > n_0 \text{ 充分大}$$

因而由 ㊻ 知道

$$\mid b_8(x) \mid \leqslant 5nk^{-\frac{1}{2}}\log^{-6} n \log\log n, n > n_0, \text{充分大}$$

而引理随之成立. 因此我们剩下的问题只须证明 ㊾.

(6) 现在考虑 b_{10}. 首先,我们可以消去 k 与 q 的最大公因数 (q,k). 设

$$\alpha = \frac{q}{(q,k)}, \beta = \frac{kh}{(q,k)}$$

则由 $(h,q) = 1$(看 ⑳),可以知道

$$(\alpha,\beta) = 1 \qquad ㊼$$

又因 $\frac{q}{k} \leqslant \alpha \leqslant q$,故由 $\log^{15} n < q \leqslant n\log^{-15} n$(看 ⑳) 可以推出

$$k^{-1}\log^{15} n < \alpha \leqslant n\log^{-15} n \qquad ㊽$$

因此由 ㊾

$$b_{10} = \sum_{\log^{15} n < p \leqslant \sqrt{n}} \sum_{L \leqslant \frac{x}{p}} g(L) e\left(\frac{\beta p L}{\alpha}\right) \qquad ㊿$$

其中

$$g(L) = \begin{cases} \mu(L), \text{当 } L \mid a_1 \text{ 且 } \omega\left\{\left(L, \frac{a_1}{a_2}\right)\right\} = m - 1 \\ 0, \qquad \text{其他} \end{cases}$$

显然

$$\mid g(L) \mid \leqslant 1 \qquad (56)$$

设用 λ 表示满足

$$2^{\lambda-1} < \sqrt{n}\log^{-15} n \leqslant 2^{\lambda} \qquad (57)$$

的整数,则由 (55)

$$\mid b_{10} \mid \leqslant \sum_{\log^{15} n < j \leqslant 2^{\lambda}\log^{15} n} \left| \sum_{L \leqslant \frac{x}{j}} g(L) e\left(\frac{\beta j L}{\alpha}\right) \right| = \sum_{\xi \leqslant \lambda} b_{12}(\xi) \qquad (58)$$

其中

$$b_{12}(\xi) = \sum_{2^{\xi-1}\log^{15} n < j \leqslant 2^{\xi}\log^{15} n} \left| \sum_{L \leqslant \frac{x}{j}} g(L) e\left(\frac{\beta j L}{\alpha}\right) \right|$$

由施瓦茨 – 布尼亚科夫斯基不等式

$$b_{12}^2(\xi) \leqslant 2^{\xi}\log^{15} n \sum_{2^{\xi-1}\log^{15} n < j \leqslant 2^{\xi}\log^{15} n} \left| \sum_{L \leqslant \frac{x}{j}} g(L) \cdot e\left(\frac{\beta j L}{\alpha}\right) \right|^2 = 2^{\xi}\log^{15} n \cdot b_{13} \qquad (59)$$

其中

$$b_{13} = \sum_{2^{\xi-1}\log^{15} n < j \leqslant 2^{\xi}\log^{15} n} \sum_{L \leqslant \frac{x}{j}} \sum_{L' \leqslant \frac{x}{j}} g(L) \cdot g(L') e\left(\frac{\beta j (L - L')}{\alpha}\right) =$$

$$\sum_{L<x_1}\sum_{L'<x_1} g(L)\cdot g(L')\sum_{x_2<j\leqslant x_3} e\left(\frac{\beta j(L-L')}{\alpha}\right) \qquad ⑥⓪$$

而

$$x_1 = x2^{1-\xi}\log^{-15}n,\ x_2 = 2^{\xi-1}\log^{15}n,\ x_3 = \min\left(2^{\xi}\log^{15}n,\frac{x}{L},\frac{x}{L'}\right) \qquad ⑥①$$

因 $|g(L)|\leqslant 1$(看 ⑤⑥),故

$$b_{13}\leqslant \sum_{L<x_1}\sum_{L'<x_1}\left|\sum_{x_2<j\leqslant x_2} e\left(\frac{\beta j(L-L')}{\alpha}\right)\right| = \sum_{-\frac{\alpha}{2}<l\leqslant\frac{\alpha}{2}} b_{14}(l) \qquad ⑥②$$

其中

$$b_{14}(l) = \sum_{L<x_1}\ \sum_{\substack{L'<x_1\\ \beta(L-L')\equiv l(\bmod \alpha)}}\left|\sum_{x_2<j\leqslant x_3} e\left(\frac{lj}{\alpha}\right)\right| \qquad ⑥③$$

由$(\alpha,\beta)=1$(看 ⑤③)知道

$$\sum_{\substack{L'<x_1\\ \beta(L-L')\equiv l(\bmod \alpha)}} 1 < \frac{x_1}{\alpha}+1$$

故

$$\sum_{L<x_1}\ \sum_{\substack{L'<x_1\\ \beta(L-L')\equiv l(\bmod \alpha)}} 1 < x_1\left(\frac{x_1}{\alpha}+1\right) \qquad ⑥④$$

由 ⑥④,⑥③ 及 ⑥① 可立刻推出

$$b_{14}(0) < 2^{\xi}\log^{15}n\cdot x_1\left(\frac{x_1}{\alpha}+1\right) = 2x\left(\frac{x_1}{\alpha}+1\right) \qquad ⑥⑤$$

又仿前容易证明(看紧接着 ③① 的几行)

$$\left|\sum_{x_2<j\leqslant x_3} e\left(\frac{lj}{\alpha}\right)\right|\leqslant\frac{\alpha}{2|l|},0<|l|\leqslant\frac{1}{2}\alpha$$

故由 ⑥③ 及 ⑥④

$$b_{14}(l)\leqslant 2^{-1}|l|^{-1}x_1(x_1+\alpha),0<|l|\leqslant\frac{1}{2}\alpha \qquad ⑥⑥$$

代入 ⑥② 得

$$b_{13}\leqslant 2x\left(\frac{x_1}{\alpha}+1\right)+x_1(x_1+\alpha)(1+\log\alpha)$$

因 $0<x\leqslant\frac{n}{k}$(看 ⑤②),$k^{-1}\log^{15}n<\alpha\leqslant n\log^{15}n$(看 ⑤④)及 $x_1 = x2^{1-\xi}\log^{15}n$(看 ⑥①),故当 n 充分大时

$$b_{13}\leqslant 2\frac{n}{k}(n2^{1-\xi}\log^{-30}n+1)+\frac{n}{k}2^{1-\xi}\log^{-15}n\left(\frac{n}{k}2^{1-\xi}\log^{-15}n+n\log^{-15}n\right)\log n$$

因此,由 ⑤⑨ 及 $2^{\lambda-1}<\sqrt{n}\log^{-15}n\leqslant 2^{\lambda}$(看 ⑤⑦),可以推出

$$b_{12}^2(\xi) \leqslant 2\frac{n}{k}(2n\log^{-15}n + 2^{\xi}\log^{15}n) + 2\frac{n}{k}\log^{-14}n\left(\frac{n}{k}2^{1-\xi} + n\right) \leqslant$$
$$5n^2k^{-1}\log^{-14}n, \xi \leqslant \lambda$$

故由 ⑧ 及 ⑦

$$|b_{10}| \leqslant 3\lambda nk^{-\frac{1}{2}}\log^{-7}n \leqslant 3nk^{-\frac{1}{2}}\log^{-6}n, x \leqslant \frac{n}{k}$$

这就是 ②,故引理成立.

现在可以进而估计 I 了.我们还要用到下面已知的事实:

引理 9 任给实数 x 及 $y \geqslant 1$,一定可以找到互素的整数 h 与 q,使得 $q \leqslant y$ 与

$$|qx - h| < \frac{1}{y}$$

现在要证明:

引理 10

$$|I| = \left|\int_{E_2} f^3(x,n)e(-nx)\mathrm{d}x\right| \leqslant Cn^2\log^{-4}n$$

其中 C 是一个常数.

证明 设 $x \in E_2$,则由上面引理,可以找到互素的 h 与 q 使得 $q \leqslant n\log^{-15}n$ 及

$$|qx - h| < n^{-1}\log^{15}n = x_0 \qquad ⑰$$

这里的 q 一定超过 $\log^{15}n$,否则由上式及 E_1 的定义(看 4.2)就可以推出 $x \in E_1$ 了.由此可知引理 8 里面的条件都满足了,所以根据那个引理及显然的不等式 $\left|f\left(\frac{h}{q}, v\right)\right| \leqslant v$,可以看出

$$\left|f\left(\frac{h}{q}, v\right)\right| \leqslant n\log^{-3}n, 0 < v \leqslant n \qquad ⑱$$

令 $y = x - \frac{h}{q}$,则由 ⑰ 及 $q > \log^{15}n$ 可得 $|y| < n^{-1}$.

故由引理 4

$$|f(x,n)| = \left|e(ny)f\left(\frac{h}{q}, n\right) - 2\pi\mathrm{i}y\int_0^n e(uy)\cdot f\left(\frac{h}{q}, u\right)\mathrm{d}u\right| \leqslant$$
$$(1 + 2\pi)n\log^{-3}n, x \in E_2 \qquad ⑲$$

从此立刻得到

$$\left|\int_{E_2} f^3(x,n)e(-nx)\mathrm{d}x\right| \leqslant (1 + 2\pi)n\log^{-3}n \cdot \int_{E_2} |f(x,n)|^2\mathrm{d}x$$

但

$$\int_{E_2} |f(x,n)|^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f(x,n)|^2\mathrm{d}x =$$

$$\sum_{p\leqslant n}\sum_{p'\leqslant n}\int_0^1 e\{(p-p')x\}\mathrm{d}x=\sum_{p\leqslant n}1=$$

$$\pi(n)<\frac{An}{\log n},A\text{ 是常数}$$

故
$$\left|\int_{E_2}f^3(x,n)e(-nx)\mathrm{d}x\right|\leqslant Cn^2\log^{-4}n$$

4.5 $r(n)$ 的渐近公式

引理 11 当 $n>n_0$(n 充分大)时

$$|r(n)-S(n)\rho(n)|\leqslant C_1n^2\log^{-4}n$$

其中,C_1 是常数而

$$S(n)=\prod_p\left(1-\frac{C_p(n)}{(p-1)^3}\right)$$

$$\rho(n)=\sum_{m_1+m_2+m_3=n}\frac{1}{\log m_1\log m_2\log m_3}$$

证明 把引理 10 及引理 7 的结果用到式 ⑤ 立刻得到

$$r(n)-\rho(n)\sum_{q\leqslant\log^{15}n}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(n)=O(n^2\log^{-4}n) \tag{70}$$

设

$$T(n)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(n)$$

则(参看引理 7 的证明)

$$\left|T(n)-\sum_{q\leqslant\log^{15}n}\frac{\mu(q)}{\phi^3(q)}C_q(n)\right|\leqslant\sum_{q>\log^{15}n}\phi^{-2}(q)=O(\log^{-14}n)$$

结合上式及 ⑰ 并由 ⑰ 得

$$|r(n)-T(n)\rho(n)|\leqslant C_1n^2\log^{-14}n$$

但因 $C_q(n)$ 是 q 的乘性函数,故容易验证

$$T(n)=\prod_p\left(1-\frac{C_p(n)}{(p-1)^3}\right)=S(n)$$

引理证毕.

定理 1 (哥德巴赫-维诺格拉多夫)有 $n_0>0$存在,使得每一个大于 n_0的奇数 n 都可以表成三个素数之和.

证明 由上引理,我们只要证明当 n 是充分大的奇数

$$S(n)\rho(n)>An^2\log^{-3}n,A\text{ 是正的常数} \tag{71}$$

由定义(看 ⑨)

$$C_p(n)=\sum_{1\leqslant l<p}e\left(\frac{nl}{p}\right)=\begin{cases}p-1, & p\mid n\\ -1, & p\nmid n\end{cases}$$

因此，当 n 是偶数时，$S(n)=0$，而当 n 是奇数时

$$S(n)=2\prod_{p>2}\left(1-\frac{C_p(n)}{(p-1)^3}\right)\geqslant 2\prod_{p>2}\{1-(p-1)^{-2}\}\geqslant$$

$$2\prod_{m=2}^{\infty}(1-m^{-2})=1$$

又由引理 6，当 n 充分大时，$\rho(n)>\frac{1}{3}n^2\log^{-3}n$，故 ⑦ 成立，定理随之证明.

5 Гольдбах 问题①

——华罗庚

5.1 Виноградов 定理

用 $r(N)$ 表示将一奇数 N 表成三个素数之和的表法种数，则有

$$r(N)=\int_0^1(S(\alpha))^3\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}N\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

此处

$$S(\alpha)=\sum_{p\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha p}$$

p 经过小于等于 N 的全体素数.

将积分区间移至 $\left(-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right)$，此处 $\tau=NL^{-h}$，而 $L=\log N$，h 为一大于等于 16 的正整数. 用 $M_{h,q}$ 表示区间

$$\alpha=\frac{a}{q}+\beta,\ |\beta|\leqslant\frac{1}{\tau},1\leqslant q\leqslant L^h,(a,q)=1$$

这些小区间互不重叠. 区间的剩余部分用 E 表示之.

在 $M_{h,q}$ 上可有

$$\sum_{p\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha p}=\sum_{p\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\frac{a}{q}+\beta)p}=\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{ar}{q}}\sum_{n\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta n}(\pi(n;q,r)-$$

$$\pi(n-1;q,r))+O(q)=$$

$$\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{ar}{q}}\Big(\sum_{n\leqslant N-1}\pi(n;q,r)(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta n}-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta(n+1)})+$$

$$\pi(N;q,r)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\beta N}\Big)+O(q)$$

由 Siegel-Walfaisz 定理我们得到

① 摘自：华罗庚，著. 指数和的估计及其在数论中的应用. 北京：科学出版社，1963.

$$\sum_{p\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi i\alpha p}=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\mathrm{e}^{2\pi i\frac{ar}{q}}\Big(\sum_{n\leqslant N-1}\mathrm{Li}\ n(\mathrm{e}^{2\pi i\beta n}-\mathrm{e}^{2\pi i\beta(n+1)})+\mathrm{Li}\ N\cdot\mathrm{e}^{2\pi i\beta N}\Big)+$$

$$O(NL^{-4h})=\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\Big(\sum_{2<n\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi i\beta n}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}\Big)+O(NL^{-4h})=$$

$$\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_{2}^{N}\frac{\mathrm{e}^{2\pi i\beta t}}{\log t}\mathrm{d}t+O(NL^{-4h})$$

最后一步是因为

$$\mathrm{e}^{2\pi i\beta n}-\mathrm{e}^{2\pi i\beta t}=2\pi i\beta\int_{t}^{n}\mathrm{e}^{2\pi i\beta u}\mathrm{d}u\ll\beta(n-t)\ll\frac{n-t}{\tau}$$

在 E 上,可有

$$|S(\alpha)|\ll NL^{5-\frac{1}{2}h}$$

所以得到

$$r(N)=\sum_{M}\int_{M_{a,q}}(S(\alpha))^{3}\mathrm{e}^{-2\pi iN\alpha}\mathrm{d}\alpha+O(N^{2}L^{-4})=$$

$$\frac{N^{2}}{2L^{3}}Б(N)+O(N^{2}L^{-4}\log L)$$

式中

$$Б(N)=\prod_{p\nmid N}\Big(1+\frac{1}{(p-1)^{3}}\Big)\prod_{p\mid N}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\Big)$$

因为

$$Б(N)>\prod_{p\mid N}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\Big)>\prod_{p}\Big(1-\frac{1}{p^{2}}\Big)=\frac{6}{\pi^{2}}$$

故得定理.

(1) 除了 Hardy 与 Littlewood 的开创性工作外,我们还要提到 Estermann 的两个结果,这两个结果是在 Виноградов 的重大贡献之前得到的.他证明了:

(i) 每一个大的奇整数都能表成形如 $p_1+p_2+p_3p_4$ 的和数,这里的 p_1,p_2,p_3,p_4 都是素数;

(ii) 每一个大的整数都是两个素数与一平方数的和.

(2) 在 Виноградов 的工作之后,Линник 与 Чудаков 给出了另外两个证明,这两证明都以 L – 函数在临界带状区域中的零点分布为基础.更确切地说,所用到的性质是 Dirichlet L – 函数 $L(s,\chi)$ 在矩形 $\beta\leqslant\sigma\leqslant1,\ |t|\leqslant T$ 中的零点个数等于

$$O(q^{2\beta-1}T^{4(1-\beta)(3-2\beta)^{-1}}\log^{10}T+q^{30})$$

此处 χ 表一 mod q 的原特征,又记号 O 中所含的常数与 q 无关.

5.2 Виноградов 定理的推广

(1) 不少数学工作者研究了有"比例条件"的 Гольдбах 问题,此即

$$N = p_1 + p_2 + p_3, p_i \sim \frac{1}{3}N$$

在 $N \to \infty$ 时成立. 最好的结果是 Haselgrove 所宣布的:每一个大的奇整数都能表成

$$N = p_1 + p_2 + p_3, p_i = \frac{1}{3}N + O(N^{\theta})$$

的形状,此得$\frac{63}{64} < \theta < 1$.

(2) 另外一些数学工作者研究了如下类型的问题:对于 $s \geqslant 3$,找出

$$N = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_sp_s$$

的可解条件,这里的 $a_1, \cdots, a_s$ 都是给定的整数,而

$$p_v \equiv l_v(\bmod q), 1 \leqslant v \leqslant s$$

对于 $s \geqslant 3$,处理这些问题并无本质的困难. 吴方更进一步推广了这个问题,他在某些条件下建立了

$$\sum_{v=1}^{m} a_{\mu v}p_v = b_\mu, \mu = 1,2,\cdots,n, m \geqslant 2n+1, 2 \leqslant p_v \leqslant P, v = 1,2,\cdots,m$$

的解数的渐近公式.

5.3 关于偶数的 Гольдбах 问题的结果

在 Виноградов 的重要工作之后,很多数学工作者彼此独立地证明了下面的定理:几乎全体偶整数都能表成两个素数之和. 华罗庚的结果较别人的结果稍强,他证明了 $p_1 + p_2^k$ 表出几乎全体偶数.

Линник 作出了主要的推进.

(1) 在 Riemann 猜测真确的假定下,对于任何 $\varepsilon > 0$ 及对每一大的整数 N,总可以找到两个素数 p_1 及 p_2,使

$$|N - p_1 - p_2| < (\log N)^{3+\varepsilon}$$

成立. 又在一较弱的假定下,也即如果

$$N(\sigma, T) = O(T^{2(1-\sigma)}\log^2 T)$$

则得

$$|N - p_1 - p_2| < (\log N)^7$$

由 Ingham 关于相继素数的定理,我们立刻得到 $|N - P_1 - P_2| < N^{\frac{25}{64}+\varepsilon}$. Линник 证明,由此甚至能够得出

$$|N - p_1 - p_2| < N^{0.13}$$

(2) 对于任何给定的正整数 $g > 1$,恒存在正整数 k_0,使对任何给定的 $k > k_0$,每一个 $\equiv kg \pmod 2$ 的大整数都能用

$$p_1 + p_2 + g^{x_1} + \cdots + g^{x_k}$$

表出,这里的 p_1 与 p_2 都是素数,而 $x_1, \cdots, x_k$ 都是正整数.

Rényi 作出了另一个有趣的推进.

(3) 存在常数 k,使每一大偶数都是某一素数与另一个不超过 k 个素数的乘积的和.在此以前,Бухштаб证明了:对于任何给定的 $\lambda > 0$,每一大偶数 N 都能表成 $N = p + N'$ 的形状,这里的 p 是素数,而 N' 的素因子都小于 $(\log N)^{\lambda}$.这种表法的个数小于 $cN/(\log N \log\log N)$,而 $c > 0$.

此外,A. Page 证明:将偶数 N 分解成一个素数与一无平方因子数的方法数等于

$$\prod_{p}(1 - (p^2 - p)^{-1})\prod_{p\mid N}\frac{p^2 - p}{p^2 - p - 1}\int_2^N \frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O\left(\frac{N}{\log^5 N}(\log\log N)^8 \log\log\log N\right)$$

王元证明了:

(4) 在广义 Riemann 猜想真确的假定下,每一大偶数都是一个素数与一个至多是四个素数乘积的数之和.

Rényi 的证明主要基于 Линник 的所谓"大筛法"的某一改进的应用,就许多关系来说,这个大筛法与 Brun 的方法相似.这两个方法的主要不同点是:在 Brun 的方法中,由 mod p 的全体剩余类中所除去的类数 k 对一切 p 都是固定的,但在 Линник 的方法中,它们能够随 p 而变.因为 Линник 的大筛法曾为很多数学工作者成功地应用过,所以我们现在把它的轮廓作如下的描述:设 $p_1, \cdots, p_y$ 为任意 y 个适合 $p_i \leqslant \sqrt{N}(i = 1, \cdots, y)$ 的素数.

定理 用 $f(p)$ 表一正值函数,$f(p) < p$,又命

$$\tau = \min_{i=1,2,\cdots,y} \frac{f(p_i)}{p_i}$$

假如从序列 $1, 2, \cdots, N$ 中除去那些属于 mod $p_i(i = 1, \cdots, Y)$ 的 $f(p_i)$ 个确定的剩余类中某一类的整数,则余下的整数个数不超过

$$\frac{20\pi N}{\tau^2 y}$$

证明 设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_Z \leqslant N$ 为从序列 $1, 2, \cdots, N$ 中除去属于 $f(p_i)$ 个 mod $p_i(i = 1, 2, \cdots, y)$ 的剩余类中某一类的那些整数后所余下的整数.命

$$S(\alpha) = \sum_{j=1}^{Z} \mathrm{e}^{2\pi i \alpha n_j}$$

则对 $\delta = \frac{\tau}{20\pi N}$,显然有

$$Z = I = \int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha \geqslant \sum_{p_j} \sum_{y=1}^{p_j-1} \int_{-\delta}^{+\delta} \left| S\left(\frac{y}{p_j} + x\right) \right|^2 dx = \sum_{p_j} I'_{p_j}$$

这是因为任何两个积分区间都不交叠的缘故.另一方面,我们有

$$I'_p = \sum_{y=0}^{p-1} \int_{-\delta}^{\delta} \left| S\left(\frac{y}{p} + x\right) \right|^2 dx - \int_{-\delta}^{\delta} |S(x)|^2 dx \geqslant$$

$$2\delta p\left(1 - \frac{\tau}{10}\right) \sum_{n_i \equiv n_j (\mathrm{mod}\ p)} \sum 1 - 2\delta Z^2$$

用 a_i 表 $n_1, \cdots, n_z$ 诸数中与同一 ξ_i 模 p 同余者之个数,则由 Schwarz 不等式,可以得出

$$\sum_{n_i \equiv n_j (\mathrm{mod}\ p)} \sum 1 = \left(\sum_i a_i^2\right) \geqslant \frac{\left(\sum_i a_i\right)^2}{p - f(p)} = \frac{Z^2}{p - f(p)} \geqslant \frac{Z^2}{p}(1 + \tau)$$

于是得到

$$Z \geqslant \gamma\delta\tau Z^2 = \gamma \frac{\tau^2}{20\pi N} Z^2$$

证毕.

这个定理具有下述的等价形式:

设 $n_1 < n_1 < \cdots < n_Z \leqslant N$ 为 Z 个正整数.用 $f(p)$ 表一适合 $f(p) < p$ 的正值函数,而命

$$\tau = \min_{p \leqslant \sqrt{N}} \frac{f(p)}{p} > 0$$

则至多除了

$$\frac{20\pi N}{\tau^2 Z}$$

个例外的素数外,对于每一素数 $p \leqslant \sqrt{N}$,整数 $n_1, \cdots, n_Z$ 一定分落在不少于 $p - f(p)$ 个不同的模 p 剩余类中.

6 素数变数的线性方程组①

——吴方

6.1 引言

在华罗庚教授的著作《堆基素数论》第十二章中曾经提出了关于整系数素数变数的线性方程组

① 原载《数学学报》第七卷第 1 期.

$$\sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v} p_v = b_\mu, \mu = 1, \cdots, n \qquad ①$$

的解的问题[①].这个问题是有名的 Виноградов-Гольдбах 定理的自然推广.1937年苏联 Виноградов 院士首先证明了[②]任何充分大的奇整数 N 都能表成三个素数之和,且如令 $I(N)$ 为表示法的种数,则

$$I(N) = \frac{1}{2}\prod_{p=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right)\frac{N^2}{\log^3 N} + O\left(\frac{N_2}{\log^{3.5-\varepsilon}N}\right)$$

其后 James 与 Weyl[③],Hans-Egon Richert[④]先后考虑了当整数 $a_1, \cdots, a_m$ 两两互素,且 $b \equiv \sum_{v=1}^{m} a_v \pmod 2$ 时,方程

$$b = a_1 p_1 + \cdots + a_m p_m, m \geqslant 3 \qquad ②$$

在 $3 \leqslant p_v \leqslant P$ 内的素数解的问题:如令 $I(b;P)$ 表此方程的素数解数,而令 $J(b;P)$ 表此方程的正整数解数,Richert 证明了

$$I(b;P) = \frac{G(b)}{\log^m P} J(b;P) + O\left(\frac{P^{m-1}}{\log^{m+1}P}\right)$$

此处

$$G(b) = \prod_{p \nmid bA_m}\left(1+\frac{(-1)^{m+1}}{(p-1)^m}\right)\prod_{\substack{p|bA_m \\ p|(b,A_m)}}\left(1+\frac{(-1)^{m+1}}{(p-1)^{m-2}}\right)\prod_{\substack{p|bA_m \\ p\nmid(b,A_m)}}\left(1+\frac{(-1)^m}{(p-1)^{m-1}}\right)$$

而 $A_m = a_1 a_2 \cdots a_m$.特别当 $a_v > 0 (1 \leqslant v \leqslant m)$ 时,等式

$$I(P,P) = \frac{G(P)}{(m-1)!A_m} \cdot \frac{P^{m-1}}{\log^m P} + O\left(\frac{P^{m-1}}{\log^{m+1}P}\right)$$

成立.易见当 $m = 3$ 时,式 ② 即为式 ① 当 $n = 1$ 时的特殊情形.

范·德·科皮特[⑤]于1939年也曾考虑过方程组 ① 的解的问题,但他没有做得全部结果,以后也没有看到他解决.

华罗庚教授建议作者采取一致逼近的方法来考虑这个问题,这个方法仅于一般处理堆基素数论中有关方程组的问题时所采用的方法.作者于此谨向华罗庚教授表示衷心的感谢.

在本文中,将引进以下的一些记号,并作如下一些假定:

命 $a_{\mu v}(\mu = 1, \cdots, n; v = 1, \cdots, 2n+1)$ 为 $n(2n+1)$ 个给定的整数.今假定矩阵

---

① 华罗庚.堆基素数论.中国科学院出版,1953.

② Виноградов,И.М.,Представление нечетного числа суммой трех простых чисел,Доклабы АН СССР,т.15(1937),291 - 394.

③ James,R.D.and Weyl,H., Elementary note on prime number problems of Vinogradoff's type, Amer. J.Math.,64(1942),539 - 552.

④ Richert Hans Egon., Aus der additiven Zahlentheorie, Jour. Reine Angew. Math.,191(1953),179 - 198.

⑤ van der Corput,J.G.,Propriétés additives.I, Acta Arithmetica, 3,(1939),180 - 234.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,2n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,2n+1} \end{pmatrix} \qquad ③$$

的所有 n 级子式全不为 0，且在这些 n 级子式间没有 1 以外的公因子.

命 $b_1,\cdots,b_n$ 为 n 个整数. 又命 P 表示一个充分大的正整数. 令 $L = \log P$，而以 $I(b;P)$ 表示方程组 ① 在 $2 \leqslant p_v \leqslant P(v = 1,\cdots,2n+1)$ 内的解组数，则

$$I(b;P) = \sum_{\substack{p_1=2 \\ \sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v}p_v = b_\mu (1\leqslant\mu\leqslant n)}}^{P} \cdots \sum_{p_{2n+1}=2}^{P} =$$

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{v=1}^{2n+1}\Big(\sum_{p\leqslant P}e\Big(p\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\Big)\Big)e\Big(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \qquad ④$$

其中 $e(x) = \mathrm{e}^{2\pi ix}$.

又命 $(\phi(p))^{2n+1}\dfrac{s(p)}{p^n}$ 表示同余组

$$\sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v}l_v \equiv b_\mu \pmod p, \mu = 1,\cdots,n \qquad ⑤$$

在 $1 \leqslant l_v \leqslant p-1(v = 1,\cdots,2n+1)$ 内的解组数.

本文的主要结果为：

定理 1 在以上的假定下

$$I(b;P) = \prod_{p=2}^{\infty}s(p)\cdot\frac{P^{n+1}}{L^{2n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^{2n+1}\Big(\int_0^1 e\Big(s\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\beta_\mu\Big)\mathrm{d}s\Big)\cdot$$

$$e\Big(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\Big)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n + O\Big(\frac{P^{n+1}}{L^{2n+2}}(\log L)^n\Big) \qquad ⑥$$

$\Big($当 $n = 1$ 时，误差项可改为 $O\Big(\dfrac{P^2}{L^4}\Big)\Big)$. 其中 $\prod\limits_{p=2}^{\infty}$ 经过所有的素数，而 O 内所含的常数与 b_μ 无关.

与定理 1 的证明完全相同地可以证明：

定理 2 若 $m \geqslant 2n+1$，整系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad ③'$$

的所有 n 级子式全不为 0，且在这些 n 级子式间没有 1 以外的公因子，则

$$\sum_{v=1}^{m} a_{\mu v}p_v = b_\mu, \mu = 1,\cdots,n \qquad ①'$$

在 $2 \leqslant p_v \leqslant P(v = 1,\cdots,m)$ 内的解数为

$$I_1(b;P)=\prod_{p=2}^{\infty}s_1(p)\frac{P^{m-n}}{L^m}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^{m}\left(\int_0^1 e\left(s\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu v}\beta_\mu\right)\mathrm{d}s\right)\cdot$$
$$e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\right)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n+O\left(\frac{P^{m-n}}{L^{m+1}}(\log L)^n\right) \qquad ⑥'$$

$\left(当\ n=1\ 时,误差项可改为\ O\left(\frac{P^{m-1}}{L^{m+1}}\right)\right)$.其中 $s_1(p)$ 的意义与 $s(p)$ 相类似,而 O 内所含的常数也与 b_μ 无关.

特别当 $n=1$ 时,我们更可以得到:

定理 3 设 $(a_1,\cdots,a_m)=1,m\geqslant 3,b\equiv\sum_{v=1}^{m}a_v \pmod 2$.若对任意 $m-1$ 个 a_v,常有

$$(a_{v_1},\cdots,a_{v_{m-1}},b)=1$$

则方程 ② 在 $3\leqslant p_v\leqslant P$ 内的素数解数为

$$I(b;P)=\frac{P^{m-1}}{L^m}\frac{G_1(b)}{|a_1|}\underset{\substack{0<s_1<1\\ \sum_{v=1}^{m}a_v s_v=\frac{b}{p}}}{\int_0^1\cdots\int_0^1}\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_m+O\left(\frac{P^{m-1}}{L^{m+1}}\right) \qquad ⑦$$

其中 $G_1(b)$ 也为一无穷乘积(详见 6.6),且恒大于一与 b 无关的正数.又若 $a_v>0(1\leqslant v\leqslant m)$ 时,更可得到

$$I(P;P)=\frac{G_1(P)}{(m-1)!A_m}\frac{P^{m-1}}{L^m}+O\left(\frac{P^{m-1}}{L^{m+1}}\right) \qquad ⑧$$

6.2 奇异级数

命 $e(x)=e^{2\pi i x}$,

$$A(q)=\sum_{\substack{h_1=1\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q}\cdots\sum_{h_n=1}^{q}\frac{\prod_{v=1}^{2n+1}\sum_{1\leqslant l\leqslant q}{}'e\left(\frac{l}{q}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{(\phi(q))^{2n+1}}e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\frac{h_\mu}{q}\right) \qquad ⑨$$

其中和号 $\sum_{1\leqslant l\leqslant q}{}'$ 表示对 l 求和,而 l 经过模 q 的缩系.

引理 1 $A(q)$ 是积性函数.亦即若 $(q_1,q_2)=1$,则

$$A(q_1q_2)=A(q_1)\cdot A(q_2) \qquad ⑩$$

证明 命

$$h_\mu=j_\mu q_2+k_\mu q_1,\mu=1,\cdots,n$$
$$l=l_1q_2+l_2q_1$$

则由 $(h_1,h_2,\cdots,h_n,q_1q_2)=1$ 可以推得 $(j_1,j_2,\cdots,j_n,q_1)=1,(k_1,k_2,\cdots,k_n,q_2)=1$;反之也能从后者推得前者.又当 l 经过模 q_1q_2 的一组缩系时,l_1,l_2 分

别经过模 q_1 与模 q_2 的一组缩系.因此

$$A(q_1q_2)=\sum_{\substack{h_1=1\\(h_1,\cdots,h_n,q_1q_2=1)}}^{q_1q_2}\cdots\sum_{h_n=1}^{q_1q_2}\frac{\prod\limits_{v=1}^{2n+1}\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant q_1q_2}{}' e\left(\frac{l}{q_1q_2}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{(\phi(q_1q_2))^{2n+1}}e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{h_\mu}{q_1q_2}b_\mu\right)=$$

$$\sum_{\substack{j_1=1\\(j_1,\cdots,j_n,q_1=1)}}^{q_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{q_1}\frac{\prod\limits_{v=1}^{2n+1}\sum\limits_{1\leqslant l_1\leqslant q_1}{}' e\left(\frac{l_1}{q_1}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}j_\mu\right)}{(\phi(q_1))^{2n+1}}e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{j_\mu}{q_1}b_\mu\right)\cdot$$

$$\sum_{\substack{k_1=1\\(k_1,\cdots,k_n,q_2=1)}}^{q_2}\cdots\sum_{k_n=1}^{q_2}\frac{\prod\limits_{v=1}^{2n+1}\sum\limits_{1\leqslant l_2\leqslant q_2}{}' e\left(\frac{l_1}{q_2}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}k_\mu\right)}{(\phi(q_2))^{2n+1}}e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{k_\mu}{q_2}b_\mu\right)=$$

$$A(q_1)\cdot A(q_2)$$

引理 2 当 $l\geqslant 2$ 时

$$A(p^l)=0 \tag{11}$$

证明 令 $m=a+bp^{l-1}$,则

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant p^l}{}' e\left(\frac{m}{p^l}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)=\sum_{1\leqslant a\leqslant p^{l-1}}{}'\sum_{b=1}^{p}e\left(\frac{a+bp^{l-1}}{p^l}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)=$$

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant p^{l-1}}{}' e\left(\frac{a}{p^l}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)\sum_{b=1}^{p}e\left(\frac{b}{p}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)=$$

$$\begin{cases}p\sum\limits_{1\leqslant a\leqslant p^{l-1}}{}' e\left(\frac{a}{p^l}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right), & \sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\equiv 0(\bmod p)\\ 0, & \sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\equiv 0(\bmod p)\end{cases}$$

所以仅当

$$\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\equiv 0(\bmod p) \tag{12}$$

对所有的 $1\leqslant v\leqslant 2n+1$ 都成立时

$$\prod_{v=1}^{2n+1}\sum_{1\leqslant m\leqslant p^l}{}' e\left(\frac{m}{p^l}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)$$

才可能不等于0.但因假定矩阵③的所有 n 级子式间无公因子,故当 $(h_1,\cdots,h_n,p)=1$ 时,同余组⑫无解,故得引理.

引理 3 命

$$(\phi(p))^{2n+1}\frac{s(p)}{p^n}$$

表示同余组

$$\sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v} l_v \equiv b_\mu (\bmod p), \mu = 1, \cdots, n$$

在 $1 \leqslant l_v \leqslant p-1(v = 1, \cdots, 2n+1)$ 中的解数,则

$$1 + A(p) = s(p) \qquad ⑬$$

证明 因

$$1 + A(p) = \sum_{h_1=1}^{p} \cdots \sum_{h_n=1}^{p} \frac{\prod_{v=1}^{2n+1} \sum_{l=1}^{p-1} e\left(\frac{l}{p} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v} h_\mu\right)}{(\phi(p))^{2n+1}} e\left(-\sum_{\mu=1}^{n} \frac{h_\mu}{p} b_\mu\right) =$$

$$\frac{p^n}{(\phi(p))^{2n+1}} \sum_{\substack{l_1=1 \\ \sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v} l_v \equiv b_\mu \ (\bmod p)}}^{p-1} \cdots \sum_{l_{2n+1}=1}^{p-1} 1 = s(p)$$

故得引理.

引理 4 对于任何正数 ε,常有

$$A(q) = O(q^{-2+\varepsilon}) \qquad ⑭$$

证明 先考虑 q 为素数 p 的情形.当 p 大于矩阵③的所有 n 级子式的绝对值时,若 $h_1, \cdots, h_n$ 不全为 p 的倍数,则在 $2n+1$ 个线性式

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v} h_\mu, v = 1, \cdots, 2n+1$$

中至多只可能有 $n-1$ 个能为 p 的倍数.因此

$$|A(p)| \leqslant \sum_{\substack{h_1=1 \\ (h_1, \cdots, h_n, p)=1}}^{p} \cdots \sum_{h_n=1}^{p} \frac{\prod_{v=1}^{2n+1} \left| \sum_{1 \leqslant l \leqslant p}' e\left(\frac{l}{p} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v} h_\mu\right) \right|}{(\phi(p))^{2n+1}} \leqslant$$

$$\sum_{h_1=1}^{p} \cdots \sum_{h_n=1}^{p} \frac{1}{(\phi(p))^{n+2}} = \frac{p^n}{(\phi(p))^{n+2}}$$

故必有正数 C 使

$$|A(p)| \leqslant Cp^{-2}$$

对所有的素数都成立.

对于一般的 q,若 q 含有 1 以外的平方因子,则 $A(q) = O$;若不然,命 $v(q)$ 表示 q 的素因子的个数,则

$$|A(q)| \leqslant C^{v(q)} q^{-2} = O(q^{-2+\varepsilon})$$

对任何正数 ε 都成立.

由以上诸引理,立刻得到:

引理 5 级数

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q)$$

为绝对收敛,且

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p=2}^{\infty} s(p) \tag{15}$$

6.3 基本引理

引理 6 (Siegel-Walfisz)[①]命 σ_1, σ_2 为任意给定的二个正实数,若 $q \leqslant L^{\sigma_1}$, $(l, q) = 1, x \leqslant P$,而命 $\pi(x; l, q)$ 表示算术级数 $qm + l$ 中不大于 x 的素数的个数,则

$$\pi(x; l, q) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l(q)}} 1 = \frac{1}{\phi(q)} \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(P\mathrm{e}^{-\sigma_2\sqrt{L}})$$

符号 O 所包含的常数与 P 及 q 无关.

引理 7 设 σ_3, σ_4 为两个任意给定的正实数,则对适合

$$\left| \alpha - \frac{h}{q} \right| \leqslant P^{-1} L^{\sigma_4}, q \leqslant L^{\sigma_1}$$

的实数 α,常有

$$\sum_{p \leqslant P} \mathrm{e}^{2\pi i p\alpha} - \frac{\sum\limits_{1 \leqslant l \leqslant p}{}' e\left(\frac{lh}{q}\right)}{\phi(q)} \int_2^P \frac{e\left(t\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)}{\log t} \mathrm{d}t = O(PL^{-\sigma_3}) \tag{16}$$

证明 应用引理 6,并由部分求和法,得

$$\sum_{p \leqslant P} \mathrm{e}^{2\pi i p\alpha} = \sum_{1 \leqslant l \leqslant p}{}' e\left(\frac{lh}{q}\right) \sum_{\substack{p \leqslant P \\ p \equiv l(q)}} e\left(p\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right) + O(q) =$$

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant p}{}' e\left(\frac{lh}{q}\right) \sum_{m \leqslant P} e\left(m\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)(\pi(m; l, q) - \pi(m-1; l, q)) + O(q) =$$

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant p}{}' e\left(\frac{lh}{q}\right)\left(\sum_{m \leqslant P-1}\left(e\left(m\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right) - e\left((m+1)\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)\right)\pi(m; l, q) + \right.$$

$$\left.\pi(P; l, q) e\left(P\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)\right) + O(q) =$$

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{1 \leqslant l \leqslant p}{}' e\left(\frac{lh}{q}\right)\left(\sum_{m \leqslant P-1}\left(e\left(m\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right) - e\left((m+1)\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)\right)\int_2^m \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + \right.$$

$$\left. e\left(P\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)\int_2^P \frac{\mathrm{d}t}{\log t}\right) + O(PL^{-\sigma_3}) =$$

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{1 \leqslant l \leqslant q}{}' e\left(\frac{lh}{q}\right) \sum_{3 \leqslant m \leqslant P} e\left(m\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)\int_{m-1}^m \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O(PL^{-\sigma_3}) =$$

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{1 \leqslant l \leqslant q}{}' e\left(\frac{lh}{q}\right) \sum_{3 \leqslant m \leqslant P} \int_{m-1}^m \frac{e\left(t\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)}{\log t} \mathrm{d}t + O(PL^{-\sigma_3})$$

---

① Walfisz, A., Zur additiven Zahlentheorie II, Math. Zeits., 40(1936), 592 – 607.

此即引理.

引理8 (Виноградов)[①]命 σ_5 为任何给定的正实数,$\sigma_6 = 2\sigma_5 + 9$,则对 α 之不在任何区间

$$\left(\frac{h}{q} - P^{-1}L^{\sigma_6}, \frac{h}{q} + P^{-1}L^{\sigma_6}\right)$$

中者($q \leqslant L^{\sigma_6}$),恒有

$$\sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i p \alpha} \ll PL^{-\sigma_5} \qquad ⑰$$

6.4 余区间上的估计

命 $\sigma_5 \geqslant 2(n+1)$ 为任何给定的正实数,而命

$$\sigma_6 = 2\sigma_5 + 9, \sigma_1 = n\sigma_6 + 1 \qquad ⑱$$

又命 $\tau = PL^{-\sigma_1}$,而以 $M = M\left(\frac{h_1}{q}, \cdots, \frac{h_n}{q}\right)$ 表示 n 维空间中的立方体

$$\left|\alpha_\mu - \frac{h_\mu}{q}\right| < \tau^{-1}, \mu = 1, \cdots, n \qquad ⑲$$

其中,$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 为 n 维空间中的一点,而

$$(h_1, \cdots, h_n, q) = 1, 0 \leqslant h_\mu < q \leqslant L^{\sigma_1}$$

则当 P 很大时,易见二个不同的 M 不能相交.又以 K 表示从立方体

$$-\tau^{-1} < \alpha_\mu < 1 - \tau^{-1}, \mu = 1, \cdots, n$$

中除去全部 M 后所剩余的部分.于是命

$$U(b;P) = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} \cdots \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} \prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_2^P \frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\alpha_\mu\right)}{\log t} dt\right) e\left(-\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu \alpha_\mu\right) d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \qquad ⑳$$

$$U_1(b;P) = \sum_M \int_M \left(\frac{\prod_{v=1}^{2n+1} \sum_{1 \leqslant l \leqslant p}{}' e\left(\frac{l}{q} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v} h_\mu\right)}{(\phi(p))^{2n+1}} \prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_2^P \frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\left(\alpha_\mu - \frac{h_\mu}{q}\right)\right)}{\log t} dt\right) - \prod_{v=1}^{2n+1}\left(\sum_{p \leqslant P} e\left(p \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\alpha_\mu\right)\right)\right) e\left(-\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu \alpha_\mu\right) d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \qquad ㉑$$

及

$$U_2(b;P) = \int_M \prod_{v=1}^{2n+1}\left(\sum_{p \leqslant P} e\left(p \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\alpha_\mu\right)\right) e\left(-\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu v}\alpha_\mu\right) d\alpha_1 \cdots d\alpha_n \qquad ㉒$$

则因 $e(x)$ 的周期为1,故得

---

① Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Избранные труэы, АН СССР, 237 – 331.

$$I(b;P)=\int_{1-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}\cdots\int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}}\prod_{v=1}^{2n+1}\Big(\sum_{p\leqslant P}e\Big(p\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\Big)\Big)e\Big(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=$$

$$\Big(\sum_M\int_M+\int_K\Big)\prod_{v=1}^{2n+1}\Big(\sum_{p\leqslant P}e\Big(p\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\Big)\Big)e\Big(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=$$

$$U(b;P)\sum_{q\leqslant L^{\sigma_1}}A(q)-U_1(b;P)+U_2(b;P)$$

由引理 4 及引理 5 得到

$$I(b;P)=U(b;P)\prod_{p=2}^{\infty}s(p)-U_1(b;P)+U_2(b;P)+O(L^{-\frac{\sigma_1}{2}}U(b;P)) \quad ㉓$$

今将分别进行估计 $U_2(b;P)$, $U_1(b;P)$ 及 $U(b;P)$.

引理 9 对于 K 中任何一点 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,必有一自然数 $\lambda\leqslant n$,使

$$\sum_{p\leqslant P}e\Big(p\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\alpha_\mu\Big)\ll PL^{-\sigma_5} \quad ㉔$$

证明 若能证明对于 $\boldsymbol{\alpha}$,必有一自然数 $\lambda\leqslant n$,使 $\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\alpha_\mu$ 不在任何区间

$$(r-P^{-1}L^{\sigma_6},r+P^{-1}L^{\sigma_6})$$

内,r 为一分母不大于 L^{σ_6} 的既约分数,于是由引理 8 得到证明.

事实上,若对 $\boldsymbol{\alpha}$ 有 n 个分母不大于 L^{σ_6} 的既约分数 $r_1,\cdots,r_n$,使

$$\Big|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu-r_v\Big|<P^{-1}L^{\sigma_6},v=1,\cdots,n$$

同时成立,则必有一组有理数 $\frac{h_1}{q},\cdots,\frac{h_n}{q}$ 适合

$$(h_1,\cdots,h_n,q)=1,q>0$$

使

$$\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\frac{h_\mu}{q}=r_v,v=1,\cdots,n$$

同时成立.由此易见 $q\ll L^{n\sigma_6}$,故若取 P 很大,必能使 $q\leqslant L^{n\sigma_6+1}=L^{\sigma_1}$.又由

$$\Big|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\Big(\alpha_\mu-\frac{h_\mu}{q}\Big)\Big|<P^{-1}L^{\sigma_6},v=1,\cdots,n$$

可以得到

$$\alpha_\mu-\frac{h_\mu}{q}\ll P^{-1}L^{\sigma_6}$$

取 P 很大,可使

$$\Big|\alpha_\mu-\frac{h_\mu}{q}\Big|<\tau^{-1}=P^{-1}L^{\sigma_1},\mu=1,\cdots,n$$

易见 $0\leqslant h_\mu<q\leqslant L^{\sigma_1}$,亦即有一 $M=M\Big(\frac{h_1}{q},\cdots,\frac{h_n}{q}\Big)$,使 $\boldsymbol{\alpha}\in M$;这与 $\boldsymbol{\alpha}\in K$

相矛盾,故引理得证.

引理 10 不等式

$$U_2(b;P) \ll P^{n+1}L^{-\sigma_5} \tag{25}$$

成立.

证明 由引理 9 可得

$$U_2(b;P) \ll PL^{-\sigma_5}\sum_{\lambda=1}^{n} I_\lambda$$

其中

$$I_\lambda = \int_0^1\cdots\int_0^1 \prod_{\substack{v=1\\ v\neq\lambda}}^{2n+1}\Big|\sum_{p\leqslant P} e\Big(p\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\alpha_\mu\Big)\Big| \mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n$$

命 $(\lambda,k_1,\cdots,k_n,l_1,\cdots,l_n)$ 为 $(1,\cdots,2n+1)$ 的一种排列, 于是由 Буняковский-Schwarz 不等式,可得

$$I_\lambda^2 \ll \int_0^1\cdots\int_0^1 \prod_{j=1}^{n}\Big|\sum_{p\leqslant P} e\Big(p\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu k_j}\alpha_\mu\Big)\Big|^2 \mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \cdot$$

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \prod_{j=1}^{n}\Big|\sum_{p\leqslant P} e\Big(p\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu l_j}\alpha_\mu\Big)\Big|^2 \mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n = I_{\lambda 1}I_{\lambda 2}$$

但

$$I_{\lambda_1} = \sum_{p_1\leqslant P}\cdots\sum_{p_n\leqslant P}\sum_{q_1\leqslant P}\cdots\sum_{q_n\leqslant P}\int_0^1\cdots\int_0^1 e\Big(\sum_{j=1}^{n}(p_j-q_j)\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu k_j}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n =$$

$$\sum_{\substack{p_1\leqslant P\\ \sum_{v=1}^{n} a_{\mu k_j}(p_j-q_j)=0}}\cdots\sum_{p_n\leqslant P}\sum_{q_1\leqslant P}\cdots\sum_{q_n\leqslant P} 1 \ll P^n$$

同理可得 $I_{\lambda_2} \ll P^n$,因此 $I_\lambda \ll P^n$,而得

$$U_2(b;P) \ll P^{n+1}L^{-\sigma_5}$$

6.5 基本区间上的估计

令

$$V(b;P) = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\cdots\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} \prod_{v=1}^{2n+1}\Big(\int_0^P e\Big(t\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}t\Big) e\Big(-\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \tag{26}$$

$$W(b;P) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{v=1}^{2n+1}\Big(\int_0^P e\Big(t\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}t\Big) e\Big(-\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \tag{27}$$

引理 11 若

$$|\alpha_\mu| < \tau^{-1}, \mu = 1,\cdots,n$$

并不都成立时,必有一自然数 $\lambda \leqslant n$,使

$$\int_0^P e\Big(t\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\lambda}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}t \ll PL^{-\sigma_1+1}$$

证明 因 $|\alpha_\mu| < \tau^{-1}(\mu = 1,\cdots,n)$ 不同时成立,故

$$\Big|\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\lambda}\alpha_\mu\Big| < P^{-1}L^{\sigma_1-1},\lambda = 1,\cdots,n$$

不能同时成立.否则将有

$$|\alpha_\mu| \ll P^{-1}L^{\sigma_1-1},\mu = 1,\cdots,n$$

而导出

$$|\alpha_\mu| < P^{-1}L^{\sigma_1} = \tau^{-1},\mu = 1,\cdots,n$$

的矛盾(取 P 很大).因此必有一 $\lambda \leqslant n$,使

$$\Big|\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu}\alpha_\mu\Big| \geqslant P^{-1}L^{\sigma_1-1}$$

对此 λ

$$\int_0^P e\Big(t\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\lambda}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\Big|\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\lambda}\alpha_\mu\Big|} \ll PL^{-\sigma_1+1}$$

而得引理.

引理 12 等式

$$W(b;P) = V(b;P) + O(P^{n+1}L^{-\sigma_1+1}) \qquad ㉘$$

成立.符号 O 内所含的常数与 $b_1,\cdots,b_n$ 无关.

证明 由以上引理得

$$W(b;P) - V(b;P) \ll PL^{-\sigma_1+1}\sum_{\lambda=1}^n J_\lambda$$

此处

$$J_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\substack{v=1\\ v\neq\lambda}}^{2n+1}\Big|\int_0^P e\Big(t\sum_{\mu=1}^n a_{\mu v}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}t\Big|\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n$$

命$(\lambda,\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 为$(1,2,\cdots,2n+1)$ 的一种排列,则

$$J_\lambda^2 \leqslant \Big(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^n\Big|\int_0^P e\Big(t\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\sigma_v}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}t\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\Big)\cdot$$
$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^n\Big|\int_0^P e\Big(t\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\tau_v}\alpha_\mu\Big)\mathrm{d}t\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\Big) = J_{\lambda_1}J_{\lambda_2}$$

作变换

$$\beta_v = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\sigma_v}\alpha_\mu, v = 1,\cdots,n$$

则

$$J_{\lambda_1} = \frac{1}{|\det(a_{\mu\sigma_v})|}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^{n}\left|\int_0^P e(t\beta_v)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n =$$

$$\frac{1}{|\det(a_{\mu\sigma_v})|}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^P e(t\beta)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}\beta\right)^n =$$

$$\frac{\pi^{-n}P^n}{|\det(a_{\mu\sigma_v})|}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x\right)^n \ll P^n$$

同理 $J_{\lambda_2} \ll P_n$，因此 $J_\lambda \ll P^n$. 引理由此得证.

引理 13 等式

$$U(b;P) = \frac{1}{L^{2n+1}}W(b;P) + O\left(\frac{P^{n+1}}{L^{2n+2}}(\log L)^n\right) \qquad ㉙$$

成立. 特别当 $n = 1$ 时，误差项可改为 $O\left(\frac{P^2}{L^4}\right)$.

证明 当 $n \geqslant 2$ 时，由引理 12，可知只须证明

$$U(b;P) = \frac{1}{L^{2n+1}}V(b;P) + O\left(\frac{P^{n+1}}{L^{2n+2}}(\log L)^n\right)$$

亦即证明

$$\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\cdots\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\left(\prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_2^P\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right)}{\log t}\mathrm{d}t\right) - \prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_0^P\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right)}{L}\mathrm{d}t\right)\right)\cdot$$

$$e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\alpha_\mu\right)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n = O\left(\frac{P^{n+1}}{L^{2n+2}}(\log L)^n\right)$$

便已足够.

因为 $|\alpha_\mu| < \tau^{-1}(\mu = 1,\cdots,n)$，所以

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right| \ll \tau^{-1},\ v = 1,2,\cdots,2n+1$$

由

$$\int_2^P\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right)}{\log t}\mathrm{d}t \ll \min\left(\frac{P}{L},\frac{1}{L\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right|}\right)$$

$$\frac{1}{L}\int_0^P e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right)\mathrm{d}t \ll \min\left(\frac{P}{L},\frac{1}{L\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right|}\right)$$

及

$$\int_2^P\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right)}{\log t}\mathrm{d}t - \int_0^P\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right)}{L}\mathrm{d}t =$$

$$\int_2^P\left(\frac{1}{\log t}-\frac{1}{L}\right)e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right)\mathrm{d}t+O\left(\frac{1}{L}\right)\ll PL^{-2}$$

得到

$$\prod_{\nu=1}^{2n+1}\int_2^P\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right)}{\log t}\mathrm{d}t-\frac{1}{L^{2n+1}}\prod_{\nu=1}^{2n+1}\int_0^P e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right)\mathrm{d}t\ll$$

$$\frac{P}{L^{2n+2}}O\left(\sum_{\lambda=1}^{2n+1}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\lambda}}^{2n+1}\min\left(\frac{1}{\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right|},P\right)\right)$$

今固定一 λ，而考虑

$$K_\lambda=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\cdots\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\lambda}}^{2n+1}\min\left(\frac{1}{\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right|},P\right)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n$$

将区域 $|\alpha_\mu|<\tau^{-1}(\mu=1,\cdots,n)$ 分成两个区域 D_1 与 D_2，使对 $\alpha\in D_1$ 时，常有 n 个或 n 个以上的 $v(1\leqslant v\leqslant 2n+1,v\neq\lambda)$ 使

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right|<\frac{1}{P}$$

成立. 因此当 $\alpha\in D_1$ 时，常有 $\alpha_\mu\ll P^{-1}(\mu=1,\cdots,n)$，因此

$$\int\cdots\int_{D_1}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\lambda}}^{2n+1}\min\left(\frac{1}{\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right|},P\right)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\ll P^{2n}\int\cdots\int_{D_1}\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\ll P^n$$

又由 D_1,D_2 之定义，可知对 D_2 中之 α，必至少有 n 个 $v_1,\cdots,v_n(1\leqslant v_i\leqslant 2n+1,v_i\neq\lambda)$ 适合

$$P^{-1}\leqslant\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v_j}\alpha_\mu\right|\ll\tau^{-1},j=1,\cdots,n$$

以 $D_2(v_1,\cdots,v_n)$ 表示所有使上式成立的 α 的全体所成的集合，则

$$\int\cdots\int_{D_2}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\lambda}}^{2n+1}\min\left(\frac{1}{\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right|},P\right)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\leqslant$$

$$\sum_{(v_1,\cdots,v_n)}\int\cdots\int_{D_2(v_1,\cdots,v_n)}P^n\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v_j}\alpha_\mu\right)}\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\ll$$

$$P^n\int_{P^{-1}}^{O(\tau^{-1})}\cdots\int_{P^{-1}}^{O(\tau^{-1})}\frac{1}{\beta_1\cdots\beta_n}\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n\ll$$

$$P^n(\log L)^n$$

所以

$$K_\lambda=\left(\int\cdots\int_{D_1}+\int\cdots\int_{D_2}\right)\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\lambda}}^{2n+1}\min\left(\frac{1}{\left|\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\alpha_\mu\right|},P\right)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\ll$$

$P^n(\log L)^n$

又当 $n=1$ 时,容易证明

$$K_\lambda \ll P$$

所以由以上的讨论得到

$$U(b;P)-\frac{1}{L^{2n+1}}V(b;P)=O\left(\frac{P}{L^{2n+2}}\sum_{\lambda=1}^{2n+1}K_\lambda\right)$$

故得引理.

作变换

$$t=Ps,\beta_\mu=P\alpha_\mu,\mu=1,\cdots,n$$

由 $W(b;P)$ 的定义,易见

$$W(b;P)=P^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_0^1 e\left(s\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\beta_\mu\right)\mathrm{d}s\right)\cdot$$
$$e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\right)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n \qquad ㉚$$

且用引理 12 的证明方法不难证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_0^1 e\left(s\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\beta_\mu\right)\mathrm{d}s\right)e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\right)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n=O(1) \qquad ㉛$$

而符号 O 内所含常数与 $b_1,\cdots,b_n$ 无关.

于是由引理 13 及式 ㉚ 得到

$$U(b;P)=\frac{P^{n+1}}{L^{2n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_0^1 e\left(s\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\beta_\mu\right)\mathrm{d}s\right)\cdot$$
$$e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\right)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n+O\left(\frac{P^{n+1}}{L^{2n+1}}(\log L)^n\right) \qquad ㉜$$

而当 $n=1$ 时,误差项为 $O\left(\frac{P^2}{L^4}\right)$.

引理 14 不等式

$$U_1(b;P)\ll P^{n+1}L^{-\sigma_5} \qquad ㉝$$

成立.

证明 由引理 7 可知当 $\alpha\in M$ 时,有

$$\sum_{p\leqslant P}e\left(p\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_v\right)-\frac{\sum_{1\leqslant l\leqslant q}{}' e\left(\frac{l}{q}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{\phi(q)}\int_2^P\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\left(\alpha_\mu-\frac{h_\mu}{q}\right)\right)}{\log t}\mathrm{d}t\ll$$
$$PL^{-\sigma_5-(2n+1)\sigma_1}$$

因此

$$\prod_{v=1}^{2n+1}\left(\sum_{p\leqslant P}e\left(p\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right)\right)-\frac{\prod_{v=1}^{2n+1}\sum_{1\leqslant l\leqslant q}{}' e\left(\frac{l}{q}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{(\phi(q))^{2n+1}}\cdot$$

$$\prod_{v=1}^{2n+1}\int_2^P \frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\left(\alpha_\mu - \frac{h_\mu}{q}\right)\right)}{\log t}\mathrm{d}t \ll P^{2n+1}L^{-\sigma_5-(2n+1)\sigma_1}$$

故得

$$U_1(b;P) \ll \sum_{q\ll L^{\sigma_1}}\sum_{h_1=1}^{q}\cdots\sum_{h_n=1}^{q} P^{2n+1}L^{-\sigma_5-(2n+1)\sigma_1}(P^{-1}L^{\sigma_1})^n \ll P^{n+1}L^{-\sigma_5}$$

引理得证.

由引理 10,引理 14,及 ㉓,㉛,㉜ 诸式,得到定理 1 的证明.

又以上诸引理可以毫无困难地推到当变数个数为 $m(\geqslant 2n+1)$ 的情形,因而得到定理 2 的证明.

6.6 正可解条件与同余可解条件的研究

为了使定理 1(及定理 2) 有实际的意义,还有探讨

$$\prod_{s=2}^{\infty} s(p) > 0\left(及\prod_{p=2}^{\infty} s_1(p) > 0\right) \qquad ㉞$$

与

$$B(b;P) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{v=1}^{2n+1}\left(\int_0^1 e\left(s\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\beta_\mu\right)\mathrm{d}s\right)\cdot$$
$$e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\right)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n \geqslant \delta > 0 \qquad ㉟$$

及

$$B_1(b;P) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{m}\left(\int_0^1 e\left(s\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v}\beta_\mu\right)\mathrm{d}s\right)\times$$
$$e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\right)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n \geqslant \delta > 0 \qquad ㊱$$

的性质,此处 δ 为一与 P 无关的正数.华罗庚教授称保证式 ㉞ 成立的条件为同余可解条件;而称保证式 ㉟ 或 ㊱ 成立的条件为正可解条件.

引理 15 若对任何素数 p,同余组

$$\sum_{v=1}^{m} a_{\mu v}l_v \equiv b_\mu (\bmod p), \mu = 1,\cdots,n$$

在 $1 \leqslant l_v \leqslant p-1(v=1,\cdots,m)$ 内常有解时,则

$$\prod_{p=2}^{\infty} s_1(p) > 0$$

证明 在引理假定的条件下,常有 $s_1(p) > 0$. 又因 $s_1(p) = 1 + A_1(p)$,而级数 $\sum_{p=2}^{\infty} A_1(p)$ 为收敛,故引理得证.

今仅讨论 $n=1$ 时的同余可解条件.

引理 16 若$(a_1,a_2,\cdots,a_m)=1$,则同余式

$$a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_ml_m\equiv b\pmod p,1\leqslant l_v\leqslant p-1 \qquad ㊲$$

对所有的素数 p 都有解的充分必要条件为:

(1)$b\equiv\sum_{v=1}^{m}a_v\pmod 2$;

(2)b 与任意 $m-1$ 个 a_v 间无公因子,亦即

$$(a_{v_1},\cdots,a_{v_{m-1}},b)=1$$

且在这两个条件下

$$\prod_{p=2}^{\infty}s_1(p)=\prod_{t=0}^{m-1}\prod_{p_t\nmid b}\left(1+\frac{(-1)^{m-t+1}}{(p_t-1)^{m-t}}\right)\prod_{t=0}^{m-2}\prod_{p_t\mid b}\left(1+\frac{(-1)^{m-t}}{(p_t-1)^{m-t-1}}\right)\geqslant$$
$$2\prod_{p=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \qquad ㊳$$

其中,p_t 表示素数之恰能整除 t 个 a_v 者.

证明 (1),(2) 的必要性至为显然.今假定(1),(2) 成立,并不妨假定 $p_t\mid a_v(m-t+1\leqslant v\leqslant m)$,而考虑同余式

$$a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_{m-t}l_{m-t}\equiv b\pmod{p_t},1\leqslant l_v\leqslant p_t-1 \qquad ㊴$$

的解组个数.

若 $p_t\nmid b$,因 $p_t\nmid a_v(1\leqslant v\leqslant m-t)$,可用数学归纳法证明 ㊴ 的解组个数为

$$\frac{1}{p_t}((\phi(p_t))^{m-t}+(-1)^{m-t-1})$$

故 ㊲ 的解组个数为$\frac{1}{p_t}((\phi(p_t))^m+(-1)^{m-t-1}(\phi(p_t))^t)$,故由 $s_1(p)$ 的定义,得到

$$s_1(p_t)=1+\frac{(-1)^{m-t-1}}{(p_t-1)^{m-t}}\geqslant1-\frac{1}{(p_t-1)^2}$$

若 $p_t\mid b$,用同法可以证明

$$s_1(p_t)=1+\frac{(-1)^{m-t}}{(p_t-1)^{m-t-1}}\geqslant1-\frac{1}{(p_t-1)^2}$$

又因 $s_1(2)=2$,故得引理.

引理 17 令

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

则有

$$B_1(b;P)=\frac{1}{|D|}\underset{\substack{0\leqslant s_\mu\leqslant 1\quad(1\leqslant\mu\leqslant n)\\ \sum_{v=1}^{m}a_{\mu v}s_v=P^{-1}b_\mu}}{\int_0^1\cdots\int_0^1}\mathrm{d}s_{n+1}\cdots\mathrm{d}s_m \qquad ㊵$$

证明 命

$$B_1(\omega_n,\cdots,\omega_1)=\int_{-\omega_n}^{\omega_n}\cdots\int_{-\omega_1}^{\omega_1}\prod_{v=1}^{m}\left(\int_0^1 e\left(s\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\beta_\mu\right)\mathrm{d}s\right)e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}\frac{b_\mu}{P}\beta_\mu\right)\mathrm{d}\beta_1\cdots\mathrm{d}\beta_n$$

显然有

$$B_1(b;P)=\lim_{\omega_1\to\infty}\cdots\lim_{\omega_n\to\infty}B_1(\omega_n,\cdots,\omega_1)$$

交换积分号,可得

$$B_1(\omega_n,\cdots,\omega_1)=\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_m\cdot\prod_{\mu=1}^{n}\left(\int_{-\omega_\mu}^{\omega_\mu}e\left(\beta\left(\sum_{v=1}^{m}a_{\mu v}s_v-\frac{b_\mu}{P}\right)\right)\mathrm{d}\beta\right)=$$

$$\frac{1}{\pi^n}\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{\mu=1}^{n}\frac{\sin 2\pi\omega_\mu\left(\sum_{v=1}^{m}a_{\mu v}s_v-P^{-1}b_\mu\right)}{\sum_{v=1}^{m}a_{\mu v}s_v-P^{-1}b_\mu}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_m$$

再作变换

$$t_\mu=\sum_{v=1}^{m}a_{\mu v}s_v-P^{-1}b_\mu,1\leqslant\mu\leqslant n$$

得到

$$B_1(\omega_n,\cdots,\omega_1)=\frac{1}{\pi^n|D|}\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{d}s_{n+1}\cdots\mathrm{d}s_m\underset{\mathscr{D}(s_{n+1},\cdots,s_m)}{\int\cdots\int}\prod_{\mu=1}^{m}\frac{\sin 2\pi\omega_\mu t_\mu}{t_\mu}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_m$$

故由 Dirichlet 定理,得到

$$B_1(b;P)=\lim_{\omega_1\to\infty}\cdots\lim_{\omega_n\to\infty}B_1(\omega_n,\cdots,\omega_1)=\frac{1}{|D|}\underset{\substack{0<s_\mu<1\\ t_\mu=0(1\leqslant\mu\leqslant n)}}{\int_0^1\cdots\int_0^1}\mathrm{d}s_{n+1}\cdots\mathrm{d}s_m$$

而引理得证.

特别当 $n=1$ 时

$$B_1(b;P)=\frac{1}{|a_1|}\underset{\substack{0<s_1<1\\ \sum_{v=1}^{m}a_vs_v=P^{-1}b}}{\int_0^1\cdots\int_0^1}\mathrm{d}s_2\cdots\mathrm{d}s_m$$

更若 $a_v>0(1\leqslant v\leqslant m)$ 时,容易计算出

$$B_1(b;P)=\frac{1}{(m-1)!a_1a_2\cdots a_m}\left(\frac{b}{P}\right)^{m-1}$$

而定理 3 得证.

7 关于素数变数的线性方程组①

——陆鸣皋　陈文德

7.1 引言

华罗庚②曾提出关于整系数素数变数的线性方程组

$$\sum_{v=1}^{n+1} a_{\mu v} p_v = b_\mu, \mu = 1,2,\cdots,n \qquad ①$$

对几乎所有适合同余可解条件的正整数组$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的可解性问题. 在Виноградов证明了每个充分大的奇数都能表成三个素数之和以后,华罗庚等③④⑤⑥⑦证明了几乎所有的偶数都能表成两个素数之和. 后来,A.Ф. Лаврик⑧在1961年指出,对几乎所有适合同余可解条件的正整数组$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,方程组①在系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

时都可解. 在本文中,作者研究了方程组①在系数矩阵较广的条件下,对几乎所有适合同余可解条件的正整数组$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$的可解性问题.

我们现在引进以下一些记号,并作如下的一些假定:

设$a_{\mu v}(\mu = 1,2,\cdots,n; v = 1,2,\cdots,n+1)$为$n(n+1)$个给定的整数,记

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn+1} \end{pmatrix}, \Delta_n^i = (-1)^{n+1-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn+1} \end{vmatrix} \qquad ②$$

且设

---

① 原载《数学学报》,第15卷,第5期,1965年9月.
② 华罗庚.堆基素数论.北京:科学出版社,1957.
③ 华罗庚.Some results in the additive prime number theory, Quart.J.Math.,9(1938),68 - 80.
④ van der Cerput J.G., Sur l'hypethese de goldbach pour presque teus les nombers pairs, Acta Arithm., 2(1937),266 - 290.
⑤ Удовков Ж.Г., О проблеме гольдбах, ДАН СССР, 17 (1937),331 - 334.
⑥ Estermann J., Proof that almost all even postive integers are sum of two primes, Proc.London.Math. Soc.,(1)44(1938),307 - 314.
⑦ Hellbrann H.,见 Zentralblatt fur Mathematik und Grenzgebiete, 16(1937),291 - 292.
⑧ Лаврик А.Ф., К теории распределения простых чисел на основа метеда тригонометрических сумм И.М.Виноградова. Труды математического института имени В.А. Стеклова, том.LXIV, Издательство АН СССР, Москва, 19.

$$\Delta_n^i \neq 0, i = 1,2,\cdots,n+1, (\Delta_n^1,\Delta_n^2,\cdots,\Delta_n^{n+1}) = 1 \qquad ③$$

那么必有整数 $a_{n+1,j}(j = 1,2,\cdots,n+1)$ 存在，使得

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i}\Delta_n^i = 1$$

由此我们再设

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \qquad ④$$

则显然有

$$\det A_1 = 1$$

定出 A_1 的逆阵

$$U = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} & \Delta_n^1 \\ u_{21} & \cdots & u_{2n} & \Delta_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n+1,1} & \cdots & u_{n+1,n} & \Delta_n^{n+1} \end{pmatrix} \qquad ⑤$$

其中，$u_{ij}(i = 1,2,\cdots,n+1; j = 1,2,\cdots,n)$ 都是整数.

现设

$$v = \begin{cases} r_v, & \Delta_n^v < 0 \\ s_v, & \Delta_n^v > 0 \end{cases}$$

如果标号 r_v 及 s_v 不同时存在，那么我们对矩阵 A 不再作任何假定；否则，我们假定

$$\max_{r_v} \frac{u_{r_v j}}{\Delta_n^{r_v}} < \min_{s_\mu} \frac{u_{s_\mu j}}{\Delta_n^{s_\mu}}, j = 1,2,\cdots,n \qquad ⑥$$

令 P 是一充分大的正整数，$c, c_1, c_2, \cdots$ 是一些与 P 及 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 无关的正常数，$L = \log P, X = cP, 1 \leqslant b_\mu \leqslant X(\mu = 1,2,\cdots,n)$. 现以 $I(\boldsymbol{b}, P)$ 表示方程组①在 $2 \leqslant p_v \leqslant P(v = 1,2,\cdots,n+1)$ 内的解组数，而设 $(\varphi(p))^{n+1} \cdot \frac{S(p)}{p^n}$ 为同余方程组

$$\sum_{v=1}^{n+1} a_{\mu v} l_v \equiv b_\mu \pmod p, \mu = 1,2,\cdots,n \qquad ⑦$$

在 $1 \leqslant l_v \leqslant p-1(v = 1,2,\cdots,n+1)$ 内的解组数.

对于任何 $1 \leqslant j \leqslant n$ 与从 $1,2,\cdots,n+1$ 中任意选出的 j 个整数 $v_1,\cdots,v_j$（假设 $v_1 < v_2 < \cdots < v_j$），在 A 适合③的假定下，必能找到适合 $1 \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_j \leqslant n$ 的 j 个整数，使

$$\Delta_j^{(v)} = \det\begin{pmatrix} a_{\mu_1 v_1} & \cdots & a_{\mu_1 v_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\mu_j v_1} & \cdots & a_{\mu_j v_j} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad ⑧$$

(数组 $\mu_1, \cdots, \mu_j$ 的取法可能并不唯一,当有多种取法时,任意选取一种),而命 $\mu_1, \cdots, \mu_j, \mu_{j+1}, \cdots, \mu_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列且 $\mu_{j+1} < \cdots < \mu_n$. 按这样的定义,对于一组 $v_1 < \cdots < v_j$,必有 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 与它对应,并且具有以上的性质.

如果从标号 $1,2,\cdots,n+1$ 中任意取出 $n-j$ 个数,$v_1^{(j)} < v_2^{(j)} < \cdots < v_{n-j}^{(j)}$,以 $\prod\limits_{(v^{(j)})}$ 表示取所有这样的 $\{v_i^{(j)}\}$ 来进行相乘,又以 $(a_1, \cdots, a_m)$ 表示整数 $a_1, \cdots, a_m$ 的最大公因子,那么,我们可记

$$B = \prod_{(v')} \begin{vmatrix} b_{\mu'_1} a_{\mu'_1 v'_1} & \cdots & a_{\mu'_1 v'_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\mu'_n} a_{\mu'_n v'_1} & \cdots & a_{\mu'_n v'_{n-1}} \end{vmatrix} \prod_{(v^{(2)})} \left(\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(2)}} a_{\mu_1^{(2)} v_1^{(2)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(2)} v_{n-2}^{(2)}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\mu_{n-1}^{(2)}} a_{\mu_{n-1}^{(2)} v_1^{(2)}} & \cdots & a_{\mu_{n-1}^{(2)} v_{n-2}^{(2)}} \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(2)}} a_{\mu_1^{(2)} v_1^{(2)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(2)} v_{n-2}^{(2)}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{\mu_{n-2}^{(2)}} a_{\mu_{n-2}^{(2)} v_1^{(2)}} & \cdots & a_{\mu_{n-2}^{(2)} v_{n-2}^{(2)}} \\ b_{\mu_n^{(2)}} a_{\mu_n^{(2)} v_1^{(2)}} & \cdots & a_{\mu_n^{(2)} v_{n-2}^{(2)}} \end{vmatrix} \right) \cdots \prod_{(v^{(n-1)})} \left(\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} a_{\mu_1^{(n-1)} v_1^{(n-1)}} \\ b_{\mu_2^{(n-1)}} a_{\mu_2^{(n-1)} v_1^{(n-1)}} \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} a_{\mu_1^{(n-1)} v_1^{(n-1)}} \\ b_{\mu_3^{(n-1)}} a_{\mu_3^{(n-1)} v_1^{(n-1)}} \end{vmatrix}, \cdots \begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} a_{\mu_1^{(n-1)} v_1^{(n-1)}} \\ b_{\mu_n^{(n-1)}} a_{\mu_n^{(n-1)} v_1^{(n-1)}} \end{vmatrix} \right) (b_1, b_2, \cdots, b_n) \qquad ⑨$$

这里的 $\mu_j^{(i)}(i = 1,2,\cdots,n-1; j = 1,2,\cdots,n)$ 也由所取的标号 $\{v\}$ 确定,其中 $\mu_l^{(i)} < \mu_k^{(i)}(l < k, i = 1,2,\cdots,n-1)$,而且,根据式⑧,每个行列式右上方的最大真子式不等于 0.

如果对所有的素数 p,都有

$$S(p) > 0 \qquad ⑩$$

及

$$B \neq 0 \qquad ⑪$$

那么我们就称 $[1, X]$ 中这样的整数组 $(b_1, \cdots, b_n)$ 为非奇异组,并以 $Y(X)$ 记它的组数.

在上述假定下,本文的主要结果是:

定理 1 存在 $0 < c_1 < 1$,使

$$Y(X) > c_1 X^n \qquad ⑫$$

定理 2 使 $I(\boldsymbol{b}, p) = 0$ 的非奇异组 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的组数

$$R(X) \ll X^n L^{-M} \qquad ⑬$$

其中,M 是一任意给定的正实数.

对于偶数表为两个素数之和的Гольдбах问题,当 $A=(1,1)$ 时,可取 $a_{21}=0$, $a_{22}=1$,从而得出 $U=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\frac{u_{11}}{\Delta_1^1}=-1<0=\frac{u_{22}}{\Delta_1^2}$. 因此条件⑥成立. 又对于 А.Ф.Лаврик 的结果,易知 $\Delta_n^i=1(i=1,2,\cdots,n+1)$. 此时条件③显然成立. 于是,我们既得出了几乎所有偶数均能表成两个素数之和的结果,又推广了 А.Ф.Лаврик 的结果.

最后我们还需指出,利用 Виноградов 关于三角和的一个估值,本文的结果不难推广到适合某种同余条件的素数未知数的情况,即 $p_v\equiv l_v(\mathrm{mod}\ k_v)$, $(l_v,k_v)=1(v=1,2,\cdots,n+1)$.

我们的工作始终得到吴方老师的指导和帮助,谨在此向他表示衷心的感谢!

7.2 奇异级数

命 $e(x)=\mathrm{e}^{2\pi ix}$,

$$A(q)=\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,h_2,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\sum_{h_2=0}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}\frac{\prod\limits_{v=1}^{n+1}\sum\limits_{1\le l\le q}{}'e\left(\frac{l}{q}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{(\varphi(q))^{n+1}}e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\frac{h_\mu}{q}\right) \qquad ⑭$$

其中 $\sum\limits_{1\le l\le q}{}'$ 表示对 l 求和,而 l 经过 mod q 的缩剩余系.

引理 1 $A(q)$ 是积性函数,即若 $(q_1,q_2)=1$,则

$$A(q_1q_2)=A(q_1)A(q_2) \qquad ⑮$$

引理 2 当 $l\ge 2$ 时

$$A(p^l)=0 \qquad ⑯$$

引理 3 $S(p)$ 的定义如7.1,则

$$1+A(p)=S(p) \qquad ⑰$$

以上三个引理的证明见相关文献①.

引理 4 对于适合 $1\le j\le n$ 的任何 j,以及从 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 中任意选出的 $n-j$ 个数 $v_1^{(j)}<v_2^{(j)}<\cdots<v_{n-j}^{(j)}$,命

$$W_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b},p)=\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,p)=1\\ \sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v_i}(j)h_\mu\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)\\ i=1,2,\cdots,n-j}}^{p-1}\sum_{h_2=0}^{p-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{p-1}e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\frac{h_\mu}{p}\right) \qquad ⑱$$

---

① 吴方. 素数变数的线性方程组. 数学学报,7(1957),102-122.

则当 p 大于一个仅与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关的常数时

$$W_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b},p)=\begin{cases} p^j-1, \quad 若\ p\left(\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(j)}} & a_{\mu_1^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\mu_{n-j+1}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j+1}^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j+1}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \end{vmatrix}, \right. \\ \qquad \begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(j)}} & a_{\mu_1^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\mu_{n-j}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ b_{\mu_{n-j+2}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j+2}^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j+2}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \end{vmatrix},\cdots, \\ \qquad \left. \begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(j)}} & a_{\mu_1^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\mu_{n-j}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ b_{\mu_n^{(j)}} & a_{\mu_n^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_n^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \end{vmatrix}\right) \\ -1, \qquad\qquad 若不然 \end{cases}$$

证明 由 ⑧,同余方程组

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v_i^{(j)}} h_\mu \equiv 0(\bmod p), i=1,2,\cdots,n-j$$

当 $p>|\Delta_{n-j}^{(v^{(j)})}|$ 时可解出

$$h_{\mu_i^{(j)}} \equiv -\frac{1}{\Delta_{n-j}^{(v^{(j)})}}\sum_{k=n-j+1}^{n}\begin{vmatrix} a_{\mu_1^{(j)}v_1^{(j)}}\cdots a_{\mu_{i-1}^{(j)}v_1^{(j)}}a_{\mu_k^{(j)}v_1^{(j)}}a_{\mu_{i+1}^{(j)}v_1^{(j)}}\cdots a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_1^{(j)}} \\ a_{\mu_1^{(j)}v_2^{(j)}}\cdots a_{\mu_{i-1}^{(j)}v_2^{(j)}}a_{\mu_k^{(j)}v_2^{(j)}}a_{\mu_{i+2}^{(j)}v_2^{(j)}}\cdots a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_2^{(j)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu_1^{(j)}v_{n-j}^{(j)}}\cdots a_{\mu_{i-1}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}}a_{\mu_k^{(j)}v_{n-j}^{(j)}}a_{\mu_{i+1}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}}\cdots a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \end{vmatrix} h_{\mu_k^{(j)}} \quad ⑲$$

$$i=1,2,\cdots,n-j$$

于此 $1/\Delta_{n-j}^{(v^{(j)})}$ 表示适合 $x\Delta_{n-j}^{(v^{(j)})}\equiv 1(\bmod\ p)$ 的一个整数. 由此及 $(h_1,\cdots,h_n,p)=1$ 得出,$(h_{\mu_{n-j+1}^{(j)}},h_{\mu_{n-j+2}^{(j)}},\cdots,h_{\mu_n^{(j)}},p)=1$.将⑲代入⑱的右端,即得

$$W_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b},p)=$$

$$\sum_{h_{\mu_{n-j+1}^{(j)}}=0}^{p-1}\cdots\sum_{h_{\mu_n^{(j)}}=0}^{p-1} e\left(\frac{(-1)^{n-j+1}}{\Delta_{n-j}^{(v^{(j)})}p}\sum_{k=n-j+1}^{n}\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(j)}} & a_{\mu_1^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\mu_{n-j}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ b_{\mu_n^{(j)}} & a_{\mu_n^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_n^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \end{vmatrix} h_{\mu_k^{(j)}}\right)=$$

$$\prod_{k=n-j+1}^{n}\sum_{h_{\mu_k^{(j)}}=0}^{p-1} e\left(\frac{(-1)^{n-j+1}}{\Delta_{n-j}^{(v^{(j)})}p}\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(j)}} & a_{\mu_1^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\mu_{n-j}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j}^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \\ b_{\mu_k^{(j)}} & a_{\mu_k^{(j)}v_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_k^{(j)}v_{n-j}^{(j)}} \end{vmatrix} h_{\mu_k^{(j)}}\right) - 1$$

由于$((-1)^{n-j+1}/\Delta_{n-j}^{(v^{(j)})}, p) = 1$,故立刻得到引理.

引理 5 对任给的实数 $\epsilon > 0$,

$$A(q) \ll (B, q) q^{-2+\epsilon} \tag{20}$$

证明 我们先考虑 $q = p$ 为素数时的情形.此时,若 p 大于一个仅与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关的常数,则因矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 级子式全不为零

$$A(p) = \sum_{\substack{h_1=0 \\ (h_1,h_2,\cdots,h_n,p)=1}}^{p-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{p-1} \frac{\prod\limits_{v=1}^{n+1}\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant p}{}' e\left(\frac{l}{p}\sum\limits_{\mu=0}^{n} a_{\mu v}h_\mu\right)}{(\varphi(p))^{n+1}} e\left(-\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu \frac{h_\mu}{p}\right) =$$

$$\sum^{c_{n+1}^{n-1}}\left(\frac{\mu(p)}{\varphi(p)}\right)^2 \widetilde{W}_1^{(v')}(\boldsymbol{b}, p) + \sum^{c_{n+1}^{n-2}}\left(\frac{\mu(p)}{\varphi(p)}\right)^3 \widetilde{W}_2^{(v^{(2)})}(\boldsymbol{b}, p) + \cdots +$$

$$\sum^{c_{n+1}^{1}}\left(\frac{\mu(p)}{\varphi(p)}\right)^n \widetilde{W}_{n-1}^{(v^{(n-1)})}(\boldsymbol{b}, p) + \sum^{c_{n+1}^{0}}\left(\frac{\mu(p)}{\varphi(p)}\right)^{n+1} \widetilde{W}_n^{(v^{(n)})}(\boldsymbol{b}, p) \tag{21}$$

其中

$$\widetilde{W}_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b}, p) = \sum_{\substack{h_1=0 \\ (h_1,\cdots,h_n,p)=1}}^{p-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{p-1} e\left(-\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu \frac{h_\mu}{p}\right) \tag{22}$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v_i^{(j)}} h_\mu \equiv 0 \pmod p, i = 1, 2, \cdots, n-j$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v_i^{(j)}} h_\mu \not\equiv 0 \pmod p, i = n-j+1, \cdots, n+1$$

而$\sum\limits^{C_{n+1}^{j}}$ 表示一个具有 C_{n+1}^{j} 项的关于$(v^{(n-j)})$求的和,即从 $1, 2, \cdots, n+1$ 中取出一组 $v_1^{(n-j)} < v_2^{(n-j)} < \cdots < v_j^{(n-j)}$,构成一个 $\widetilde{W}_{n-j}^{(v^{(n-j)})}(\boldsymbol{b}, p)$.然后按 $v_i^{(n-j)}(i = 1, 2, \cdots, j)$ 所有不同的取法来求和.

由 ㉒ 及 ⑱,可得等式

$$\widetilde{W}_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b}, p) = \widetilde{W}_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b}, p) - \sum^{C_{j+1}^{j}} \widetilde{W}_{i-1}^{(v^{(j-1)})}(\boldsymbol{b}, p) -$$

$$\sum^{C_{j+1}^{j-1}} \widetilde{W}_{j-2}^{(v^{(j-2)})}(\boldsymbol{b}, p) - \cdots - \sum^{C_{j+1}^{2}} \widetilde{W}_1^{(v')}(\boldsymbol{b}, p) \tag{23}$$

对 $j = 1, 2, \cdots, n$ 皆成立,且此处$\sum\limits^{C_{j+1}^{i}}$ 的意义与上述完全相似.由 ③,当 p 充分大

时

$$\widetilde{W}_1^{(v')}(\boldsymbol{b},p) = W_1^{(v')}(\boldsymbol{b},p)$$

故从递推公式 ㉓ 得出

$$\widetilde{W}_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b},p) = W_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b},p) + K_1 W_{j-1}^{(v_1^{(j-1)})}(\boldsymbol{b},p) + \cdots + K_{j-1}\widetilde{W}_1^{(v')}(\boldsymbol{b},p)$$

此处 $K_1, K_2, \cdots, K_{j-1}$ 为可求出的仅与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关的 $j-1$ 个整数. 于是由引理 4 可知

$$\widetilde{W}_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b},p) = W_j^{(v^{(j)})}(\boldsymbol{b},p) + O(p^{j-1}) \qquad ㉔$$

将 ㉔ 代入 ㉑, 再利用引理 4 及 B 的定义, 就得到

$$A(p) \ll \begin{cases} p^{-2+\epsilon} & , p \nmid B \\ p^{-1+\epsilon} & , p \mid B \end{cases} \qquad ㉕$$

从而, 由引理 1 及引理 2, 设 $v(q)$ 是 q 的不同的素因子的个数, 就有

$$|A(q)| \leqslant \frac{C_2^{v(q)}(B,q)}{q^{2-\epsilon}} \ll (B,q)q^{-2+\epsilon}$$

其中, C_2 为 ㉕ 的记号 $\ll$ 中隐含的正常数.

推论 若 $B \neq 0$, 则

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p=2}^{\infty} S(p) \qquad ㉖$$

证明 当 $B \neq 0$ 时, 由 ⑳

$$A(q) \ll |B| q^{-2+\epsilon}$$

因此, $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A(q)$ 对任意固定的 $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)(1 \leqslant b_\mu \leqslant X, \mu = 1, \cdots, n)$ 为绝对收敛. 再由 Euler 恒等式及引理 3, 即得

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q) = \prod_{p=2}^{\infty} S(p)$$

引理 6 对非奇异组 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 皆有

$$\prod_{p=2}^{\infty} S(p) \geqslant c_3 > 0 \qquad ㉗$$

证明 我们设

$$|\Delta_n^{i_0}| = \min_{1 \leqslant i \leqslant n+1} |\Delta_n^i|$$

那么, 当 $p > |\Delta_n^{i_0}|$ 时, 由 Cramer 法则, 同余方程组

$$\sum_{v=1}^{n+1} a_{\mu v} l_v \equiv b_\mu \pmod p, \mu = 1, 2, \cdots, n \qquad ㉘$$

可解成

$$(-1)^{n-i_0+1}\Delta_n^{i_0} l_v \equiv -\Delta_{n(v)}^{i_0} l_{i_0} + \Delta_{n(v)}^{i_0}(\boldsymbol{b}) \pmod p \qquad ㉙$$

$$v = 1,2,\cdots,i_0-1,i_0+1,\cdots,n+1$$

其中 $\Delta_{n(v)}^{i_0}$ 和 $\Delta_{n(v)}^{i_0}(\boldsymbol{b})$ 分别表示在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中去掉第 v 列及第 i_0 列并以 i_0 列和 $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$ 代入第 v 列而得的两个行列式.

由 ㉙ 可知,同余方程组 ㉘ 的解数恰为 p. 又由 ㉙,若命 $r_n(\boldsymbol{b},p)$ 为同余方程

$$l_1 l_2\cdots l_{n+1} \equiv (-1)^n \prod_{\substack{v=1\\ v\neq i_0}}^{n+1}\Delta_{n(v)}^{i_0}\cdot l_{i_0}^{n+1}+\cdots+\prod_{\substack{v=1\\ v\neq i_0}}^{n+1}\Delta_{n(v)}^{i_0}(\boldsymbol{b})\cdot l_{i_0}\equiv 0(\bmod p) \quad ㉚$$

的解数,则由 7.1 的假定

$$(\varphi(p))^{n+1}\frac{S(p)}{p^n}=p-r_n(\boldsymbol{b},p)$$

此即

$$\prod_{p>|\Delta_n^{i_0}|}S(p)=\prod_{p>|\Delta_n^{i_0}|}\left(1-\frac{r_n(\boldsymbol{b},p)}{p}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n+1} \quad ㉛$$

因 ㉚ 中的首项系数仅与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关,故存在 $c_4>0$,使当 $p>c_4$ 时,㉚ 中的系数不能同时都是 p 的倍数. 于是,当 $p>\max(c_4,n+1,|\Delta_n^{i_0}|)$ 时,$r_n(\boldsymbol{b},p)\leqslant n+1$,即由 ㉛ 有

$$\prod_{p>\max(c_4,n+1,|\Delta_n^{i_0}|)}S(p)\geqslant\prod_{p>\max(c_4,n+1,|\Delta_n^{i_0}|)}\left(1-\frac{n+1}{p}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n+1}=$$

$$\prod_{p>\max(c_4,n+1,|\Delta_n^{i_0}|)}\left(1-\frac{n(n+1)/2}{p^2}+O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right)>c_5>0$$

而当 $p\leqslant\max(c_4,n+1,|\Delta_n^{i_0}|)$ 时,对非奇异组的 $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$,$S(p)\geqslant p^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-n-1}$. 因此

$$\prod_{p=2}^{\infty}S(p)\geqslant\prod_{p\leqslant\max(c_4,n+1,|\Delta_n^{i_0}|)}p^{-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-n-1}\prod_{p>\max(c_4,n+1,|\Delta_n^{i_0}|)}S(p)>c_3>0$$

此即引理.

引理 7

$$\sum_{b_1=1}^{X}\sum_{b_2=1}^{X}\cdots\sum_{b_n=1}^{X}d(|B|)\ll X^nL^a \quad ㉜$$

其中,$a=2^{\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+1}^i}-1$,$d(n)$ 表示 n 的因子数.

证明 易知 B 是 $m=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+1}^i$ 项的乘积. 由 B 的定义及函数 $d(n)$ 的性质,再利用几何平均不大于算术平均的不等式,就得到

$$\sum_{b_1=1}^{X}\cdots\sum_{b_n=1}^{X} d(|B|) \leqslant \sum_{b_1=1}^{X}\cdots\sum_{b_n=1}^{X} d(b_1)\prod_{(\mu^{(n-1)})}\left(\left|\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} & a_{\mu_1^{(n-1)}v_1^{(n-1)}} \\ b_{\mu_2^{(n-1)}} & a_{\mu_2^{(n-1)}v_1^{(n-1)}}\end{vmatrix}\right|\right)\cdot$$

$$\prod_{(\nu')} d\left(\left|\begin{vmatrix} b_{\mu'_1} a_{\mu'_1 v'_1}\cdots a_{\mu'_1 v'_{n-1}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{\mu'_n} a_{\mu'_n v'_1}\cdots a_{\mu'_n v'_{n-1}}\end{vmatrix}\right|\right) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{b_1=1}^{X}\cdots\sum_{b_n=1}^{X}\Bigg(d^m(b_1) +$$

$$\sum_{(\nu^{(n-1)})} d^m\left(\left|\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} & a_{\mu_1^{(n-1)}v_1^{(n-1)}} \\ b_{\mu_2^{(n-1)}} & a_{\mu_2^{(n-1)}v_1^{(n-1)}}\end{vmatrix}\right|\right) + \cdots +$$

$$\sum_{(\nu')} d^m\left(\left|\begin{vmatrix} b_{\mu'_1} a_{\mu'_1 v'_1}\cdots a_{\mu'_1 v'_{n-1}} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ b_{\mu'_n} a_{\mu'_n v'_1}\cdots a_{\mu'_n v'_{n-1}}\end{vmatrix}\right|\right)\Bigg) \tag{33}$$

因此,展开行列式,我们的问题就归结为估计和

$$\sum_{b_1=1}^{X}\cdots\sum_{b_n=1}^{X} d^m(|a_1 b_{\mu_1^{(n-j)}} + \cdots + a_j b_{\mu_j^{(n-j)}}|) \tag{34}$$

其中,$a_1,\cdots,a_j$ 是只与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关的整数.利用估计①

$$\sum_{t\leqslant x} d^m(t) \ll x(\log x)^{2^m-1}$$

此种和就显然远远小于

$$X^{n-1}\sum_{\xi=1}^{c_6 X} d^m(\xi) \ll X^n L^{2^m-1} = X^n L^a$$

再由㉝,就得到引理.

引理 8 设 γ 为不小于 M 的给定实数,a 的定义如前引理,$\sigma_0 > \gamma + a$ 是一个实数,$\epsilon > 0$ 任意小,那么,非奇异组中使

$$A'(\boldsymbol{b}, P) = \sum_{q\leqslant L^{\sigma_0}} A(q) \geqslant c_7 > 0 \tag{35}$$

不成立的$(b_1,\cdots,b_n)$的组数 $J(X)$ 满足

$$J(X) \ll X^n L^{-\gamma}.$$

证明 由引理 5 的推论

$$A'(\boldsymbol{b}, P) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q) - \sum_{q>L^{\sigma_0}} A(q) = \prod_{p=2}^{\infty} S(p) - \sum_{q>L^{\sigma_0}} A(q)$$

再由⑳

$$\sum_{q>L^{\sigma_0}} A(q) \ll \sum_{q>L^{\sigma_0}} (B,q) q^{-2+\epsilon} \leqslant \sum_{d\mid|B|} d \sum_{m>L^{\sigma_0}/d} (dm)^{-2+\epsilon} =$$

---

① 华罗庚.数论导引.北京:科学出版社,1957.

$$\sum_{d \mid B} d^{-1+\varepsilon} \sum_{m > L^{\sigma_0}/d} m^{-2+\varepsilon} \ll \sum_{d \mid B} d^{-1+\varepsilon}\left(\frac{d}{L^{\sigma_0}}\right)^{1-\varepsilon} =$$
$$L^{-\sigma_0(1-\varepsilon)} \sum_{d \mid B} 1 = L^{-\sigma_0(1-\varepsilon)} d(|B|)$$

如果 $d(|B|) \leqslant L^{\delta}, 0 < \delta < \sigma_0(1-\varepsilon)$，那么由引理 6，当 p 充分大时，式 ㉟ 显然成立．因此，$J(X)$ 不超过使 $d(|B|) > L^{\delta}$ 的 $(b_1, \cdots, b_n)$ 的组数，即

$$J(X)L^{\delta} \leqslant \sum_{b_1=1}^{X} \cdots \sum_{b_n=1}^{X} d(|B|)$$

利用 ㉜，对给定的 γ, σ_0 和 a，就有

$$J(X) \ll X^n L^{a-\delta}$$

我们取 ε 充分小，δ 和 $\sigma_0(1-\varepsilon)$ 充分接近，于是由假定有

$$J(X) \ll X^n L^{-\gamma}$$

定理 3 非奇异组的组数

$$Y(X) > c_1 X^n \qquad ㊱$$

其中，$0 < c_1 < 1$．

证明 (1) 由 B 的定义可知，若 $B = 0$，则必有它的一个因子为零．我们假定最大公因子 $(0,0,\cdots,0) = 0$，从而只须研究

$$\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(j)}} & a_{\mu_1^{(j)}\nu_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_1^{(j)}\nu_{n-j}^{(j)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\mu_{n-j}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j}^{(j)}\nu_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j}^{(j)}\nu_{n-j}^{(j)}} \\ b_{\mu_{n-j+t}^{(j)}} & a_{\mu_{n-j+t}^{(j)}\nu_1^{(j)}} & \cdots & a_{\mu_{n-j+t}^{(j)}\nu_{n-j}^{(j)}} \end{vmatrix} = 0, 1 \leqslant t \leqslant j, j = 1,2,\cdots,n \qquad ㊲$$

因已知此行列式右上方最大真子式不为零，故把 ㊲ 看成是以 $\{b_{\mu_i^{(j)}}\}$ 为未知数的线性方程时，至少有一系数异于零，它的变数自由度至少减少 1．故使 $B = 0$ 的 $(b_1, \cdots, b_n)$ 的组数远远小于 X^{n-1}．

(2) 由引理 6 的证明及 $S(p)$ 的定义可知，当 $p > \max(c_4, n+1, |\Delta_n^{i_0}|)$ 时，对任意的 $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$，皆有 $S(p) > 0$．对 $p \leqslant \max(c_4, n+1, |\Delta_n^{i_0}|)$，我们取 $b_\mu \equiv \sum_{\nu=1}^{n+1} a_{\mu\nu} \pmod p \ (\mu = 1,2,\cdots,n)$；对这样的 $(b_1, \cdots, b_n)$，显然有 $S(p) > 0$，而适合上面同余式的 $(b_1, \cdots, b_n)$ 的解组数不少于

$$\left[\frac{X}{p}\right]^n > \left(\frac{X}{p} - 1\right)^n \gg \frac{X^n}{p^n}$$

利用孙子定理，得出使 $S(p) > 0$ 的 $(b_1, \cdots, b_n)$ 的组数远远大于

$$X^n \prod_{p \leqslant \max(c_4, n+1, |\Delta_n^{i_0}|)} \frac{1}{p^n} > c_7 X^n$$

综合(1)和(2),就得㉟.

7.3 主要引理

引理 9 设③已成立,对于适合 $1 \leqslant b_1,\cdots,b_n \leqslant X$ 的任意一组整数 $(b_1,\cdots,b_n)$,用 $Z(\boldsymbol{b},P)$ 表示方程组

$$\sum_{v=1}^{n+1} a_{\mu v}x_v = b_\mu, \mu = 1,2,\cdots,n \tag{38}$$

在 $2 \leqslant x_v \leqslant P(v = 1,2,\cdots,n+1)$ 中的整解组数,那么,存在一组仅与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关的正常数 $f_1,\cdots,f_n$ 及常数 f_{n+1},当 s_μ, r_v 不同时存在时

$$Z(\boldsymbol{b},P) \geqslant \max\left(\left[\sum_{i=1}^{n} f_i b_i - f_{n+1}\right],0\right) \tag{39}$$

成立;而当 s_μ, r_v 同时存在时,㊴成立的充要条件是⑥成立,特别可取

$$f_i = \begin{cases} \min\limits_{s_\mu} \dfrac{u_{s_\mu i}}{\Delta_n^{s_\mu}} - \max\limits_{r_v} \dfrac{u_{r_v i}}{\Delta_n^{r_v}}, & \text{若 } s_\mu, r_v \text{ 皆存在,且⑥成立} \\ 1, & \text{若 } s_\mu, r_v \text{ 不同时存在} \end{cases}, i = 1,2,\cdots,n$$

$$f_{n+1} = \begin{cases} 2\left(\min\limits_{s_\mu} \dfrac{1}{\Delta_n^{s_\mu}} - \min\limits_{r_v} \dfrac{1}{\Delta_n^{r_v}}\right), & \text{若 } s_\mu, r_v \text{ 皆存在,且⑥成立} \\ 0, & \text{若 } s_\mu, r_v \text{ 不同时存在} \end{cases}$$

证明① (1)引入一个整变数参数 t,将㊳写成

$$A_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^*$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ t \end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{A}_1$ 是一个正模方阵,故

$$\boldsymbol{x} = A_1^{-1}\boldsymbol{b}^* = U\boldsymbol{b}^*$$

此即

$$x_v = \sum_{j=1}^{n} u_{vj}b_j + \Delta_n^v t, v = 1,2,\cdots,n+1 \tag{40}$$

若标号 s_μ, r_v 皆存在,则由上式,当

$$\frac{2 - \sum\limits_{j=1}^{n} u_{r_v j}b_j}{\Delta_n^{r_v}} \geqslant t \geqslant \frac{2 - \sum\limits_{j=1}^{n} u_{s_\mu j}b_j}{\Delta_n^{s_\mu}}$$

① 本引理也可由整数矩阵的理论证得,但方法较繁.

对所有 s_μ, r_v 皆成立时，有 $x_v \geqslant 2(v=1,2,\cdots,n+1)$. 又适当地选取 $X=cP$ 中的 c，可使 $x_v \leqslant P(v=1,2,\cdots,n+1)$. 从而

$$Z(\boldsymbol{b},P) \geqslant \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\left(\min_{s_\mu}\frac{u_{s_\mu j}}{\Delta_n^{s_\mu}} - \max_{r_v}\frac{u_{r_v j}}{\Delta_n^{r_v}}\right) - 2\left(\max_{s_\mu}\frac{1}{\Delta_n^{s_\mu}} - \min_{r_v}\frac{1}{\Delta_n^{r_v}}\right)\right) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i b_i - f_{n+1}\right)$$

但显然有 $Z(\boldsymbol{b},P) \geqslant 0$，此时 ㊴ 成立.

又若 s_μ, r_v 不同时存在，那么 $\Delta_n^v(v=1,2,\cdots,n+1)$ 同号，于是可取 t 和 $\Delta_n^v(v=1,2,\cdots,n+1)$ 同号，当 $|t|$ 充分大时，恒有 $x_v \geqslant 2(v=1,\cdots,n+1)$. 再适当选取 $X=cP$ 中的 c，就可证明 ㊴ 成立，即 $Z(\boldsymbol{b},p)=\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$.

(2) 若标号 s_μ, r_v 皆存在，但式 ⑥ 不成立，那么，在自然数 $1,2,\cdots,n$ 中，存在 $j_1,\cdots,j_k(1\leqslant k\leqslant n)$，使得

$$\min_{s_\mu}\frac{u_{s_\mu j_m}}{\Delta_n^{s_\mu}} - \max_{r_v}\frac{u_{r_v j_m}}{\Delta_n^{r_v}}, m=1,2,\cdots,k$$

$$\min_{s_\mu}\frac{u_{s_\mu j}}{\Delta_n^{s_\mu}} - \max_{r_v}\frac{u_{r_v j}}{\Delta_n^{r_v}}, j\neq j_m, 1\leqslant m\leqslant k \qquad ㊶$$

此时我们必能找到一对自然数 $s_\mu^{(0)}, r_v^{(0)}$，使得

$$\frac{u_{s_\mu^{(0)} j_1}}{\Delta_n^{s_\mu^{(0)}}} \leqslant \frac{u_{r_v^{(0)} j_1}}{\Delta_n^{r_v^{(0)}}}$$

同时我们能取

$$\boldsymbol{b}_0:\begin{cases} b_{j_1}=[c_8P], i\neq j_1 \\ b_i=c_9 \end{cases}$$

此处 c_9 是一取定的正整数，且 $c_9,[c_8P]\leqslant X$. 因为由 ㊵，仅对适合条件

$$\min_{r_v}\frac{2-\sum_{j=1}^{n} u_{r_v j}b_j}{\Delta_n^{r_v}} \geqslant t \geqslant \max_{s_\mu}\frac{2-\sum_{j=1}^{n} u_{s_\mu j}b_j}{\Delta_n^{s_\mu}}$$

的整数 t，方程组 ㊳ 才有我们需要的解，故对上述之 $\boldsymbol{b}_0$，就有

$$Z(\boldsymbol{b}_0,P) \leqslant \left(\min_{r_v}\frac{2-\sum_{j=1}^{n} u_{r_v j}b_j}{\Delta_n^{r_v}} - \max_{s_\mu}\frac{2-\sum_{j=1}^{n} u_{s_\mu j}b_j}{\Delta_n^{s_\mu}}\right)+1 \leqslant$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{u_{s_\mu^{(0)} j}}{\Delta_n^{s_\mu^{(0)}}} - \frac{u_{r_v^{(0)} j_1}}{\Delta_n^{r_v^{(0)}}}\right)b_j + 2\left(\frac{1}{\Delta_n^{r_v^{(0)}}} - \frac{1}{\Delta_n^{s_\mu^{(0)}}}\right)\right)+1=$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{u_{s_{\mu}^{(0)}j}}{\Delta_{n}^{s_{\mu}^{(0)}}}-\frac{u_{r_{v}^{(0)}j_1}}{\Delta_{n}^{r_{v}^{(0)}}}\right)b_{j_1}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j_1}}^{n}\left(\frac{u_{s_{\mu}^{(0)}i}}{\Delta_{n}^{s_{\mu}^{(0)}}}-\frac{u_{r_{v}^{(0)}i}}{\Delta_{n}^{r_{v}^{(0)}}}\right)b_i+2\left(\frac{1}{\Delta_{n}^{r_{v}^{(0)}}}-\frac{1}{\Delta_{n}^{s_{\mu}^{(0)}}}\right)\right)+$$

$$1<c_{10}$$

但当 p 充分大时，对上述 $\boldsymbol{b}_0$，由引理的假定，显然有$\left(\sum_{i=1}^{n}f_ib_i-f_{n+1}\right)\geqslant c_{10}$. 因此，当 s_μ, r_v 皆存在时，⑥ 是使 ㊴ 成立的必要条件.

引理 10 假定 ③ 和 ⑥ 成立，使

$$S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{p\leqslant P}e\left(p\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\alpha_\mu\right) \qquad ㊷$$

$$\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q,\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}}{q}\right)=\frac{\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant q}{}'e\left(\frac{l}{q}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{\varphi(q)}\sum_{t=2}^{P}\frac{e\left(t\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\left(\alpha_\mu-\frac{h_\mu}{q}\right)\right)}{\log t} \qquad ㊸$$

则

$$Q(P)=\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\prod_{v=1}^{n+1}S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha})-\sum_{q\leqslant L^{\sigma_0}}\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}\prod_{v=1}^{n+1}\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q,\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}}{q}\right)\right|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\geqslant$$

$$\sum_{b_1=1}^{X}\cdots\sum_{b_n=1}^{X}|I(\boldsymbol{b},P)-A'(\boldsymbol{b},p)T(\boldsymbol{b},P)|^2 \qquad ㊹$$

其中 $I(\boldsymbol{b},P)$ 的定义如 I，$A'(\boldsymbol{b},P)$ 仍由 ㉟ 定义，而

$$T(\boldsymbol{b},P)=\sum_{\substack{t_1=2\\ \sum_{v=1}^{n+1}a_{\mu v}t_v=b_\mu\\ \mu=1,2,\cdots,n}}^{P}\cdots\sum_{t_{n+1}=2}^{P}\frac{1}{\log t_1\log t_2\cdots\log t_{n+1}} \qquad ㊺$$

证明 因

$$\prod_{v=1}^{n+1}S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{p_1\leqslant P}\cdots\sum_{p_{n+1}\leqslant P}e\left(\sum_{\mu=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n+1}a_{\mu v}p_v\right)\alpha_\mu\right)=$$

$$\sum\cdots\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{D}(P)}I(\boldsymbol{b},P)e\left(\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\alpha_\mu\right)$$

$$\prod_{v=1}^{n+1}\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q,\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}}{q}\right)=\frac{\prod\limits_{v=1}^{n+1}\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant q}{}'e\left(\frac{l}{q}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{(\varphi(q))^{n+1}}\cdot$$

$$\sum_{t_1=2}^{P}\cdots\sum_{t_{n+1}=2}^{P}\frac{e\left(\sum\limits_{\mu=1}^{n}\left(\sum\limits_{v=1}^{n+1}a_{\mu v}t_v\right)\left(\alpha_\mu-\frac{h_\mu}{q}\right)\right)}{\log t_1\log t_2\cdots\log t_{n+1}}=$$

$$\sum\cdots\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{D}(P)}\frac{\prod\limits_{v=1}^{n+1}\sum\limits_{1\leqslant l\leqslant q}{}'e\left(\frac{l}{q}\sum\limits_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}h_\mu\right)}{(\varphi(q))^{n+1}}e\left(-\sum_{\mu=1}^{n}b_\mu\frac{h_\mu}{q}\right)\cdot$$

$$T(\boldsymbol{b},P)e\Big(\sum_{\mu=1}^{n}b_{\mu}\alpha_{\mu}\Big)$$

其中,$\mathscr{D}(P)$ 表示 $\sum_{v=1}^{n+1}a_{\mu v}t_v(\mu=1,2,\cdots,n;2\leqslant t_v\leqslant p,v=1,2,\cdots,n+1)$ 经过的一切整数组.因为当 $Z(\boldsymbol{b},P)=0$ 时,$I(\boldsymbol{b},P)=T(\boldsymbol{b},P)=0$,故由正交函数的性质以及 $A'(\boldsymbol{b},P)$ 是一实函数,有

$$Q(P)=\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{D}(P)}\cdots\sum|I(\boldsymbol{b},P)-A'(\boldsymbol{b},P)T(\boldsymbol{b},P)|^2\geqslant$$
$$\sum_{b_1=1}^{X}\cdots\sum_{b_n=1}^{X}|I(\boldsymbol{b},P)-A'(\boldsymbol{b},P)T(\boldsymbol{b},P)|^2$$

引理 11 若 $R(P)$ 的定义如 7.1,则

$$R(P)\ll[Q(P)L^{2n+2}]^{\frac{n}{n+2}}+X^nL^{-\gamma} \tag{46}$$

其中 γ 由引理 8 定义.

证明 设 $\mathscr{R}(P)$ 为由 $I(\boldsymbol{b},P)=0,A'(\boldsymbol{b},P)>c_7$ 及 $1\leqslant b_1,\cdots,b_n\leqslant X$ 组成的区域,于是由 ㊹ 得

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)}\cdots\sum T^2(\boldsymbol{b},P)\ll Q(P) \tag{47}$$

现记 $\mathscr{R}(P)$ 中整数组 $(b_1,\cdots,b_n)$ 的组数为 $R_1(P)$.则可假定 $R_1(P)\geqslant X^{n-1}$,因为不然利用引理 8 就得定理 2.利用引理 9 及 ㊺,显然有

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)}\cdots\sum T^2(\boldsymbol{b},P)\geqslant L^{-2n-2}\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)}\cdots\sum\Big(\max\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}f_ib_i-f_{n+1}\Big),0\Big)\Big)^2\gg$$
$$L^{-2n-2}\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)}\cdots\sum\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Big)$$

现若记

$$E(P)=\{\boldsymbol{b}\mid 1\leqslant b_i<R_1^{1/n}(P),i=1,2,\cdots,n\}$$

则

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)}\cdots\sum\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Big)=\Big(\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)\cap E(P)}\cdots\sum+\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)-\mathscr{R}(P)\cap E(P)}\cdots\sum\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Big)\geqslant$$
$$\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)\cap E(P)}\cdots\sum b_1^2+\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)-\mathscr{R}(P)\cap E(P)}\cdots\sum R_1^{2/n}(P)\geqslant$$
$$\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathscr{R}(P)\cap E(P)}\cdots\sum b_1^2+\sum_{\boldsymbol{b}\in E(P)-\mathscr{R}(P)\cap E(P)}\cdots\sum b_1^2=$$
$$\sum_{\boldsymbol{b}\in E(P)}\cdots\sum b_1^2\gg(R_1(P))^{1+2/n}$$

利用 ㊼,就得

$$R_1(P)\ll(Q(P)L^{2n+2})^{\frac{n}{n+2}}$$

再由引理 8 及 $R(P),R_1(P)$ 的定义,就有

$$R(P) \ll (Q(P)L^{2n+2})^{\frac{n}{n+2}} + X^n L^{-v}$$

7.4 基本引理

引理 12 (Siegel-Walfisz①) 命 σ, σ_2 为任意给定的正实数，若 $q \leqslant L^{\sigma}, (l,q) = 1, x \leqslant P$，再命 $\pi(x;q,l)$ 表算术级数 $qm + l$ 中不大于 x 的素数个数，则

$$\pi(x;q,l) = \sum_{\substack{P \equiv l \pmod q \\ P \leqslant x}} 1 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{2 \leqslant t \leqslant x} \frac{1}{\log t} + O(Pe^{-\sigma_2\sqrt{L}}) \qquad ㊽$$

符号 O 包含的常数与 q 无关.

引理 13 设 σ_3, σ_4 为任意给定的两个正实数，则对适合

$$\left|\alpha - \frac{h}{q}\right| \leqslant p^{-1}L^{\sigma_4}, q \leqslant L^{\sigma^0}$$

的实数 α，常有

$$\sum_{p \leqslant P} e(p\alpha) - \frac{\sum'_{1 \leqslant l \leqslant q} e\left(\frac{l}{q}h\right)}{\varphi(q)} \sum_{t=2}^{P} \frac{e\left(t\left(\alpha - \frac{h}{q}\right)\right)}{\log t} = O(pL^{-\sigma_3})$$

证明 利用引理 12 及分部求和法即得. 可参考吴方②引理 7 的证明.

引理 14 设 $|\beta_\mu| < \tau^{-1} = P^{-1}L^{\sigma_1}(\mu = 1,2,\cdots,n)$ 不能同时成立，又 $|\beta_\mu| \leqslant 1 - \tau^{-1}(\mu = 1,2,\cdots,n)$，那么，如果 ③ 成立，则必存在一个自然数 $\lambda(1 \leqslant \lambda \leqslant n+1)$，使得

$$\sum_{t=2}^{P} \frac{e\left(t \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda}\beta_\mu\right)}{\log t} \ll PL^{-\sigma_1+1} \qquad ㊾$$

证明 我们首先证明，存在一个自然数 $\lambda(1 \leqslant \lambda \leqslant n+1)$，使得

$$\left\langle \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\lambda}\beta_\mu \right\rangle \geqslant P^{-1}L^{\sigma_1-1} \qquad ㊿$$

其中 $\langle x \rangle$ 表示 x 和整数间的最近距离.

如果 ㊿ 不成立，则必有

$$|\theta_v| < \tau^{-1}L^{-1}, v = 1,2,\cdots,n+1$$

使

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu j}\beta_\mu = i_j + \theta_j, j = 1,2,\cdots,n+1 \qquad (51)$$

此处 i_j 是整数. 利用引理 6 中的记号，由 (51) 解得

$$(-1)^{n-j+1}\Delta_n^j\beta_v = \Delta_{n(v)}^j(i) + \Delta_{n(v)}^j(\boldsymbol{\theta}), v = 1,2,\cdots,n \qquad (52)$$

---

① Walfisz A., Zur additive Zahlentheorie II. Math. Zeits., 1936, 40: 592-607.
② 吴方. 素数变数的一方程组. 数学学报, 1957, 7: 102-122.

对 $j=1,2,\cdots,n+1$ 皆成立. 因$(\Delta_n^1,\Delta_n^2,\cdots,\Delta_n^{n+1})=1$,故必存在整数组 m_1, $m_2,\cdots,m_{n+1}$,使$\sum_{j=1}^{n+1}m_j(-1)^{n-j+1}\Delta_n^j=1$. 从而由 ㉜ 得

$$\beta_v=\sum_{j=1}^{n+1}m_j\Delta_{n(v)}^j(\boldsymbol{i})+\sum_{j=1}^{n+1}m_j\Delta_{n(v)}^j(\boldsymbol{\theta}),1\leqslant v\leqslant n \qquad ㉝$$

此时 ㉝ 右边第一项是整数,第二项为 $O(\tau^{-1}L^{-1})$,因此,如果$\sum_{j=1}^{n+1}m_j\Delta_{n(v)}^j(\boldsymbol{i})=0,v=1,2,\cdots,n$,则与假设"与 $|\beta_\mu|<\tau^{-1}$ 不能同时成立"相矛盾. 又如果存在 v_0,使得$\sum_{j=1}^{n+1}m_j\Delta_{n(v_0)}^j(\boldsymbol{i})\neq 0$,那么因当 P 充分大时,$O(\tau^{-1}L^{-1})>-\tau^{-1}$,就得出与 $|\beta_\mu|\leqslant 1-\tau^{-1}(\mu=1,2,\cdots,n)$ 相矛盾. 所以 ㉚ 成立.

根据 Able 求和

$$\left|\sum_{t=2}^{P}\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\beta_\mu\right)}{\log t}\right|\ll\max_{N\leqslant P}\left|\sum_{2\leqslant t\leqslant N}e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\beta_\mu\right)\right|\ll\frac{1}{\left\langle\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\beta_\mu\right\rangle}\leqslant PL^{-\sigma_1+1}$$

此即引理.

7.5 余区间上的估计

命 M 是定理 2 中任意给定的正实数,γ 为不小于 M 的实数,取

$$\left.\begin{aligned}\sigma_5&=\left(\frac{n+2}{n}M+n+2\right)/2\\ \sigma_6&=2\sigma_5+9\\ \sigma_0&=\max\{(n\sigma_6+1),\gamma+a'\},a'>a=2\sum_{i=0}^{n-1}c_{n+1}^{i}-1\\ \sigma_1&=\left(\frac{n+2}{n}M+3(n+1)\sigma_0+n+4\right)/2\\ \sigma_3&=\left(\frac{n+2}{n}M+(n+1)\sigma_0+n\sigma_1+2n+2\right)/2\end{aligned}\right\} \qquad ㉞$$

如前,设 $\tau=PL^{-\sigma_1}$,而以 $M\left(\frac{h_1}{q},\cdots,\frac{h_n}{q}\right)$表示 n 维空间中的立方体

$$\left|\alpha_\mu-\frac{h_\mu}{q}\right|<\tau^{-1},\mu=1,2,\cdots,n \qquad ㉟$$

其中,$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 维空间中的一点,而

$$(h_1,h_2,\cdots,h_n,q)=1,0\leqslant h_\mu<q\leqslant L^{\sigma_0}$$

则当 P 充分大时,易见两个不同的 M 不能相交. 又以 K 表示从立方体

$$-\tau^{-1}<\alpha_\mu\leqslant 1-\tau^{-1},\mu=1,2,\cdots,n$$

中除去全部 M 后剩余的部分. 由 ㉔

$$Q(P)=\left(\sum_{M}\int_{M}+\int_{K}\right)\Big|\prod_{v=1}^{n+1}S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha})-\sum_{q\leqslant L^{\sigma_0}}\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}\prod_{v=1}^{n+1}\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q,\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}}{q}\right)\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=Q_1(P)+Q_2(P) \quad ㊻$$

现先估计 $Q_2(P)$. 对 $Q_2(P)$,有

$$Q_2(P)\ll\int_K\Big|\prod_{v=1}^{n+1}S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha})\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n+\int_K\Big|\sum_{q=L^{\sigma_0}}\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}\prod_{v=1}^{n+1}\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q,\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}}{q}\right)\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=Q'_2(P)+Q''_2(P) \quad ㊼$$

引理 15 对于 K 中任何一点 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,必有一自然数 $\lambda\leqslant n$,使得

$$\sum_{p\leqslant P}e\left(P\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\alpha_\mu\right)\ll PL^{-\sigma_5} \quad ㊽$$

引理 16

$$Q'_2(P)\ll P^{n+2}L^{-2\sigma_5-n} \quad ㊾$$

证明 由引理 15 和 ㊼

$$Q'_2(P)\ll P^2L^{-2\sigma_5}\sum_{\lambda=1}^{n}\int_0^1\cdots\int_0^1\Big|\prod_{\substack{v=1\\v\neq\lambda}}^{\lambda+1}S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha})\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n \quad ㊿$$

给出 $1,2,\cdots,n+1$ 的一个排列 $\lambda,v_1,\cdots,v_n$,于是有

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\Big|\prod_{\substack{v=1\\v\neq\lambda}}^{n+1}S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha})\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=\int_0^1\cdots\int_0^1\Big|\prod_{j=1}^{n}S_P^{(v_j)}(\boldsymbol{\alpha})\Big|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=$$

$$\sum_{p_1\leqslant P}\cdots\sum_{p_n\leqslant P}\sum_{q_1\leqslant P}\cdots\sum_{q_n\leqslant P}\int_0^1\cdots\int_0^1e\left(\sum_{j=1}^{n}(p_j-q_j)\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v_j}\alpha_\mu\right)\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n=$$

$$\sum_{\substack{p_1\leqslant P\\ \sum_{j=1}^{n}a_{\mu v_j}(p_j-q_j)=0\\ \mu=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum_{p_n\leqslant P}\sum_{q_1\leqslant P}\cdots\sum_{q_n\leqslant P}1=\sum_{p_1\leqslant P}\cdots\sum_{p_n\leqslant P}1\ll\left(\frac{P}{L}\right)^n \quad (61)$$

这里利用了矩阵 A 的 n 级子式全不为零的假定. 将 (61) 代入 ㊿,就得到 ㊾.

引理 17

$$Q''_2(P)\ll P^{n+2}L^{-2\sigma_1+2(n+1)\sigma_0-n+2} \quad (62)$$

证明 (1) 先证:若 $\boldsymbol{\alpha}\in K,q\leqslant L^{\sigma_0},(h_1,\cdots,h_n,q)=1$,则必有一自然数 $\lambda(1\leqslant\lambda\leqslant n+1)$,使得

$$\sum_{2\leqslant t\leqslant P}\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\left(\alpha_{\mu}-\frac{h_{\mu}}{q}\right)\right)}{\log t}\ll PL^{-\sigma_1+1} \qquad ⑥③$$

当 $\boldsymbol{\alpha}\in K, q\leqslant L^{\sigma_0}, (h_1,\cdots,h_n,q)=1$ 时,由 K 的定义,可知 $\left|\alpha_{\mu}-\frac{h_{\mu}}{q}\right|<\tau^{-1}(\mu=1,2,\cdots,n)$ 不能同时成立. 又因 $\frac{h_{\mu}}{q}$ 之最大值不超过 $\frac{L^{\sigma_0}-1}{L^{\sigma_0}}=1-L^{-\sigma_0}$,最小值为零,而 $-\tau^{-1}<\alpha_{\mu}\leqslant 1-\tau^{-1}$,故当 p 充分大时,$\left|\alpha_{\mu}-\frac{h_{\mu}}{q}\right|\leqslant\max(1-\tau^{-1},1-L^{-\sigma_0}+\tau^{-1})=1-\tau^{-1}(\mu=1,\cdots,n)$. 因此,利用引理 14,就得到 ⑥③.

(2) 由 ⑤⑦,④③,⑥③ 及 Буняковский-Schwarsz 不等式

$$Q''_2(P)=\int_K\left|\sum_{q\leqslant L^{\sigma_0}}\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}\prod_{v=0}^{n+1}\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q,\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}}{q}\right)\right|^2 d\alpha_1\cdots d\alpha_n\leqslant$$

$$\left(\sum_{q\leqslant L^{\sigma_0}}\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}1\right)\sum_{q\leqslant L^{\sigma_0}}\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}\int_K\left|\prod_{v=1}^{n+1}\sum_{2\leqslant t\leqslant P}\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\left(\alpha_{\mu}-\frac{h_{\mu}}{q}\right)\right)}{\log t}\right|^2 d\alpha_1\cdots d\alpha_n\ll$$

$$L^{(n+1)\sigma_0}P^2L^{-2\sigma_1+2}\left(\sum_{q\leqslant L^{\sigma_0}}\sum_{\substack{h_1=0\\(h_1,\cdots,h_n,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{h_n=0}^{q-1}\sum_{\lambda=0}^{n+1}I_{\lambda}\right) \qquad ⑥④$$

其中

$$I_{\lambda}=\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\prod_{\substack{v=1\\v\neq\lambda}}^{n+1}\sum_{2\leqslant t\leqslant P}\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v}\left(\alpha_{\mu}-\frac{h_{\mu}}{q}\right)\right)}{\log t}\right|^2 d\alpha_1\cdots d\alpha_n$$

再取 $1,2,\cdots,n+1$ 的一个排列 $\lambda,v_1,\cdots,v_n$,即得

$$I_{\lambda}=\int_0^1\cdots\int_0^1\left|\prod_{j=1}^{n}\sum_{2\leqslant t\leqslant P}\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v_j}\left(\alpha_{\mu}-\frac{h_{\mu}}{q}\right)\right)}{\log t}\right|^2 d\alpha_1\cdots d\alpha_n=$$

$$\sum_{2\leqslant t_1\leqslant P}\cdots\sum_{2\leqslant t_n\leqslant P}\sum_{2\leqslant s_1\leqslant P}\cdots\sum_{2\leqslant s_n\leqslant P}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{e\left(\sum_{j=1}^{n}(t_j-s_j)\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu v_j}\alpha_{\mu}\right)}{\log t_1\cdots\log t_n\log s_1\cdots\log s_n}d\alpha_1\cdots d\alpha_n=$$

$$\sum_{2\leqslant t_1\leqslant P}\cdots\sum_{\substack{2\leqslant t_n\leqslant P\\ \sum_{j=1}^{n}a_{\mu v_j}(t_j-s_j)=0\\ \mu=1,2,\cdots,n}}\sum_{2\leqslant s_1\leqslant P}\cdots\sum_{2\leqslant s_n\leqslant P}\cdots\frac{1}{\log t_1\cdots\log t_n\log s_1\cdots\log s_n}=$$

$$\left(\sum_{t=2}^{P}\frac{1}{\log^2 t}\right)^n\ll\left(\frac{P}{L}\right)^n \qquad ⑥⑤$$

这里也用了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 级子式不为零的假定及 $e(x)$ 为周期函数的性质. 将 ⑥⑤

代入 ⑭,就得到引理.

7.6 基本区间的估计

由 ⑯ 及 Буняковский-Schwarsz 不等式

$$Q_1(P) = \sum_M \int_M \left| \prod_{v=1}^{n+1} S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha}) - \sum_{\substack{q \leqslant L^{\sigma_0} \\ (h_1,\cdots,h_n,q)=1}} \sum_{h_1=0}^{q-1} \cdots \sum_{h_n=0}^{q-1} \prod_{v=1}^{n+1} \widetilde{S}_P^{(v)}\left(q, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{h}}{q}\right) \right|^2 \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_n =$$

$$\sum_{M(q,\boldsymbol{h})} \int_M \left| \prod_{v=1}^{n+1} S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha}) - \prod_{v=1}^{n+1} \widetilde{S}_P^{(v)}\left(q, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{h}}{q}\right) - \right.$$

$$\left. \sum_{\substack{q \leqslant L^{\sigma_0} \\ (h'_1,\cdots,h'_n,q')=1 \\ h'_1,\cdots,h'_n,q' \neq h_1,\cdots,h_n,q}} \sum_{h'_1=0}^{q'-1} \cdots \sum_{h'_n=0}^{q'-1} \prod_{v=1}^{n+1} \widetilde{S}_P^{(v)}\left(q', \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{h}'}{q'}\right) \right|^2 \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_n \ll$$

$$\sum_{M(q,\boldsymbol{h})} \int_M \left| \prod_{v=1}^{n+1} S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha}) - \prod_{v=1}^{n+1} \widetilde{S}_P^{(v)}\left(q, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{h}}{q}\right) \right|^2 \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_n +$$

$$\sum_{M(q,\boldsymbol{h})} \int_M \left| \sum_{\substack{q' \leqslant L^{\sigma_0} \\ (h'_1,\cdots,h'_n,q')=1 \\ h'_1,\cdots,h'_n,q' \neq h_1,\cdots,h_n,q}} \sum_{h'_1=0}^{q'-1} \cdots \sum_{h'_n=0}^{q'-1} \prod_{v=1}^{n+1} \widetilde{S}_P^{(v)}\left(q', \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{h}'}{q'}\right) \right|^2 \mathrm{d}\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\alpha_n =$$

$$Q'_1(P) + Q''_1(P) \qquad ⑯$$

此处 $h'_1,\cdots,h'_n,q' \neq h_1,\cdots,h_n,q$ 表示等式 $h'_1 = h_1,\cdots,h'_n = h_n, q = q'$ 不能同时成立.有

引理 18

$$Q'_1(P) \ll P^{n+2} L^{-2\sigma_3+(n+1)\sigma_0+n\sigma_1} \qquad ⑰$$

证明　由引理 13 可知,当 $\alpha \in M$ 时

$$S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha}) - \widetilde{S}_P^{(v)}(q, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{h}}{q}) \ll PL^{-\sigma_3}, v = 1,2,\cdots,n+1$$

因此

$$\prod_{v=1}^{n+1} S_P^{(v)}(\boldsymbol{\alpha}) - \prod_{v=1}^{n+1} \widetilde{S}_P^{(v)}(q, \boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{h}}{q}) \ll P^{n+1} L^{-\sigma_3}$$

从而由 ⑯ 并因每个 M 的体积是 $(p^{-1}L^{\sigma_1})^n$,可得

$$Q'_1(P) \ll \sum_{\substack{q \leqslant L^{\sigma_0} \\ (h_1,\cdots,h_n,q)=1}} \sum_{h_1=0}^{q-1} \cdots \sum_{h_n=0}^{q-1} P^{2n+2} L^{-2\sigma_3} (P^{-1}L^{\sigma_1})^n \ll P^{n+2} L^{-2\sigma_3+n\sigma_1+(n+1)\sigma_0}$$

引理 19

$$Q''_1(P) \ll P^{n+2} L^{-2\sigma_1-n+2+3(n+1)\sigma_0} \qquad ⑱$$

证明　(1) 类似于引理 17 的证明(1),可得:当 $\boldsymbol{\alpha} \in M$ 而 $h'_1,\cdots,h'_n,q' \neq h_1,\cdots,h_n,q$ 时,必有一个 λ,使得

$$\sum_{2\leqslant t\leqslant p}\frac{e\left(t\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\lambda}\left(\alpha_{\mu}-\frac{h'_{\mu}}{q'}\right)\right)}{\log t}\ll PL^{-\sigma_1+1} \tag{69}$$

(2) 由 ⑯,⑲ 及 Буняковский-Schwarsz 不等式

$$Q''_1(P)=\sum_{M(q,h)}\int_M\left|\sum_{\substack{q'\leqslant L^{\sigma_0}\\ (h'_1,\cdots,h'_n,q')=1\\ h'_1,\cdots,h'_n,q'\neq h_1,\cdots,h_n,q}}\sum_{h'_1=0}^{q'-1}\cdots\sum_{h'_n=0}^{q'-1}\prod_{v=1}^{n+1}\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q',\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}'}{q'}\right)\right|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\leqslant$$

$$\sum_{M(q,h)}\Bigg(\Big(\sum_{\substack{q'\leqslant L^{\sigma_0}\\ (h'_1,\cdots,h'_n,q')=1\\ h'_1,\cdots,h'_n,q'\neq h_1,\cdots,h_n,q}}\sum_{h'_1=0}^{q'-1}\cdots\sum_{h'_n=0}^{q'-1}1\Big)\cdot$$

$$\sum_{\substack{q'\leqslant L^{\sigma_0}\\ (h'_1,\cdots,h'_n,q')=1\\ h'_1,\cdots,h'_n,q'\neq h_1,\cdots,h_n,q}}\sum_{h'_1=0}^{q'-1}\cdots\sum_{h'_n=0}^{q'-1}\int_M\left|\prod_{v=1}^{n+1}\widetilde{S}_P^{(v)}\left(q',\boldsymbol{\alpha}-\frac{\boldsymbol{h}'}{q'}\right)\right|^2\mathrm{d}\alpha_1\cdots\mathrm{d}\alpha_n\Bigg)\ll$$

$$L^{(n+1)\sigma_0}\sum_{M(q,h)}\sum_{\substack{q\leqslant L^{\sigma_0}\\ (h'_1,\cdots,h'_n,q')=1\\ h'_1,\cdots,h'_n,q'\neq h_1,\cdots,h_n,q}}\sum_{h'_1=0}^{q'-1}\cdots\sum_{h'_n=0}^{q'-1}P^2L^{-2\sigma_1+2\sum_{\lambda=1}^{n+1}I_\lambda}$$

此处 I_λ 和 ⑭ 中完全相同,故有

$$Q''_1(P)\ll P^{n+2}L^{-2\sigma_1-n+2+3(n+1)\sigma_0}$$

定理 2 的证明 由 ⑭,⑯,⑰,⑲,⑫,⑯,⑰,⑱ 可得

$$Q(P)\ll P^{n+2}L^{-\frac{n+2}{n}M-2n-2}$$

于是由 ⑯

$$R(P)\ll P^nL^{-M}+X^nL^{-\gamma}\ll X^nL^{-M}$$

8 关于素数变数线性方程组的一点注记——同余可解条件的研究①

——陆鸣皋

华罗庚②曾提出关于整系数素数变数的线性方程组

$$\sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v} p_v = b_\mu, \mu = 1,2,\cdots,n \qquad ①$$

的解的问题.关于这个问题,James 和 Weyl③,Hans Egon Richent④,以及 Van der Corput⑤会对一些特殊的情形作了研究.1957 年,吴方⑥在某些条件下建立了 ① 的解数的渐近公式.若以 $I(\boldsymbol{b};P)$ 表示方程组 ① 在 $2 \leqslant p_v \leqslant P(v = 1,2,\cdots, 2n+1)$ 内的解组数,他指出

$$I(\boldsymbol{b};P) = \prod_{n=2}^{\infty} s(p) \cdot \frac{P^{n+1}}{L^{2n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{v=1}^{2n+1} \left(\int_0^1 e\left(s \sum_{v=1}^{n} a_{\mu v} \beta_\mu \right) \mathrm{d}s \right) \cdot e\left(- \sum_{\mu=1}^{n} \frac{b_\mu}{P} \beta_\mu \right) \mathrm{d}\beta_1 \cdots \mathrm{d}\beta_n + O\left(\frac{P^{n+1}}{L^{2n+2}} (\log L)^n \right) \qquad ②$$

这里 $L = \log P, (\varphi(p))^{2n+1} \dfrac{s(p)}{p^n}$ 表示同余方程组

$$\sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v} l_v \equiv b_\mu (\bmod p), \mu = 1,2,\cdots,n \qquad ③$$

在 $1 \leqslant l_v \leqslant p-1(v = 1,2,\cdots,2n+1)$ 内的解组数.

熟知要使 ② 有意义,需讨论

$$\prod_{p=2}^{\infty} s(p) \geqslant A_1 > 0 \qquad ④$$

及

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{v=1}^{2n+1} \left(\int_0^1 e\left(s \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu v} \beta_\mu \right) \mathrm{d}s \right) e\left(- \sum_{\mu=1}^{n} \frac{b_\mu}{P} \beta_\mu \right) \mathrm{d}\beta_1 \cdots \mathrm{d}\beta_n \geqslant A_2 > 0 \qquad ⑤$$

成立的条件,其中 A_1 是与 $\boldsymbol{b} = (b_1,\cdots,b_n)$ 无关,而 A_2 是与 $P,\boldsymbol{b}$ 都无关的常数.称保证 ④ 成立的条件为同余可解条件,而称保证 ⑤ 成立的条件为正可解条件.

在相关文献⑥中,仅讨论了 $n=1$ 时的同余可解条件,本文对一般情形的同余可解条件进行了讨论.文中假定,方程组 ① 的系数矩阵

① 原载自《中国科学技术大学学报》,第 10 卷第 4 期,1980 年.
② 华罗庚.堆基素数论.北京:科学出版社,1957.
③ James, R. D. and Weyl. H., Amer. J. Math., 1942, 64: 539-552.
④ Richert Hans Egon., Jour. Reine Angew. Math., 1953, 191: 179-198.
⑤ Van der Corput, J. G., Propuétés Additives. I, Acta Arithmetica, 1939, 3: 180-234.
⑥ 吴方.素数变数的线性方程组.数学学报,1957, 7: 102-122.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1\,2n+1} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2\,2n+1} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{n\,2n+1} \end{pmatrix} \tag{⑥}$$

的所有 n 级子式全不为 0，且在这些子式间没有 1 以外的公因子．现在设 $\Delta_n^{(v_1,\cdots,v_n)}$ 是矩阵 ⑥ 中取第 $v_1,\cdots,v_n$ 列所构成的 n 级子式，而 $\Delta_{n(j)}^{(v_1,\cdots,v_n)}(\boldsymbol{b})$ 是以 $(b_1,\cdots,b_n)$ 取代 $\Delta_n^{(v_1,\cdots,v_n)}$ 中的第 j 列构成的 n 阶行列式．由于 ⑥ 的 n 级子式共素，所以对任何素数 p，必存在一组整数 $v_1,\cdots,v_n,1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_n\leqslant 2n+1$，使得 $p\nmid\Delta_n^{(v_1,\cdots,v_n)}$．在这样的假定下，本文的主要结果是：

定理 1　若 $p>n+1$，且对 $1,2,\cdots,2n+1$ 的一个排列 $v_1,v_2,\cdots,v_{2n+1}$

$$p\nmid\triangle_n^{(v_1,\cdots,v_n)} \tag{⑦}$$

$$p\nmid\prod_{j=1}^{n}(\triangle_n^{(v_1,\cdots,v_{j-1},v_{j+1},\cdots,v_n,v_{n+1})},\cdots,\triangle_n^{(v_1,\cdots,v_{j-1},v_{j+1},\cdots,v_n,v_{2n+1})},\triangle_{n(j)}^{(v_1,\cdots,v_n)}(\boldsymbol{b}))$$

这里 $(a_1,\cdots,a_k)$ 表示 $a_1,\cdots,a_k$ 的最大公因子，那么

$$s(p)>0$$

推论　设

$$C_1=\max\{\max_{(v_1,\cdots,v_n)}|\Delta_n^{(v_1,\cdots,v_n)}|,n+1\} \tag{⑧}$$

这里 $\max\limits_{(v_1,\cdots,v_n)}$ 表示在 $1,2,\cdots,2n+1$ 中任取 n 个数 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，而构成的 $|\Delta_n^{(v_1,\cdots,v_n)}|$ 中取最大者．则当 $p>C_1$ 时，$s(p)>0$．特别，如果

$$b_\mu\equiv\sum_{v=1}^{2n+1}a_{\mu v}\quad\left(\bmod\prod_{p\leqslant C_1}p\right),\mu=1,2,\cdots,n \tag{⑨}$$

则对所有的素数 p，皆有 $s(p)>0$.

定理 2　取

$$C_2=\max(2n+1,C_1)$$

$$\delta=\prod_{p\leqslant C_2}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2n-1}p^{-n-1}\prod_{p>C_2}\left(1-\frac{2n+1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-2n-1}$$

若对所有的素数 p，皆有 $s(p)>0$，则

$$\prod_{p=2}^{\infty}s(p)\geqslant\delta>0$$

引理 1　[①]设 F_q 是一个含有 q 个元素的有限域，$f(x_1,\cdots,x_r)$ 是 F_q 上的一个非零多项式，且每个 x_i 的次数都小于 q，则必存在 $(c_1,\cdots,c_r)\in F_q^r=\underbrace{F_q\times\cdots\times F_q}_{r个}$，使 $f(c_1,\cdots,c_r)\neq 0$.

① Nathan Jacobson, Basic Algebra 1, W. H. Freeman and Company, 1974.

引理 2[①]设 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 是 F_q 上的次数为 d 的非零多项式，那么 $f(x_1,\cdots,x_r)$ 在 F_q 中的零点个数 N 满足

$$N \leqslant dq^{r-1} \tag{⑩}$$

定理 1 的证明 因 $p \nmid \Delta_n^{(v_1,\cdots,v_n)}$，所以由 Cramer 法则，同余方程组

$$\sum_{v=1}^{2n+1} a_{\mu v} l_v \equiv b_\mu (\bmod p), \mu = 1,2,\cdots,n \tag{⑪}$$

可解成

$$\Delta_n^{(v_1,\cdots,v_n)} l_{v_j} \equiv (-1)^{n-j+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \Delta_n^{(v_1,\cdots,v_{j-1},v_{j+1},\cdots,v_n,v_k)} l_{v_k} + \Delta_{n(j)}^{(v_1,\cdots,v_n)}(\boldsymbol{b}), j = 1,2,\cdots,n (\bmod p) \tag{⑫}$$

由此可知同余方程组 ⑪ 的解组数恰为 p^{n+1}. 再考虑同余方程

$$l_1 l_2 \cdots l_{2n+1} \equiv 0 (\bmod p) \tag{⑬}$$

由 ⑫，此即

$$\prod_{j=1}^{n} \left((-1)^{n-j+1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \Delta_n^{(v_1,\cdots,v_{j-1},v_{j+1},\cdots,v_n,v_k)} l_{v_k} + \Delta_{n(j)}^{(v_1,\cdots,v_n)}(\boldsymbol{b}) \right) \times l_{v_{n+1}} \cdot l_{v_{n+2}} \cdots l_{v_{2n+1}} \equiv 0 (\bmod p) \tag{⑭}$$

由定理之假定，上面同余式左边为 F_p 上的非零多项式，又当 $p > n+1$ 时，依引理 1 得知 ⑭，亦即 ⑬ 之解数不超过 $p^{n+1} - 1$，故得定理.

定理 2 的证明 当 $p > C_2$ 时，由引理 2，同余方程组 ⑭ 的解数

$$r_n(\boldsymbol{b};p) \leqslant (2n+1)p^n$$

于是由

$$(\varphi(p))^{2n+1} \frac{S(p)}{p^n} = p^{n+1} - r_n(\boldsymbol{b};p)$$

得出

$$S(p) = \left(1 - \frac{r_n(\boldsymbol{b};p)}{p^{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2n-1} \geqslant \left(1 - \frac{2n+1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2n-1}$$

而当 $p \leqslant C_2$ 时 $s(p) > 0$ 即为

$$(\varphi(p))^{2n+1} \frac{s(p)}{p^n} \geqslant 1, s(p) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2n-1} p^{-n-1}$$

因此

$$\prod_p s(p) \geqslant \prod_{p \leqslant C_2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2n-1} p^{-n-1} \prod_{p > C_2} \left(1 - \frac{2n+1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2n-1} \geqslant \delta > 0$$

以上结果当变数个数为 $m \geqslant 2n+1$ 时仍成立.

---

① Wolfgang M. schmidt, Equations over Finite Fields, Lecture Notes in Mathematics, 536, Springer - Verlag, 1976.

9 关于哥德巴赫问题①

—— 陈景润

摘要

在这篇文章中我们证明了：每一个正奇数 $N \geqslant e^{e^{11.503}}$ 都能够表示成为三个素数的和.

9.1 引言

早在 1742 年哥德巴赫在给欧拉的一封信中提出了如下的猜测：每一个大于 4 的偶数都能够表示成为两个素数的和；每一个大于 5 的奇数都能够表示成为三个素数的和. 这就是著名的哥德巴赫猜想. 1937 年苏联数学家 Виноградов 证明了：存在一个充分大的绝对常数 N_0，使得每一个大于 N_0 的奇数都能够表示成为三个素数的和. 在 1956 年苏联学者 Бороздкин 宣布了 N_0 可以取为 $e^{e^{16.038}}$，但至今尚未见到其证明. 在本文中我们改进了这一结果，证明如下的定理.

定理 每一个奇数 $N \geqslant e^{e^{11.503}}$ 都能够表示成为三个素数之和.

为了叙述本文的结果，我们先引入如下的记号：$p, p_k(k = 1,2,\cdots)$ 总表示素数，N 恒表示正奇数. 令 $r = \log N, \tau = Nr^{-7.5}$，$I(N)$ 表示将 N 表示成为 $N = p_1 + p_2 + p_3$ 的形式的表法个数，则我们有

$$I(N) = \int_0^1 S^3(\alpha)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} S^3(\alpha)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

其中，$S(\alpha) = \sum_{p \leqslant N} e(p\alpha)$，对于任何实数 θ，$e(\theta) = e^{2\pi i\theta}$. 熟知区间 $[-\tau^{-1}, 1-\tau^{-1}]$ 的每一点 α 都能够表示成为 $\alpha = \frac{a}{q} + z, (a,q) = 1, 1 \leqslant q \leqslant \tau, |z| \leqslant \frac{1}{q\tau}$ 的形式. 我们用 E_1 表示满足 $1 \leqslant q \leqslant r^3$ 的 α 所组成的集合，用 E_2 表示满足 $r^3 \leqslant q \leqslant r^{6.5}$ 的 α 所组成的集合，用 E_3 表示从 $[-\tau^{-1}, 1-\tau^{-1}]$ 中去掉 E_1 和 E_2 以后的点所组成的集合. 最后我们令

$$I_1(N) = \int_{E_1} S^3(\alpha)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

---

① 原载数学学报，1989，32(5)：702-718.

$$I_2(N)=\int_{E_2}S^3(\alpha)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$I_3(N)=\int_{E_3}S^3(\alpha)e(-N\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

9.2 关于 $I_1(N)$ 的一个下界

引理 1 设 $\beta\geqslant 0$，z 是实数，$N\geqslant \mathrm{e}^{100}$，令 $J_N(z,\beta)=\int_2^N\frac{e(zt)}{t^\beta\log t}\mathrm{d}t$，则我们有

$$|J_N(z,\beta)|\leqslant\begin{cases}1.02Nr^{-1}, & |z|\leqslant N^{-1}\\ 0.747(|z|r)^{-1}, & N^{-1}\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}}\\ 1.03|z|^{-1}, & \frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}}\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

证明 当 $N\geqslant \mathrm{e}^{100}$ 时我们有

$$|J_N(z,\beta)|\leqslant\int_2^N\frac{\mathrm{d}t}{\log t}=\frac{N}{r}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^N\frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2}\leqslant$$

$$\frac{N}{r}+\frac{N}{r^2}+2\int_2^N\frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^3}\leqslant\frac{1.02N}{r} \qquad ①$$

当 $N^{-1}\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{2}$ 时有

$$|J_N(z,\beta)|\leqslant\left|\int_2^N\frac{\cos 2\pi zt}{t^\beta\log t}\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_2^N\frac{\sin 2\pi zt}{t^\beta\log t}\mathrm{d}t\right|\leqslant(U^2+V^2)^{\frac{1}{2}} \qquad ②$$

其中

$$|U|=\left|\int_2^N\frac{\cos 2\pi zt}{t^\beta\log t}\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_{4|z|}^{2N|z|}\frac{\cos\pi u}{2|z|\log\frac{u}{2|z|}}\mathrm{d}u\right|\leqslant$$

$$\int_{4|z|}^{4|z|+1}\frac{\mathrm{d}u}{2|z|\log\frac{u}{2|z|}}=\int_2^{2+\frac{1}{2|z|}}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

$$|V|\leqslant\int_2^{2+\frac{1}{2|z|}}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

当 $|z|\leqslant\frac{1}{2}$ 时则我们有 $\int_2^{2+\frac{1}{2|z|}}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}\leqslant\frac{1}{1.38|z|}$. 如果 $N\geqslant \mathrm{e}^{100}$，$2|z|\leqslant N^{-\frac{79}{80}}$，则

$$\int_2^{2+\frac{1}{2|z|}}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}=\frac{2+\frac{1}{2|z|}}{\log(2+\frac{1}{2|z|})}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^{2+\frac{1}{2|z|}}\frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2}\leqslant\frac{0.528}{|z|r}$$

注意到$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{1.38}\leqslant 1.03$以及$(0.528)(2^{\frac{1}{2}})\leqslant 0.747$由①,②两式可以知道本引理能够成立.

现在我们就来估计$I_1(N)$.由$I_1(N)$的定义和$N\geqslant e^{100}$可得

$$I_1(N)=\sum_{q=1}^{r^3}\sum_{a=1}^{q}{}'\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}S^3\left(\frac{a}{q}+z\right)e\left(-\left(\frac{a}{q}+z\right)N\right)\mathrm{d}z \qquad ③$$

其中,$\sum_{a=1}^{q}{}'$ 表示 $\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}$.由$S(\alpha)$的定义我们有

$$S(\alpha)=S_1(\alpha)+\sum_{\substack{p\leqslant N\\p\mid q}}e(p\alpha) \qquad ④$$

其中,$S_1(\alpha)=\sum_{\substack{p\leqslant N\\(p,q)=1}}e(p\alpha)$.

定义 $\mathrm{Li}(n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n\leqslant 2 \text{ 时}\\ \int_2^n\frac{\mathrm{d}t}{\log t}, & \text{当 } n>2 \text{ 时}\end{cases}$,令

$$\psi(t;q,l)=\sum_{\substack{n\leqslant t\\n\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}\Lambda(n)$$

则由$\alpha=\frac{a}{q}+z,(a,q)=1,1\leqslant q\leqslant r^3,|z|\leqslant\frac{r^{7.5}}{qN}$,我们有

$$S_1(\alpha)=\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\sum_{\substack{p\leqslant N\\p\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}e(pz)=\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\int_2^N e(tz)\mathrm{d}\pi(t;q,l)=$$

$$\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\left(e(Nz)\pi(N;q,l)-2\pi\mathrm{i}z\int_2^N e(tz)\pi(t;q,l)\mathrm{d}t\right)=$$

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{l=1}^{q}{}'\left(e(Nz)(\mathrm{Li}(N)-\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)\int_2^N\frac{t^{\beta-1}}{\log t}\mathrm{d}t)\right)-$$

$$2\pi\mathrm{i}z\left(\int_2^N e(tz)\left(\mathrm{Li}(t)-\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)\int_2^t\frac{s^{\beta-1}}{\log s}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right)e\left(\frac{al}{q}\right)+$$

$$\sum_{l=1}^{q}{}'\left(e(Nz)\left(\pi(N;q,l)-\frac{\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)}+\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{t^{\beta-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)-\right.$$

$$\left.-2\pi\mathrm{i}z\int_2^N e(tz)\left(\pi(t;q,l)-\frac{\mathrm{Li}(t)}{\varphi(q)}+\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^t\frac{s^{\beta-1}}{\log s}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right)e\left(\frac{al}{q}\right)=$$

$$\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\left(e(Nz)\mathrm{Li}(N)-2\pi\mathrm{i}z\int_2^N e(tz)\mathrm{Li}(t)\mathrm{d}t\right)-$$

$$\left(\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\left(\int_2^N\frac{e(Nz)t^{\beta-1}}{\log t}\mathrm{d}t-2\pi\mathrm{i}z\int_2^N\left(e(tz)\int_2^t\frac{s^{\beta-1}}{\log s}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right)+$$

$$R(\alpha) = \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\int_2^N \frac{e(tz)}{\log t}\mathrm{d}t - \frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\beta-1}}{\log t}\mathrm{d}t + R(\alpha) \quad ⑤$$

其中，$R(\alpha) = R_1(\alpha) + R_2(\alpha), \tau(\widetilde{\chi}) = \sum_{n=1}^{q}\widetilde{\chi}(n)e\left(\frac{n}{q}\right)$，当存在模 q 的实特征 $\widetilde{\chi}$ 使得 $L(s,\widetilde{\chi})$ 有实零点 $\widetilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{0.107\,7}{\log q}$ 时 $\widetilde{E} = 1$；否则 $\widetilde{E} = 0$，又

$R_1(\alpha) =$

$$(e(Nz))\left(\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\int_2^N \frac{\mathrm{d}\psi(t;q,l)}{\log t} - \frac{\mu(q)\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)} + \frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\cdot\int_2^N \frac{t^{\beta-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right) -$$

$$2\pi i z\int_2^N\left(\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\int_2^t \frac{\mathrm{d}\psi(s;q,l)}{\log s} - \frac{\mu(q)\mathrm{Li}(t)}{\varphi(q)} + \frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^t \frac{s^{\beta-1}}{\log s}\mathrm{d}s\right)e(tz)\mathrm{d}t$$

$$R_2(\alpha) = -(e(Nz))\left(\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\sum_{p\leqslant N^{\frac{1}{2}}}\sum_{\substack{j=2\\ pj\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}^{\log N/\log p}\frac{1}{j}\right) +$$

$$2\pi i z\int_2^N e(tz)\cdot\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{t}}\sum_{\substack{j=2\\ pj\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}^{\log t/\log p}\frac{1}{j}\right)\mathrm{d}t$$

由 $N \geqslant e^{100}$ 易得

$$|R_2(\alpha)| \leqslant \frac{1}{10}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q \quad ⑥$$

由 $R_1(\alpha)$ 的定义我们有

$$\begin{aligned}R_1(\alpha) = {} & (e(Nz))\left(\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\left(\frac{\psi(N;q,l)}{\log N} - \frac{\psi(2;q,l)}{\log 2} + \int_2^N \frac{\psi(t;q,l)}{t(\log t)^2}\mathrm{d}t\right) -\right.\\ & \left(\frac{N}{\log N} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2}\right)\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right) +\\ & \left.\left(\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\left(\frac{N^{\beta}}{\widetilde{\beta}\log N} - \frac{2^{\beta}}{\widetilde{\beta}\log 2} + \int_2^N \frac{t^{\beta-1}}{\widetilde{\beta}(\log t)^2}\mathrm{d}t\right)\right) -\\ & 2\pi i z\int_2^N\left(\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\left(\frac{\psi(t;q,l)}{\log t} - \frac{\psi(2;q,l)}{\log 2} + \int_2^t \frac{\psi(s;q,l)}{s(\log s)^2}\mathrm{d}s\right) -\right.\\ & \left(\frac{t}{\log t} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^t \frac{\mathrm{d}s}{(\log s)^2}\right)\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right) +\\ & \left.\left(\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\left(\frac{t^{\beta}}{\widetilde{\beta}\log t} - \frac{2^{\beta}}{\widetilde{\beta}\log 2} + \int_2^t \frac{s^{\beta-1}}{\widetilde{\beta}(\log s)^2}\mathrm{d}s\right)\right)e(tz)\mathrm{d}t =\\ & R_3(\alpha) + R_4(\alpha)\end{aligned} \quad ⑦$$

其中

$$R_3(\alpha) = (e(Nz))\left(- \sum_{l=1}^{q}{}' \frac{e(\frac{al}{q})\psi(2;q,l)}{\log 2} + \frac{2\mu(q)}{\varphi(q)\log 2} - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})2^{\beta}}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log 2}\right) -$$

$$2\pi iz\int_2^N e(tz)\left(- \sum_{l=1}^{q}{}' \frac{e(\frac{al}{q})\psi(2;q,l)}{\log 2} + \frac{2\mu(q)}{\varphi(q)\log 2} - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})2^{\beta}}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log 2}\right)dt$$

并且我们有

$$| R_4(\alpha) | \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)\left| \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(N;q,l) - \frac{\mu(q)N}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})N^{\beta}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| +$$

$$\int_2^N\left(\frac{1}{t(\log t)^2}\right) \cdot$$

$$\left| \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(t;q,l) - \frac{\mu(q)t}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})N^{\beta}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| dt +$$

$$2\pi | z | \int_2^N\left(\left| - \frac{\mu(q)t}{\varphi(q)} + \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(t;q,l) + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})t^{\beta}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| \cdot\right.$$

$$\left(\frac{1}{\log t}\right) + \int_2^t\left| \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(s;q,l) - \frac{\mu(q)s}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})s^{\beta}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| \cdot$$

$$\left.\left(\frac{ds}{s(\log s)^2}\right)\right)dt \qquad ⑧$$

$$J_N(z) = J_N(z,0), R_5(\alpha) = R(\alpha) - \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{x})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{t^{\beta-1}e(tz)}{\log t}dt + \sum_{\substack{p\leqslant N \\ p|q}} e(p\alpha)$$

则由式 ④ 和 ⑤ 可得

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)J_N(z)}{\varphi(q)} + R_5(\alpha) \qquad ⑨$$

由于当 $n \geqslant 11$ 时有 $n^{0.96}(n-1)^{-1} \leqslant 1$,故有

$$\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} = \left(\frac{|\mu(q)|}{q^{0.96}}\right)\left(\prod_{p|q}\frac{p^{0.96}}{p-1}\right) \leqslant \frac{((2)(3)(5)(7))^{0.96}|\mu(q)|}{(2)(4)(6)q^{0.96}} \leqslant$$

$$\frac{3.54|\mu(q)|}{q^{0.96}} \qquad ⑩$$

我们有

$$\prod_{p\geqslant 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = \frac{\prod_{p\geqslant 2}(1-p^{-2})}{1-\frac{1}{4}} \cdot \prod_{p\geqslant 3}\frac{(1-(p-1)^{-2})}{(1-p^{-2})} =$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6}{\pi^2}\right)\left(\prod_{3\leqslant p\leqslant 113}\frac{p^2(p^2-2p)}{(p+1)(p-1)^3}\right)\left(1 - \frac{1}{(127-1)^2}\right).$$

$$\left(\prod_{p\geqslant 131}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)\left(\prod_{p\geqslant 127}(1-p^{-2})\right)^{-1}\geqslant 0.660\,12 \qquad ⑪$$

由式⑩知道当 $N\geqslant e^{6\,000}$ 时有 $\sum_{q\geqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\leqslant 10^{-5}$，故由式⑪可得当奇数 $N\geqslant e^{6\,000}$ 时有

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}e\left(-\frac{aN}{q}\right)\geqslant\\&\sum_{q\geqslant 1}\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\sideset{}{'}\sum_{a=1}^{q}e\left(-\frac{aN}{q}\right)-\sum_{q\geqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\geqslant\\&\left(\sum_{p\mid N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right)\prod_{p\nmid N}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)-10^{-5}\geqslant\\&(2)(0.660\,12)-10^{-5}\geqslant 1.320\,23\end{aligned} \qquad ⑫$$

当 $N\geqslant e^{100}$，$|z|\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由引理1可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_2^N\frac{e(tz)}{\log t}dt-\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|=\left|\sum_{m=2}^{N-1}\int_m^{m+1}\int_m^t\left(d\left(\frac{e(zu)}{\log u}\right)\right)dt\right|\leqslant\\&\sum_{m=2}^{N-1}\int_m^{m+1}\left(\frac{2\pi|z|}{\log m}+\frac{1}{m(\log m)^2}\right)(t-m)dt\leqslant\\&1.03\pi|z|Nr^{-1}+1.242\end{aligned} \qquad ⑬$$

当 $N\geqslant e^{6\,000}$ 时，则由引理1和式⑬可得

$$\int_{-\frac{1}{q^{\tau}}}^{\frac{1}{q^{\tau}}}\left|(J_N(z))^3-\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3\right|dz\leqslant(3)(1.03\pi q^{-1}\tau^{-1}Nr^{-1}+1.242)\cdot$$

$$\int_0^{\frac{1}{q^{\tau}}}\left(|J_N(z)|^2+\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^2\right)dz\leqslant$$

$$(9.8r^{6.5}q^{-1})\left(\int_0^{N^{-1}}(1.02Nr^{-1})^2dz+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{2}N^{-\frac{29}{80}}}(0.747z^{-1}r^{-1})^2dz+\right.$$

$$\left.\int_{\frac{1}{2}N^{-\frac{29}{80}}}^{\frac{1}{2}}(1.03z^{-1})^2dz+\sum_{m=2}^{N-1}\frac{1}{(\log m)^2}\right)\leqslant 26.5Nr^{4.5}q^{-1} \qquad ⑭$$

由式⑩我们有

$$\sum_{q\geqslant 1}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\leqslant 1+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\sum_{q\geqslant 10}\frac{(3.54)^2}{q^{1.92}}\leqslant 4.38 \qquad ⑮$$

由 $N\geqslant e^{100}$ 容易得出 $\left|\sum_{m=2}^{N-1}\left(\frac{e(mz)}{\log m}-\frac{e(mz)}{\log(N-1)}\right)\right|\leqslant\frac{1.1N}{r^2}$，故由式⑮和 $\frac{1}{q\tau}=\frac{r^{7.5}}{qN}$ 可得

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^3\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1.1N}{r^2}+\frac{1}{rz}\right)\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^2\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\cdot\left(\frac{1.1N}{r^2}+\frac{qN}{r^{8.5}}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^2\mathrm{d}z\leqslant$$

$$5Nr^{-2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^2\mathrm{d}z \qquad ⑯$$

完全类似于式⑯我们可以得到

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{q^r}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^3\mathrm{d}z\leqslant 5Nr^{-2}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^2\mathrm{d}z \qquad ⑰$$

又我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3 e(-Nz)\mathrm{d}z=\sum_{\substack{m_1=2\\ m_1+m_2+m_3=N}}^{N-1}\sum_{m_2=2}^{N-1}\sum_{m_3=2}^{N-1}\frac{1}{(\log m_1)(\log m_2)(\log m_3)}\geqslant$$

$$(\log N)^{-3}\sum_{m_1=2}^{N-4}\sum_{m_2=2}^{N-m_1-2}1\geqslant 2(N-6)^2r^{-3} \qquad ⑱$$

当 $N\geqslant e^{6\,000}$ 时则由式⑫,⑭到⑱可得

$$\left|\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}(J_N(z))^3 e\left(-\left(\frac{a}{q}+z\right)N\right)\mathrm{d}z\right|\geqslant$$

$$\left|\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}\cdot\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3 e\left(-\left(\frac{a}{q}+z\right)N\right)\mathrm{d}z\right|-$$

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}\left|(J_N(z))^3-\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3\right|\mathrm{d}z\geqslant$$

$$\left|\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^3}\cdot e\left(-\frac{aN}{q}\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right)^3 e(-Nz)\mathrm{d}z\right|-$$

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\cdot\int_{\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^3\mathrm{d}z-$$

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{q^r}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^3\mathrm{d}z-$$

$$(26.5Nr^{4.5})\cdot\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{q(\varphi(q))^2}\geqslant$$

$$\frac{(1.320\,23)(N-6)^2}{2r^3} - 5Nr^{-2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left|\sum_{m=2}^{N-1}\frac{e(mz)}{\log m}\right|^2 dz -$$

$$(26.5Nr^{4.5})\cdot\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{q(\varphi(q))^2}\geqslant$$

$$0.66N^2r^{-3} - 5.5N^2r^{-4} - (26.5Nr^{4.5})\cdot$$

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{80}+\frac{1}{24}+\frac{1}{252}+\sum_{q\geqslant 10}\frac{(3.54)^2}{q^{2.92}}\right)\geqslant 0.659N^2r^{-3} \tag{19}$$

令

$$\Delta_{t,q,a} = \left(\frac{1}{\log t}\right)\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(t;q,l) - \frac{\mu(q)t}{\varphi(q)} + \frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})t^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right| +$$

$$\int_2^t\left|-\frac{\mu(q)y}{\varphi(q)} + \sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(y;q,l) + \frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})y^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\cdot\frac{dy}{y(\log y)^2}$$

$$\Omega_{N,q,a} = \int_2^N\Delta_{t,q,a}dt$$

则由式⑥到⑧可得

$$\left|R_5\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\leqslant\frac{1}{10}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + \log N +$$

$$3\left(1+\frac{1}{\log 2}+\frac{2q^{\frac{1}{2}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log 2}\right) + \left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right| +$$

$$R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\leqslant\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r +$$

$$\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}dt\right| + R_6\left(\frac{a}{q}+z\right) \tag{20}$$

其中 $R_6\left(\frac{a}{q}+z\right) = \Delta_{N,q,a} + 2\pi|z|\Omega_{N,q,a}$ 由③,式⑲和⑳可得

$$I_1(N)\geqslant 0.659N^2r^{-3} - \sum_{j=1}^{5}M_j \tag{21}$$

其中

$$M_1 = \sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}|J_N(z)|^2\sum_{a=1}^{q}{}'\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|dz$$

$$M_2 = \sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}|J_N(z)|\sum_{a=1}^{q}{}'\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|dz$$

$$M_3 = \sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}\sum_{a=1}^{q}{}'\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^3dz$$

$$M_4 = \sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} |J_N(z)|^2 \sum_{a=1}^{q}{}'\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r\right)\mathrm{d}z +$$

$$\sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} |J_N(z)| \sum_{a=1}^{q}{}'\left(\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r\right)^2 +\right.$$

$$\left.2\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r\right)\right)\mathrm{d}z +$$

$$\sum_{1\leq q\leq r^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} \sum_{a=1}^{q}{}'\left(\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r\right)^3 +\right.$$

$$3\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r\right)^2\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right| +$$

$$\left.3\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r\right)\cdot\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|^2\right)\mathrm{d}z$$

$$M_5 = \sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} |J_N(z)|^2 \sum_{a=1}^{q}{}'\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\dot{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}z +$$

$$\sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} |J_N(z)| \sum_{a=1}^{q}{}'\left(\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\dot{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|^2 +\right.$$

$$\left|\frac{2\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\dot{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r +\right.$$

$$\left.\left.\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)\right)\mathrm{d}z + \sum_{1\leq q\leq r^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} \sum_{a=1}^{q}{}'\left(\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\dot{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|^3 +\right.$$

$$3\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\dot{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|^2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r+\right.$$

$$\left.\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right) + 3\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r + \left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)^2\cdot$$

$$\left.\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\dot{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|\right)\mathrm{d}z$$

令 $f_1(x) = 2^{-80}x(\log x)^{-600}$，当 $x \geqslant e^{6\,000}$ 时则由 $f_1(e^{6\,000}) > 1$ 和 $f'_1(x) = 2^{-80}\left(1 - \frac{600}{\log x}\right)\times(\log x)^{-600} \geqslant 0$ 可得 $f_1(x) \geqslant 1$. 所以当 $N \geqslant e^{6\,000}$ 时我们有 $N \geqslant 2^{80}r^{600}$，故有 $\frac{1}{qr} \leqslant \frac{1}{2}N^{-\frac{79}{80}}$，于是当 $N \geqslant e^{6\,000}$ 时由引理 1 可得

$$M_4 = 6\sum_{1\leq q\leq r^3} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)^2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q + \frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q + r\right)\mathrm{d}z+\right.$$

$$\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q^r}}(0.747z^{-1}r^{-1})^2\cdot\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi\mid z\mid N^{\frac{3}{2}}q+r\right)\mathrm{d}z\Big)+$$

$$6\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\mid\mu(q)\mid\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)\left(\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)^2+\right.\right.$$

$$2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi\mid z\mid N^{\frac{3}{2}}q+r\right)(4N+4\pi N^2z)\mathrm{d}z+$$

$$\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q^r}}(0.747z^{-1}r^{-1})\left(\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi\mid z\mid N^{\frac{3}{2}}q+r\right)^2+\right.$$

$$2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi\mid z\mid N^{\frac{3}{2}}q+r\right)(4N+4\pi N^2z))\mathrm{d}z+$$

$$2\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(q)\cdot\int_0^{\frac{1}{q^r}}\mid\left(\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)^3+\right.$$

$$3\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)^2\cdot$$

$$(4N+4\pi N^2z)+3\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r\right)(4N+4\pi N^2z)^2\Big)\mathrm{d}z\leqslant$$

$$(6)(3.54)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{\mid\mu(q)\mid}{q^{0.96}}\left(\left(\frac{1.02N}{r}\right)^2(0.41N^{-\frac{1}{2}}q)+(0.747r^{-1})^2\cdot\right.$$

$$(3.2N^{\frac{3}{2}}q\log r))+6\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\mid\mu(q)\mid\left(\left(\frac{1.02N}{r}\right)(9.3N^{\frac{1}{2}}q+0.19q^2)+\right.$$

$$(0.747r^{-1})(0.17Nqr^{7.5}+5.3N^{\frac{3}{2}}q^{-1}r^{15})\quad\Big)+\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(2q)\cdot$$

$$(0.08N^{\frac{1}{2}}q^{-1}r^{30}+6.7Nq^{-2}r^{30}+66.2N^{\frac{3}{2}}q^{-3}r^{30})\leqslant$$

$$0.000\,1N^2r^{-3} \tag{㉒}$$

令$f_2(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{11.5}}\cdot x(\log x)^{-12}$，当 $x\geqslant\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.502}}$ 时则由 $f'_2(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{11.5}}\cdot\left(1-\frac{12}{\log x}\right)\cdot(\log x)^{-12}\geqslant0$ 和 $f_2(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.502}})>1$ 可得 $x(\log x)^{-12}\geqslant\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.5}}$.所以当 $t\geqslant\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.502}}$ 时由相关文献①中的定理可得

$$\Delta_{t;q,a}\leqslant\frac{0.13q^{\frac{1}{2}}t}{(\log t)^{11.35}}+\int_2^{t(\log t)^{-12}}\frac{y(\log y+2)}{y(\log y)^2}\mathrm{d}y+\int_{t(\log t)^{-12}}^{t}\frac{0.13q^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y}{(\log y)^{12.35}}\leqslant$$

$$0.132q^{\frac{1}{2}}t(\log t)^{-11.35} \tag{㉓}$$

当 $N\geqslant\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.503}}$ 时则由式㉓和 $Nr^{-7}\geqslant\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.502}}$ 可得

① Chen Jingrun, Wang Tianze. On the distribution of primes in an arithmetical progression. Scientia Sinica, to appear.

$$\Omega_{N;q,a} \leqslant \int_2^{Nr^{-7}} q^{\frac{1}{2}} rt\,\mathrm{d}t + \int_{Nr^{-7}}^{N} 0.132 q^{\frac{1}{2}} t(\log t)^{-11.35}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\frac{(1.01)(0.132)N^2 q^{\frac{1}{2}}}{2r^{11.35}} + \frac{N^2 q^{\frac{1}{2}}}{2r^{13}} \leqslant 0.07 N^2 q^{\frac{1}{2}} r^{-11.35} \qquad ㉔$$

当 $r = \log N \geqslant e^{11.503}$ 时,对任何实数 $0 < \triangle < 0.1$ 我们有

$$\left|\int_2^N \frac{e(tz)}{t^{\triangle}\log t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t^{\triangle}\log t} \leqslant \left(\frac{1}{1-\triangle}\right)\left(\frac{N^{1-\triangle}}{r} + \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t^{\triangle}(\log t)^2}\right) \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{1-\triangle}\right)\left(\frac{N^{1-\triangle}}{r} + \left(\frac{1}{1-\triangle}\right)\left(\frac{N^{1-\triangle}}{r^2} + 2\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t^{\triangle}(\log t)^3}\right)\right) \leqslant$$

$$1.111\,3 N^{1-\triangle} r^{-1} \qquad ㉕$$

令 $1 - \widetilde{\beta} = \widetilde{\delta}$,当 $N \geqslant e^{e^{11.503}}$ 时则由式 ⑩,㉓ 到 ㉕,引理 1,相关文献①中的定理 1 我们有

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3} \frac{3|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} |J_N(z)|^2 \sum_{a=1}^{q}{}' \left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\widetilde{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}z \leqslant$$

$$(6)(3.54)^2 \sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\left(\frac{\widetilde{E}q^{\frac{1}{2}}}{q^{1.92}}\right)\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)^2\left(\frac{1.111\,3N^{1-\delta}}{r}\right)\mathrm{d}z +\right.$$

$$\left.\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q^r}}(0.747z^{-1}r^{-1})^2\left(\frac{1.111\,3N^{1-\delta}}{r}\right)\mathrm{d}z\right) \leqslant$$

$$(6)(3.54)^2\Big((1.156\,4N^2r^{-3})\cdot$$

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{\widetilde{E}N^{-\delta}}{q^{1.42}} + (0.620\,2N^2r^{-3})\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{\widetilde{E}N^{-\delta}}{q^{1.42}}\Big) \leqslant$$

$$(133.6N^2r^{-3})\left(\frac{1}{q_0^{1.42}}\right)N^{-\frac{1}{240\log r}}\cdot\sum_{1\leqslant k\leqslant r^3}\frac{1}{k^{1.42}} \leqslant e^{-30}N^2r^{-3} \qquad ㉖$$

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3} \frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}} |J_N(z)| \sum_{a=1}^{q}{}' \left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N \frac{e(tz)t^{\widetilde{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}z \leqslant$$

$$(6)(3.54)^2 \sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\left(\frac{\widetilde{E}}{q^{0.92}}\right)\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)\left(\frac{1.111\,3N^{1-\delta}}{r}\right)^2\mathrm{d}z +\right.$$

$$\left.\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q^r}}(0.747z^{-1}r^{-1})\left(\frac{1.111\,3N^{1-\delta}}{r}\right)^2\mathrm{d}z\right) \leqslant$$

$$(6)(3.54)^2\cdot(6.412)(N^2r^{-3}\log r)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{\widetilde{E}N^{-2\delta}}{q^{0.92}} \leqslant$$

---

① 陈景润,王天泽.关于 L - 函数例外零点的一个定理.数学学报,1989,32(6):841-858.

$$e^{-47.5}N^2r^{-3}$$ ㉗

$$\sum_{1\le q\le r^3}\frac{3|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}|J_N(z)|\sum_{a=1}^{q}{}'\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r+\right.$$

$$\left.\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)\left|\frac{2\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\right|\cdot\left|\int_2^N\frac{e(tz)t^{\hat{\beta}-1}}{\log t}dt\right|dz\le$$

$$(12)(3.54)^2\sum_{1\le q\le r^3}\left(\frac{\widetilde{E}}{q^{0.46}}\right)\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)\cdot\right.$$

$$\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)dz+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q^r}}(0.747z^{-1}r^{-1})\cdot\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+\right.$$

$$\left.\left.r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)\cdot\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)dz\le\right.$$

$$(42.48)(2.781N^2r^{-5.75}\log r)\sum_{1\le q\le r^3}q^{-0.96}\le e^{-19.7}N^2r^{-3}$$ ㉘

$$\sum_{1\le q\le r^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}\sum_{a=1}^{q}{}'\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\hat{\beta}-1}}{\log t}dt\right|^3dz\le$$

$$(2)(3.54)^2\sum_{1\le q\le r^2}\left(\frac{\widetilde{E}}{q^{0.42}}\right)\int_0^{\frac{1}{q^r}}\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)^2dz\le$$

$$(34.44N^2r^{4.6})\sum_{1\le q\le r^3}\frac{\widetilde{E}N^{-3\delta}}{q^{1.42}}\le e^{-13.48}N^2r^{-3}$$ ㉙

$$\sum_{1\le q\le r^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}\sum_{a=1}^{q}{}'(3)\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\hat{\beta}-1}}{\log t}dt\right|^2\cdot$$

$$\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi|z|N^{\frac{3}{2}}q+r+\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)dz\le$$

$$(6)(3.54)\sum_{1\le q\le r^3}(\widetilde{E}q^{0.04})\left(\int_0^{\frac{1}{q^r}}\left(\frac{1.1113N^{1-\delta}}{r}\right)^2\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)dz\right)\le$$

$$(13.13N^2r^{-3})r^{4.85}\sum_{1\le q\le r^3}\widetilde{E}q^{-1.46}N^{-2\delta}\le e^{-11.47}N^2r^{-3}$$ ㉚

$$\sum_{1\le q\le r^3}\int_{-\frac{1}{q^r}}^{\frac{1}{q^r}}\sum_{a=1}^{q}{}'(3)\left|\frac{\widetilde{E}\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e(tz)t^{\hat{\beta}-1}}{\log t}dt\right|$$

$$\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi\mid z\mid N^{\frac{3}{2}}q+r+\left|R_6\left(\frac{a}{q}+z\right)\right|\right)^2\mathrm{d}z\leqslant$$

$$(6)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\left(\widetilde{E}q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1.111\,3N^{1-\delta}}{r}\right)\cdot$$

$$\int_0^{\frac{1}{q^r}}\left(\frac{1}{5}N^{\frac{1}{2}}q+\frac{2}{15}\pi zN^{\frac{3}{2}}q+r+0.132Nq^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}+0.14\pi zN^2q^{\frac{1}{2}}r^{-11.35}\right)^2\mathrm{d}z\leqslant$$

$$(1.778N^2r^{-0.9})\sum_{1\leqslant q\leqslant r}\frac{\widetilde{E}N^{-\delta}}{q^{1.5}}\leqslant \mathrm{e}^{-10.49}N^2r^{-3} \tag{31}$$

当 $N\geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.503}}$ 时则由式㉖到㉛我们有

$$M_5\leqslant(\mathrm{e}^{-30}+\mathrm{e}^{-47.5}+\mathrm{e}^{-19.7}+\mathrm{e}^{-13.48}+\mathrm{e}^{-11.47}+\mathrm{e}^{-10.49})N^2r^{-3}\leqslant 0.000\,1N^2r^{-3} \tag{32}$$

令

$$\Delta_{N,q}^{(j)}=\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a})^j,\Omega_{N,q}^{(j)}=\sum_{a=1}^{q}{}'(\Omega_{N,q,a})^j,1\leqslant j\leqslant 3$$

当 $N\geqslant \mathrm{e}^{6\,000}$ 时则由引理 1 可得

$$M_1\leqslant 6\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{(\varphi(q))^2}\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)^2\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})\mathrm{d}z+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q^r}}(0.747z^{-1}r^{-1})^2\cdot\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})\mathrm{d}z\right\}\leqslant$$

$$\frac{9.6N}{r^2}\sum_{1\leqslant q\leqslant r}\frac{|\mu(q)|\Delta_{N,q}^{(1)}}{(\varphi(q))^2}+\frac{160.1\log r}{r^2}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|\Omega_{N,q}^{(1)}}{(\varphi(q))^2} \tag{33}$$

$$M_2\leqslant(6)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\left(\int_0^{N^{-1}}\left(\frac{1.02N}{r}\right)\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})^2\mathrm{d}z+\int_{N^{-1}}^{\frac{1}{q^r}}(0.747z^{-1}r^{-1})\cdot\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})^2\mathrm{d}z\right)\leqslant$$

$$0.05\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|\Delta_{N,q}^{(2)}}{\varphi(q)}+(88.5r^{14}N^{-2})\cdot\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|\Omega_{N,q}^{(2)}}{q^2\varphi(q)}+\frac{56.4r^{6.5}}{N}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)}\sum_{a=1}^{q}{}'\Delta_{N,q,a}\Omega_{N,q,a} \tag{34}$$

$$M_3\leqslant(2)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\int_0^{\frac{1}{q^r}}\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a}+2\pi z\Omega_{N,q,a})^3\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\left(\frac{2r^{7.5}}{N}\right)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{\Delta_{N,q}^{(3)}}{q}+\left(\frac{124.1r^{30}}{N^4}\right)\sum_{1\leqslant q\leqslant r}\frac{\Omega_{N,q}^{(3)}}{q^4}+$$

$$\left(\frac{18.85r^{12}}{N^2}\right)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{1}{q^2}\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a})^2(\Omega_{N,q,a})+$$

$$\left(\frac{78.96r^{22.5}}{N^3}\right)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{1}{q^3}\sum_{a=1}^{q}{}'(\Delta_{N,q,a})(\Omega_{N,q,a})^2 \qquad ㉟$$

当 $N\geqslant e^{e^{11.503}}$ 时则由 ㉑ 到 ㉔,㉜ 到式 ㉟ 可得

$$I_1(N)\geqslant 0.659N^2r^{-3}-0.000\,2N^2r^{-3}-\frac{9.6N}{r^2}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{0.132q^{\frac{1}{2}}N}{(\varphi(q))r^{11.35}}-$$
$$\left(\frac{160.1\log r}{r^2}\right)\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}\frac{0.07q^{\frac{1}{2}}N^2}{\varphi(q)r^{11.35}}-0.05\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(0.132)^2qN^2r^{-22.7}-$$
$$\frac{88.5r^{14}}{N^2}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(0.07)^2q^{-1}N^4r^{-22.7}-\left(\frac{56.4r^{6.5}}{N}\right)\cdot$$
$$\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(0.132)(0.07)N^3r^{-22.7}-\frac{2r^{7.5}}{N}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(0.132)^3q^{\frac{3}{2}}N^3r^{-34.05}-$$
$$\frac{124.1r^{30}}{N^4}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(0.07)^3q^{-2.5}\varphi(q)N^6r^{-34.05}-$$
$$\frac{18.85r^{15}}{N^2}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(0.132)^2(0.07)\cdot q^{-0.5}N^4r^{-34.05}\varphi(q)-$$
$$\frac{78.96r^{22.5}}{N^3}\sum_{1\leqslant q\leqslant r^3}(0.132)(0.07)^2q^{-1.5}N^5r^{-34.05}\varphi(q)\geqslant$$
$$0.657N^2r^{-3}$$

这样我们就证明了如下的引理：

引理 2 如果奇数 $N\geqslant e^{e^{11.503}}$,则我们有

$$I_1(N)\geqslant 0.657N^2r^{-3}$$

9.3 估计 $I_2(N)$ 所需要的几个引理

引理 3 设 χ 是模 q 的一个原特征,$x\geqslant e^{10\,000}$,$(\log x)^3\leqslant q\leqslant(\log x)^{6.5}$,令$(\log x)^{10}=T$,则有

$$\psi(x,\chi)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)=-\sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leqslant T_1}\frac{x^\rho}{\rho}+R_7$$

其中 $|R_7|\leqslant 1.837\,24x(\log x)^{-8}$,$|T_1-T|\leqslant 1$,$\rho$ 是$L(s,\chi)$的任意一个非显然零点.

证明 与相关文献[①]中的引理 12 相类似即可证得本引理.

引理 4 设 $x\geqslant e^{20\,000}$ 是一个实数,$(\log x)^3\leqslant q\leqslant(\log x)^{6.5}$,则对任何实

① Chen Jingrun, Wang Tianze. On the distribution of primes in an arithmetical progression. Scientia Sinica, to appear.

数 $A \geqslant 1$，函数 $\prod_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi \neq \chi_0}} (s,\chi)$ 在区域

$$1 - \frac{g(A)}{\log\log x} \leqslant \sigma < 1, \ |t| \leqslant (\log x)^A$$

中至多有两对共轭零点，其中

$$g(A) = \frac{3}{4.580\,31A + 30.616\,4} - \frac{0.378}{A + 6.5}$$

证明 设 $\rho_j = \beta_j + \mathrm{i}\gamma_j (j = 1,2,3)$ 是 $\prod_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi \neq \chi_q}} L(s,\chi)$ 的三个零点，其中 $\beta_j = 1 - \frac{b_j}{\log\log x}$，$|\gamma_j| \leqslant (\log x)^A$，$\rho_j \neq \bar{\rho}_k (1 \leqslant j < k \leqslant 3)$. 令 $\sigma = 1 + \frac{0.378}{(6.5 + A)\log\log x}$，则有

$$\begin{aligned}0 \leqslant 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \prod_{j=1}^{3} \left(1 + \mathrm{Re}\frac{\chi_j(n)}{n^{i}\gamma_j}\right) = S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3) + \\ S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\bar{\rho}_3) + S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\bar{\rho}_2,\rho_3) + \\ S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\bar{\rho}_2,\bar{\rho}_3)\end{aligned} \quad ㊱$$

其中

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3) = -\mathrm{Re}\Big(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + \sum_{j=1}^{3} \frac{L'}{L}(\sigma + \mathrm{i}\gamma_j,\chi_j) + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 3} \frac{L'}{L}(\sigma + \mathrm{i}(\gamma_j + \gamma_k),\chi_j\chi_k) + \frac{L'}{L}(\sigma + \mathrm{i}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3),\chi_1\chi_2\chi_3)\Big)$$

我们有

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \leqslant \frac{1}{\sigma - 1} + (0.187\,7)(\sigma - 1) - 0.577\,2 \leqslant \\ \frac{A + 6.5}{0.378}\log\log x - 0.570\,54\end{aligned} \quad ㊲$$

当 $\chi_1\chi_2, \chi_2\chi_3, \chi_1\chi_3, \chi_1\chi_2\chi_3$ 都是非主特征时，则由相关文献①中的引理 2 和引理 4

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma + \mathrm{i}\gamma_j,\chi_j) \leqslant 0.276\,4\log q(2 + (\log x)^A) + d_q + \\ 0.723\,61 - \frac{1}{\sigma - \beta_j}, 1 \leqslant j \leqslant 3\end{aligned} \quad ㊳$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma + \mathrm{i}(\gamma_j + \gamma_k),\chi_j\chi_k) \leqslant \\ 0.276\,4\log q(2 + 2(\log x)^A) + d_q, 1 \leqslant j < k \leqslant 3\end{aligned} \quad ㊴$$

---

① Chen Jingrun, Wang Tianze. On zeros of Dirichlet's L-functions. Chinese quarterly Journal of mathematics, to appear.

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3),\chi_1\chi_2\chi_3)\leqslant 0.2764\log q(2+3(\log x)^A)+d_q \qquad ⑩$$

其中 d_q 的定义见相关文献[①]中的引理 2. 由 ㊲ 到式 ⑩ 易得

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)\leqslant\left(\frac{A+6.5}{0.378}+(7)(0.2764)(A+6.5)\right)\log\log x+(3)(0.72361)+7d_q+(3)(0.2764\log 2)+0.2764\log 3+0.000387-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}\leqslant(4.58031A+30.6164)\log\log x-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j} \qquad ㊶$$

当 $\chi_1\chi_3,\chi_2\chi_3$ 是非主特征，$\chi_1\chi_2=\chi_0$ 时，则 $\chi_1\chi_2\chi_3=\chi_3$. 由 $\chi_1\chi_2=\chi_0$ 易得 $L(\bar{\rho}_2,\chi_1)=L(\tilde{\rho}_1,\chi_2)=0$. 故由相关文献[①] 中的 ㊴ 式可得

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2),\chi_1\chi_2)\leqslant\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma+\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2)-1}+0.0095+0.2764\log(2+2(\log x)^A)+\sum_{p\mid q}\frac{\log p}{p-1}\leqslant\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma-1+\mathrm{i}(\gamma_1+\gamma_2)}+(0.2764A+0.68297)\log\log x+0.38065+e_q \qquad ㊷$$

其中 e_q 的定义见相关文献[①] 中的式 ㊾，又我们有

$$-\operatorname{Re}\frac{L'}{L}(\sigma+\mathrm{i}\gamma_j,\chi_j)\leqslant 0.2764\log q(2+(\log x)^A)+d_q+(2)(0.72361)-\frac{1}{\sigma-\beta_j}-\operatorname{Re}\frac{1}{\sigma+\mathrm{i}r_j-(\beta_k-\mathrm{i}\gamma_k)},1\leqslant j\neq k\leqslant 2 \qquad ㊸$$

当 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}|b_j|\leqslant\sigma-1$ 时则由 ㊲ 到式 ⑩,㊷,㊸ 和相关文献[②]中的引理 11 可得

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)\leqslant\frac{A+6.5}{0.378}\log\log x-0.57054+(3)(0.2764)\cdot\log q(2+(\log x)^A)+6d_q+e_q+(5)(0.72361)+0.38065+(0.2764A+0.68297)\log\log x+0.2764\log 3+(2)(0.2764\log 2)+(3)(0.2764)\log q(2+(\log x)^A)-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j}\leqslant(4.58031A+29.8)\log\log x-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j} \qquad ㊹$$

当 $\chi_1\chi_2=\chi_1\chi_3=\chi_0,\chi_2\chi_3\neq\chi_0$；或 $\chi_1\chi_2\chi_3=\chi_0,\chi_1\chi_2\neq\chi_0,\chi_2\chi_3\neq\chi_0,\chi_1\chi_3\neq\chi_0$；或 $\chi_1\chi_2=\chi_2\chi_3=\chi_1\chi_3=\chi_0$ 时，使用类似的方法可得

$$S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)\leqslant(4.58031A+30.6164)\log\log x-\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\sigma-\beta_j} \qquad ㊺$$

---

① Chen Jingrun, Wang Tianze. On zeros of Dirichlet's L-functions. Chinese quarterly Journal of mathematics, to appear.

② Chen Jingrun. On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions(II). Scientia Sinica, 1979, 22: 859-889.

对于式㊳中的其余三项，有与 $S(\chi_1,\chi_2,\chi_3;\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ 完全相同的估计. 于是由式㊱,㊶,㊹和㊺得到

$$\frac{3}{\frac{0.378}{A+6.5}+\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}\{b_j\}}\leqslant\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{\frac{0.378}{A+6.5}+b_j}\leqslant 4.580\,31A+30.616\,4$$

这就完成了本引理的证明.

引理5 设 $x\geqslant e^{e^{11.3}}$ 是一个实数，a,q 是正整数并且满足 $(a,q)=1$，$(\log x)^3\leqslant q\leqslant(\log x)^{6.5}$，则有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(x;q,l)-\frac{\mu(q)x}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\leqslant 0.006\,52xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-7.5}$$

其中 $\tilde{\chi},\tilde{\beta},\tilde{E},\tau(\tilde{\chi})$ 的定义与⑤式中的相同.

证明 与相关文献①中定理的证明相类似，使用引理3和引理4即可证得本引理.

引理6 在引理5的条件下，如果 $x\geqslant e^{e^{11.302}}$，则我们有

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l)-\frac{\mu(q)\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)}+\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{t^{\tilde{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right|\leqslant$$
$$0.006\,54xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-8.5}$$

证明 令 $\alpha(n)=\alpha(n;q,l)=\begin{cases}0, n\not\equiv l(\bmod q)\\1, n\equiv l(\bmod q)\end{cases}$，则有

$$\pi(x;q,l)=\sum_{2<n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)\alpha(n)}{\log n}-\sum_{\substack{2<n=p^k\leqslant x\\k\geqslant 2}}\frac{\Lambda(n)\alpha(n)}{\log n}$$

所以由

$$\sum_{\substack{3<n=p^k\leqslant x\\k\geqslant 1}}\frac{\Lambda(n)\alpha(n)}{\log n}\leqslant\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)\leqslant 0.721\,4x^{\frac{1}{2}}\log x$$

可得

$$\pi(x;q,l)=\int_2^x\frac{\psi(u;q,l)}{u(\log u)^2}\mathrm{d}u+\frac{\psi(x;q,l)}{\log x}+R_8 \qquad ㊻$$

其中 $|R_8|\leqslant 0.721\,5x^{\frac{1}{2}}\log x$. 用 $e\left(\frac{al}{q}\right)$ 乘式㊻，然后对 l 经过模 q 的简化剩余系求和，则有

① Chen Jingrun, Wang Tianze. On the distribution of primes in an arithmetical progression. Scientia Sinica, to appear.

$$\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l) = \int_2^x \frac{\sum_{l=1}^{q}{}' e(\frac{al}{q})\psi(u;q,l)}{u(\log u)^2}du + \frac{\sum_{l=1}^{q}{}' e(\frac{al}{q})\psi(x;q,l)}{\log x} + \sum_{l=1}^{q}{}' e(\frac{al}{q})R_8 \quad ㊼$$

当 $x \geqslant e^{e^{11.3}}$ 时,则由 ㊼ 式和引理 5 可得

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l) - \frac{\mu(q)\mathrm{Li}(x)}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{u^{\tilde{\beta}-1}}{\log u}du\right| \leqslant$$

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\pi(x;q,l) - \frac{\mu(q)x}{\varphi(q)\log x} - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} + \right.$$

$$\left.\frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)\log x} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\int_2^x \frac{u^{\tilde{\beta}-1}}{(\log u)^2}du\right| + \frac{2}{\varphi(q)\log 2} +$$

$$\frac{3q^{\frac{1}{2}}}{\varphi(q)\log 2} \leqslant 0.006\ 53xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-8.5} +$$

$$\int_2^x \left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(u;q,l) - \frac{\mu(q)u}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})u^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\frac{du}{u(\log u)^2} \quad ㊽$$

令 $g_1(t) = e^{-e^{11.3}} \cdot t(\log t)^{-10}$,当 $t \geqslant e^{e^{11.302}}$ 时则由 $g'_1(t) \geqslant 0$ 和 $g_1(e^{e^{11.302}}) > 1$ 可得 $g_1(t) \geqslant 1$.所以当 $x \geqslant e^{e^{11.302}}$ 时由引理 5 可得

$$\int_2^x \left|\sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{al}{q}\right)\psi(u;q,l) - \frac{\mu(q)u}{\varphi(q)} + \frac{\tilde{E}\tilde{\chi}(a)\tau(\tilde{\chi})u^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}\varphi(q)}\right|\frac{du}{u(\log u)^2} \leqslant$$

$$\int_2^{x(\log x)^{-10}} \frac{u(\log u+2)}{u(\log u)^2}du + \int_{x(\log x)^{-10}}^x \frac{0.006\ 52q^{\frac{1}{2}}u}{u(\log u)^{9.5}}du \leqslant$$

$$0.000\ 01xq^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-8.5} \quad ㊾$$

由式 ㊽ 和 ㊾ 知道本引理能够成立.

9.4 定理的证明

引理 7 如果奇数 $N \geqslant e^{e^{11.303}}$ 则有

$$|I_2(N)| \leqslant 0.075N^2r^{-3}$$

证明 令 $f_3(t) = (e^{-e^{11.302}})t(\log t)^{-3}$,则易知当 $t \geqslant e^{e^{11.303}}$ 时有 $f_3(t) \geqslant 1$.所以当 $N \geqslant e^{e^{11.303}}$ 时有 $Nr^{-3} \geqslant e^{e^{11.302}}$.由 $S(\alpha)$ 的定义可得

$$S(\alpha)=S\left(\frac{a}{q}+z\right)=\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)N_x(l)+R(\alpha,N)$$ ㊿

其中 $N_x(l)=\sum_{\substack{N_r-3\leqslant p\leqslant N\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}}e(pz)$，$|R(\alpha,N)|\leqslant 2Nr^{-4}$. 由于

$$N_x(l)=\sum_{Nr^{-3}\leqslant k\leqslant N}e^{2\pi izk}(\pi(k;q,l)-\pi(k-1;q,l))=$$

$$\sum_{NT^{-3}\leqslant k\leqslant N-1}\pi(k;q,l)(e^{2\pi izk}-e^{2\pi iz(k+1)})+\pi(N;q,l)e^{2\pi izN}-$$

$$\pi(Nr^{-3}-1;q,l)e^{2\pi izNr-3}$$

所以当 $N\geqslant e^{e^{11.303}}$ 时由引理6可得

$$\left|\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\left(N_z(l)-\sum_{Nr^{-3}\leqslant k\leqslant N-1}\left(\frac{\mathrm{Li}(k)}{\varphi(q)}-\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^k\frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)\cdot\right.\right.$$

$$(e^{2\pi izk}-e^{2\pi iz(k+1)})-\left(\frac{\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)}-\frac{\widetilde{E}(\widetilde{\chi})(l)}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)e^{2\pi izN}+$$

$$\left.\left.\left(\frac{\mathrm{Li}(Nr^{-3}-1)}{\varphi(q)}-\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^{Nr^{-3}-1}\frac{t^{\beta-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)\cdot e^{2\pi izNr^{-3}}\right)\right|\leqslant$$

$$\sum_{Nr^{-3}\leqslant k\leqslant N-1}(2\pi|z|)(0.006\ 54q^{\frac{1}{2}})k(\log k)^{-8.5}+0.006\ 54Nq^{\frac{1}{2}}r^{-8.5}+$$

$$0.006\ 54Nr^{-3}q^{\frac{1}{2}}(r-3\log r)^{-8.5}\leqslant 0.021\ 1Nr^{-2.5}$$ ㊿①

当 $N\geqslant e^{e^{11.303}}$ 时则由式㊿和㊿①我们有

$$|S(\alpha)|\leqslant 0.021\ 2Nr^{-2.5}+|T(\alpha)|$$ ㊿②

其中

$$T(\alpha)=\sum_{l=1}^{q}{}'e\left(\frac{al}{q}\right)\left(\sum_{Nr^{-3}\leqslant k\leqslant N-1}\left(\frac{\mathrm{Li}(k)}{\varphi(q)}-\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_0^k\frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)\cdot\right.$$

$$(e^{2\pi izk}-e^{2\pi iz(k+1)})+\left(\frac{\mathrm{Li}(N)}{\varphi(q)}-\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)e^{2\pi izN}-$$

$$\left.\left(\frac{\mathrm{Li}(Nr^{-3}-1)}{\varphi(q)}-\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(q)}\int_2^{Nr^{-3}-1}\frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)e^{2\pi izNr^{-3}}\right)=$$

$$\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\left(\sum_{Nr^{-3}\leqslant k\leqslant N-1}(\mathrm{Li}(k))(e^{2\pi izk}-e^{2\pi iz(k+1)})+\mathrm{Li}(N)e^{2\pi izN}-\right.$$

$$\left.\mathrm{Li}(Nr^{-3}-1)e^{2\pi izNT^{-3}}\right)-\left(\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{NT^{-3}\leqslant k\leqslant N-1}\left(\int_2^k\frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)(e^{2\pi izk}-e^{2\pi iz(k+1)})+\right.$$

$$\left(\int_2^N \frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{2\pi i z N} - \left(\int_2^{Nr^{-3}-1} \frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{2\pi i z N r^{-3}}\Big) =$$

$$\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)\sum_{Nr^{-3}\leqslant k\leqslant N}(\mathrm{Li}(k)-\mathrm{Li}(k-1))\mathrm{e}^{2\pi i z k} -$$

$$\left(\frac{\widetilde{E}\widetilde{\chi}(a)\tau(\widetilde{\chi})}{\varphi(q)}\right)\sum_{Nr^{-3}\leqslant k\leqslant N}\left(\int_2^k \frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t - \int_2^{k-1}\frac{t^{\check{\beta}-1}}{\log t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{2\pi i z k}$$

所以当 $r^3 \leqslant q \leqslant r^{6.5}, N \geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.303}}$ 时由式①和式⑩可得

$$|T(\alpha)| \leqslant \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\int_{Nr^{-3}-1}^N \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{\varphi(q)}\int_{Nr^{-3}-1}^N \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \leqslant 3.65Nr^{-2.38} \qquad ⑬$$

当 $r^3 \leqslant q \leqslant r^{6.5}, N \geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{11.303}}$ 时,则由式⑫和式⑬有

$$|S(\alpha)| \leqslant 0.05Nr^{-2} \qquad ⑭$$

由式⑭和 $\pi(N) \leqslant 1.5Nr^{-1}$ 可得

$$|I_2(N)| \leqslant (\max_{\alpha\in E_2}|S(\alpha)|)\int_0^1 |S(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha \leqslant (0.05Nr^{-2})\pi(N) \leqslant 0.075N^2r^{-3}$$

于是本引理得证.

引理 8 当奇数 $N \geqslant \mathrm{e}^{20\,000}$ 时我们有

$$|I_3(N)| \leqslant 0.31N^2r^{-3}$$

证明 当 $\alpha \in E_3$ 时有 $q \geqslant r^{6.5}$,故当 $N \geqslant \mathrm{e}^{20\,000}$ 时由相关文献①中的定理 1 可得

$$|S(\alpha)| \leqslant 1.2Nr^{0.75}(\log r)(\sqrt{6r^{-6.5}} + \sqrt{r}\mathrm{e}^{-0.5\sqrt{r}}) \leqslant 2.94Nr^{-2.5}\log r \qquad ⑮$$

由式⑮和 $\pi(N) \leqslant 1.5Nr^{-1}$ 可得

$$|I_3(N)| \leqslant (2.94Nr^{-2.5}\log r)\pi(N) \leqslant 0.31N^2r^{-3}$$

这就完成了本引理的证明.

由引理 2,引理 7 和引理 8 可得

$$I(N) \geqslant (0.657 - 0.075 - 0.31)N^2r^{-3} \geqslant 0.272N^2r^{-3}$$

这就完成了本文定理的证明.

① Chen Jingrun. On the estimation of some tri gonometrical sums and their application. Scientia Sinica, 1955, 28: 449-458.

从哈代、李特伍德到潘承洞

第七章

1 "整数分析"的若干问题之表整数为素数之和

——哈代 李特伍德

1.1 导论

哥德巴赫在1742年6月7日给欧拉的一封信中断言，每个偶数2m都是两个奇素数之和，这个命题通常被述为"哥德巴赫的定理"，没有理由感疑这一定理的正确性，而且当 m 大时，表示法的数目亦很大，但是所有企图得到一个证明的证明者都没有成功，事实上，还不能证明每个数(或每个大数，即从某一数往后的任意数)是10个素数，或1 000 000个素数之和，这个问题在最近被认为是"不可克服的科学难关"．①

① E.Landau; 'Geloste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion,' Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, vol.1, 93 - 108(105). This address was reprinted in the Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, vol.21(1912), 208-228.

本文,我们用我们在“堆垒数论”中的新超越方法来处理这个问题,我们给出这个方法的各种应用的一个完备文献目录.

①G. H. HARDY. Asymptotic formulae in combinatory analysis', Comptes rendus du quatrieme Congres des mathematiciens Scandinaves a Stockholm, 1916,45-53.

②G. H. HARDY. On the expression of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five or seven', Proceedings of the National Academy of Sciences, vol.4(1918),189-193.

③G. H. HARDY. Some famous problems of the Theory of Numbers, and in particular Warings Problem, (Oxford, Clarendon Press, 1920,1-34).

④G. H. HARDY. On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five', Transactions of the American Mathematical Society, vol 21(1920),255-284.

⑤G. H. HARDY. Note on Ramanujan's trigonometrical sum Cq(n)', Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol.20(1921),263-271.

⑥G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD. A new solution of Waring's Problem', Quarterly Joumal of pure and applied mathematics, vol.48(1919),272-293.

⑦G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD. Note on Messrs. Shah and Wilson's paper entitled: On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem', Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 19(1919),245-254.

⑧G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD. Some problems of 'Partitio numerorum'; I: A new solution of Waring's Problem', Nachrichten vonder K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1920),33-54.

⑨G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD. Some problems of 'Partitio numerorum'; II: Proof that any large number is the sum of at most 21 biquadrates', Mathematische Zeitschrift, vol.9(1921),14-27.

⑩G. H. HARDY, S. RAMANUJAN. Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n', Comptes rendus de l'Academie des Sciences, 2 Jan. 1917.

⑪G. H. HARDY, S. RAMANUJAN. Asymptotic formulae in combinatory analysis', Proceedings of the London Mathematical Society, ser.2, vol. 17(1918),75-115.

⑫G. H. HARDY, S. RAMANUJAN. On the coefficients in the expansions of certain modular functions', Proceedings of the Royal Society of London(A), vol. 95(1918),144-155.

⑬E. LANDAU. Zur Hardy Littlewood'schen Lösung des Waringschen Problems', Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen(1921),88-92.

⑭L. J. MORDELL. On the representations of numbers as the sum of an odd number

哈代(Hardy, Godfrey Harold, 1877—1947)英国数学家. 生于英国克兰利, 卒于剑桥.

李特伍德(Littlewood, John Edensor, 1885—1977)英国数学家. 生于英格兰罗切斯特, 卒于剑桥.

of squares', Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol.22(1919), 361-372.

⑮A.OSTROWSKI. Bemerkungen zur Hardy · Littlewood schen Lösung des Waringschen Problems', Mathematische Zeitschrift, vol.9(1921),28-34.

⑯S.RAMANUTAN. On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers', Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 22(1918),259-276.

⑰N.M.SHAH, B.M.WILSON. On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem', Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 19(1919),238-244.

我们未解决它:我们甚至未能证明任何数是 1 000 000 个素数之和.为了证明一些东西,我们假定了一个未被证明的猜想是真实的,而即使在这个假定之下,我们亦未能证明哥德巴赫的定理,无论如何,我们证明了这个问题不是"不可克服的",而将它引入解析数论中可认识的方法的范畴中.

我们的主要结果可以述为:若一个猜想(关于黎曼 Zeta 函数零点的黎曼猜想的自然推广)成立,则每个大奇数 n 为三个奇素数之和,而且表示法的数目渐近地等于

$$\overline{N}_3(n) \backsim C_3 \frac{n^2}{(\log n)_3} \prod_p \left(\frac{(p-1)(p-2)}{p^2-3p+3} \right) \tag{①}$$

此处 p 过 n 的所有奇素因子,及

$$C_3 = \Pi\left(1 + \frac{1}{(\omega-1)_3}\right) \tag{②}$$

其中乘积过所有的奇素数 ω.

我们更明确地解释我们猜想的含义,假定 q 是一个正整数,及

$$h = \varphi(q)$$

表示小于 q 且与 q 互素的整数个数,我们用

$$\chi(n) = \chi_k(n), k = 1, 2, \cdots, h$$

表示 h 个模 q 的迪利克雷的"特征"中的一个①:χ_1 为"主"特征②.

我们用 $\overline{\chi}$ 表示 χ 的共轭复数,$\overline{\overline{\chi}}$ 为一个特征.

当 $\sigma > 1$ 时,由

$$L(s) = L(\sigma + \mathrm{i}t) = L(s, \chi) = L(s, \chi_k) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^2}$$

---

① 有关 L – 函数论的记号,我们采用朗道的书"Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" vol.1,book 2,391.往后,我们仅用 q 代替他的 k,k 代替 Z,及用 ω 代替 p 来表示素数.

② 我们未给 L – 函数论的有关部分一个完善的综述,但我们给出的朗道的著作,读者可以从中找到他所需要的全部知识.

定义的函数记为 $L(s,\chi)$. 除作特别声明,模均为 q,记

$$\overline{L}(s) = L(s,\overline{\chi})$$

我们用

$$\rho = \beta + i\gamma$$

表示 $L(s)$ 的一个典型零点,适合 $\gamma = 0, \beta \leqslant 0$ 的诸零点被排除了. 我们称这些零点为非寻常零点,我们记 $N(T)$ 为 $L(s)$ 满足 $0 \leqslant \gamma \leqslant T$ 的零点 ρ 的个数.

黎曼猜想的自然推广为:

猜想 R^*,每个 ρ 的实部均小于或等于 1/2.①

我们将不使用这样强的猜想,我们实际上是假定了猜想 R. 存在一个数 $\Theta < 3/4$ 使 $L(s)$ 的每个 ρ 都满足 $\beta \leqslant \theta$.

这个猜想的假定是我们全部工作的基础;所有本文结果,尽管都是虚幻的,皆依赖于它;②我们将不复述我们定理中的这个条件.

我们假定 Θ 有它的确下界,若 ρ 为 $L(s)$ 的一个复零点,则 $\overline{\zeta}$ 为 $\overline{L}(s)$ 的一个零点. 因此 $1 - \overline{\rho}$ 为 $\overline{L}(1 - s)$ 的零点,故由基本方程③,它也是 $L(s)$ 的零点.

进一步的记号与术语.

本文将引用下列记号.

A 表示一个绝对正常数,但在不同的地方不表示同一常数,B 为仅依赖于量 r 的常数. 诸 O 均表示 $n \to \infty$ 的极限过程,与之有关的常数是 B 型的,而与 O 有关的量除 r 之外,对其他量都是均匀的.

ω 表示一个素数,p(仅与 n 相关联时出现)表示 n 的奇素因子,一般 p 表示整数,若 $q = 1$,则 $p = 0$;否则

$$0 < p < q, (p,q) = 1$$

(m,n) 表示 m 与 n 的最大公因子,m/n 表示 m 可以整除 n;否则记为 $m\nmid n$.

$\Lambda(n), \mu(n)$ 具有数论中的习惯含义,当 $n = \bar{\omega}^m$ 时,$\Lambda(n) = \log \omega$,否则,它等于0,当 n 为 k 个不同的素因子相乘时,$\mu(n) = (-1)^k$,否则它等于0,我们考虑的基本函数为

$$f(x) = \sum_{\bar{\omega}} \log \omega x^{\omega} \tag{③}$$

为了简化我们的公式,我们记

$$e(x) = e^{2\pi i x}, e_q(x) = e\left(\frac{x}{q}\right)$$

---

① 由于下述原因,猜想必须这样叙述:

(i) 并未证明过没有 $L(s)$ 在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间有零点.

(ii) 对应于非原特征的 L - 函数在直线 $\sigma = 0$ 上有零点.

② 很自然地,许多结果的陈述不依赖于这个猜想.

③ 除非特别声明,均指他的 Handbuch.

及

$$c_q(n) = \sum_p e_q(np) \tag{④}$$

若 χ_k 为原特征,则

$$\tau_k = \tau(\chi_k) = \sum_p e_q(p)\chi_k(p) = \sum_{m=1}^{q} e_q(m)\chi_k(m)\text{①} \tag{⑤}$$

这个和有绝对值$\sqrt{q}$.

法雷分割.我们用 Γ 表示圆

$$|x| = e^{-H} = e^{-\frac{1}{n}} \tag{⑥}$$

我们用下面的方法将 Γ 分割为诸弧 $\xi_{p,q}$,它们称为法雷弧,我们考虑阶为

$$1 = [\sqrt{n}] \tag{⑦}$$

的法雷贯,其首末项分别为$\frac{0}{1}$ 与$\frac{1}{1}$,假定$\frac{p}{q}$ 为法雷贯中一项,而$\frac{p'}{q'}$ 与$\frac{p''}{q''}$ 为它的左右相邻项,定义 $j_{p,q}(q > 1)$ 为区间

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q(q+q')}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q(q+q'')}\right)$$

用 $j_{0,1}$ 与 $j_{1,1}$ 表示区间$\left(0, \frac{1}{N+1}\right)$与$\left(1, \frac{1}{N+1}\right)$,这些区间正好填满了(0,1),每个 $j_{p,q}$ 被$\frac{p}{q}$ 分割成两部分,各有长度小于$\frac{1}{qN}$,而不小于$\frac{1}{2qN}$,若将区间 $j_{p,q}$ 看做$\frac{\theta}{2\pi}$ 的变化区间,此处 $\theta = \arg x$,而将两个端点区间合并,则得 Γ 分成诸 $\xi_{p,q}$ 的分割②.

当我们研究弧 $\xi_{p,q}$ 时,记

$$x = e^{\frac{2p\pi i}{q}}X = e_q(p)X = e_q(p)e^{-Y} \tag{⑧}$$

$$Y = \eta + i\theta \tag{⑨}$$

我们的整个工作转为研究 $|x| \to 1, \eta \to 0$ 时,$f(x)$ 的性质,我们皆假定 $0 < \eta \leqslant 1/2$,在 x 在 $\xi_{p,q}$ 上变化时,X 在一个同余弧 $\xi_{p,q}$ 上变化,及

$$\theta = -\left(\arg x - \frac{2p\pi}{q}\right)$$

在区间 $-\theta'_{p,q} \leqslant \theta \leqslant \theta_{p,q}$ 上变化(反方向),显然 $\theta_{p,q}$ 与$\theta'_{p,q}$ 皆小于$\frac{2\pi}{qN}$ 而不小于$\frac{\pi}{qN}$,所以

$$\overline{\theta}_{p,q} = \max(\theta_{p,q}, \theta'_{p,q}) < \frac{A}{qN}$$

---

① 若 $(m,q) > 1$,则 $\chi_k(m) = 0$.
② 分成优弧与劣弧之别,并非开始于此,而始于我们关于华林问题的工作.

在所有情况下，$Y^{-s}=(\eta+\mathrm{i}\theta)^{-s}$ 有其主值

$$\exp(-s\log(\eta+\mathrm{i}\theta))$$

其中(因 η 是正的)

$$-\frac{1}{2}\pi<3\log(\eta+\mathrm{i}\theta)<\frac{1}{2}\pi$$

我们用 $N_r(n)$ 表示将 n 表为 r 个素数之和的表示法，注意更序亦算作不同表示法，则得

$$\sum_{n=2}N_r(n)x^n=\left(\sum_{\omega}x^{\omega}\right)^r \tag{10}$$

我们用 $v_r(n)$ 表示和

$$v_r(n)=\sum_{\omega_1+\omega_2\cdots+\omega_r=n}\log\omega_1\log\omega_2\cdots\log\omega_r \tag{11}$$

故得

$$\sum_{n=2}^{\infty}v_r(n)x^n=(f(x))^r \tag{12}$$

最后，S_r 表示奇异级数

$$S_r=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n)$$

1.2 预备引理

(1) **引理 1** 若 $\eta=(Y)>0$，则

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x) \tag{13}$$

此处

$$f_1(x)=\sum_{(q,n)>1}\Lambda(n)x^n-\sum_{p}\log\omega(x^{\omega^2}+x^{\omega^3}+\cdots) \tag{14}$$

$$f_2(x)=\frac{2}{2\pi\mathrm{i}}\int_{2-\mathrm{i}\infty}^{2+\mathrm{i}\infty}Y^{-s}\Gamma(s)Z(s)\mathrm{d}s \tag{15}$$

其中 Y^{-s} 有其主值.

$$Z(s)=\sum_{k-1}^{n}C_k\frac{L'_k(s)}{L_k(s)} \tag{16}$$

C_k 仅依赖于 p,q 与 χ_k

$$C_1=-\frac{\mu(q)}{h} \tag{17}$$

与

$$|C_h|=\frac{\sqrt{g}}{h} \tag{18}$$

我们得

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x) = \sum_{(q,h)=1} \Lambda(n) x^n =$$

$$\sum_{1 \le j \le q, (i,j)=1} e_q(pj) \sum_{l=0}^{\infty} \Lambda(l_q + j) e^{-(lq+j)Y} =$$

$$\sum_j e_q(pj) \sum_l \Lambda(l_q + j) \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s} \Gamma(s) (l_q + j)^{-s} ds =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Y^{-s} \Gamma(s) Z(s) ds$$

此处

$$Z(s) = \sum_j e_q(pj) \sum_l \frac{\Lambda(l_q + j)}{(l_q + j)^s}$$

因$(q,j) = 1$,我们得

$$\sum_l \frac{\Lambda(l_q + j)}{(l_q + j)^s} = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \chi_k(j) \frac{L'_k(s)}{L_k(s)}$$

因此

$$Z(s) = \sum_{k=1}^{h} C_k \frac{L'_k(s)}{L_k(s)}$$

此处

$$C_k = -\frac{1}{h} \sum_{j=1}^{q} e_q(pj) \overline{\chi_k}(j)$$

因为当$(q,j) > 1$时,$\overline{\chi}_k(j) = 0$,所以条件$(q,j) = 1$既可略去或加以保留.

因此

$$C_1 = -\frac{1}{h} \sum_{1 \le j \le q, (q,j)=1} e_q(pj) =$$

$$-\frac{1}{h} \sum_{1 \le m \le q, (q,m)=1} e_q(m) = -\frac{\mu(q)}{h}$$

又若 $k > 1$,我们有

$$C_k = -\frac{1}{h} \sum_{j=1}^{q} e_q(pj) \overline{\chi_k}(j) = -\frac{\chi_k(p)}{h} \sum_{m=1}^{q} e_q(m) \overline{\chi}_k(m)$$

若 $\overline{\chi}_k$ 为原特征,则

$$\sum_{m=1}^{q} e_q(m) \overline{\chi}_k(m) = \tau(q, \overline{\overline{\chi}}_k)$$

$$|\tau(\overline{q}, \chi_k)| = \sqrt{q}$$

$$|C_k| = \frac{\sqrt{q}}{h}$$

若 χ 为非原特征,则它属于模 $Q = q/d$,此处 $d > 1$.则 $\overline{\chi}_k(m)$ 有周期 Q,及

$$\sum_{m=1}^{q} e_q(m) \chi_k(m) = \sum_{i=1}^{Q} e_q(n) \overline{\chi}_k(n) \sum_{l=0}^{d-1} e_q(lQ)$$

内和为零,所以引理证毕.

(2) **引理 2** 我们有

$$| f_1(x) | < A(\log(q+1))^{A_\eta - \frac{1}{2}} \tag{19}$$

我们有

$$f_1(x) = \sum_{(q,n)>1} \Lambda(n)x^n - \sum_{\omega} \log \omega (x^{\omega^2} + x^{\omega^3} + \cdots) = f_{1\cdot1}(x) - f_{1\cdot2}(x)$$

但是

$$| f_{1\cdot1}(x) | \leqslant \sum_{\omega | q} \log \omega \sum_{r=1}^{\infty} | x^{\omega^r} | <$$
$$A\log(q+1)\log q \sum_{r=1}^{a} | x |^{2n} < A(\log(q+1))^2$$
$$\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\eta 2^r} < A(\log(q+1))^A \log\frac{1}{\eta} < A(\log(q+1))^{A_\eta - \frac{1}{2}}$$

及

$$\sum_{r \geqslant 2, \omega r \leqslant \xi} \log \omega < A\sqrt{\xi}$$

所以

$$| f_{1,2}(x) | \leqslant \sum_{r \geqslant 2, \omega} \log \omega | x |^{\omega^r} < A(1 - | x |)$$
$$\sum_{n} \sqrt{n} | x |^n < A(1 - | x |)^{-\frac{1}{2}} < A\eta^{-\frac{1}{2}}$$

由这两个结果即得引理.

(3) **引理 3** 我们有

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = -\frac{b}{s-1} + \frac{\delta - b}{s} + b' - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+a}{2}\right) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{20}$$

此处

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma'(z)}$$

其中诸 a, δ, S 与 b' 为依赖于 q 与 χ 的常数,而 a 为 0 或 1.

$$b_1 = 1, b_k = 0, k > 1 \tag{21}$$

及

$$0 \leqslant \delta < A\log(q+1) \tag{22}$$

除最后一个外,所有结果都是经典的.

δ 的确切定义是复杂的,在此不引进 δ,我们仅用到 δ 不超过 q 的相异素因子个数,所以适合 ㉒.

(4)① **引理 4** 若 $0 < \eta \leqslant 1/2$,则

$$f(x)=\frac{\mu(q)}{hY}+\sum_{k=1}^{h}C_kG_k+P \tag{23}$$

此处

$$C_k=\sum_{\rho_k}\Gamma(\rho)Y^{-\rho} \tag{24}$$

$$|P|<A\sqrt{q}(\log(q+1))^A\left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h}|b_k|+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{25}$$

$$\delta=\arctan\frac{\eta}{|\theta|}$$

由⑮与⑯,我们有

$$f_2(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)Z(s)ds=$$

$$\sum_{k=1}^{h}\frac{C_k}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'_k(s)}{L_k(s)}ds=$$

$$\sum_{k=1}^{h}C_kf_{2,k}(x) \tag{26}$$

(定义),但是①

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}ds=-\frac{b}{Y}+R+\sum_{\rho}\Gamma(\rho)Y^{-\rho}+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{4}-i\infty}^{-\frac{1}{4}+i\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}ds \tag{27}$$

此处

$$R-\left\{Y-\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}\right\}$$

其中$\{f(s)\}$通常表示$f(s)$在$s=0$处的残数.

现在

$$\frac{L'(s)}{L(s)}=\log\frac{\pi}{Q}+\sum_{v=1}^{c}\frac{\varepsilon_v\log\omega_v}{\omega_v^s-\varepsilon_v}+\sum_{v=1}^{c}\frac{\bar{\varepsilon}_v\log\omega_v}{\omega_v^{1-s}-\varepsilon_v}-$$

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1-s+a}{2}\right)-\frac{\overline{L}'(1-s)}{\overline{L}(1-s)}$$

此处Q为q的因子而是χ的模,c为整除q而不能整除Q的素数个数,$\omega_1,\omega_2,\cdots$为这些素数,及ε_v为一个单位根,因此若$\sigma=-1/4$,则

$$\left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right|<A\log q+Ac\log q+A\log(|t|+2)+A<$$

① 柯西定理的应用可以用$\psi(x)$与$\pi(x)$的"显公式"的经典证明方法来论证,见朗道,333-368.因当$|t|\to\infty$时,恰如$e^{-a|t|}Y^{-s}\Gamma(s)\to 0$,故证明更容易,请比较我们的文章《Contributions tn the theory of the Riemenn Zeta-funcfion and the theory of the distribution of primes》,Acta Math;vol.41(1917),117-196.

$$A(\log(q+1))^A\log(|t|+2) \qquad ㉘$$

又若 $s=\frac{1}{4}+\mathrm{i}t, Y=\eta+\mathrm{i}\theta$,则

$$|Y^{-s}|=|Y|^{\frac{1}{4}}\exp\left(t\arctan\frac{\theta}{\eta}\right)$$

$$|Y^{-s}\Gamma(s)|<A|Y|^{\frac{1}{4}}(|t|+2)^{-\frac{3}{4}}\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\pi-\arctan\frac{|\theta|}{\eta}\right)|t|\right)<$$

$$A|Y|^{\frac{1}{4}}\frac{|t|^{-\frac{1}{2}}}{\log(|\mathrm{e}|+2)}e^{-\delta|v}$$

所以

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\frac{1}{4}-\mathrm{i}\infty}^{-\frac{1}{4}+\mathrm{i}\infty}Y^{-s}\Gamma(s)\frac{L'(s)}{L(s)}\mathrm{d}s\right|<$$

$$A(\log(q+1))^A|Y|^{\frac{1}{4}}\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t<$$

$$A(\log(q+1))^A|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}} \qquad ㉙$$

② 现在考虑 R.因

$$\sum\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)=0, s=0$$

所以

$$R=(b+b')\Gamma(s)_0+\left\{\frac{\delta-b}{s}Y^{-s}\Gamma(s)\right\}-$$

$$\frac{1}{2}\left\{Y^{-s}\Gamma(s)\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)\right\}_0=$$

$$A_1(b+b')-(\delta-b)(A_2+A_3\log Y)+$$

$$C_1(a)+C_2(a)\log Y$$

此处每个 C 为两个绝对常数值中的一个(按照 a 的值) 因

$$0\leqslant b\leqslant 1, 0\leqslant\delta<A\log(q+1), |\log Y|<A\log\frac{1}{\eta}<A\eta^{-\frac{1}{2}}$$

所以

$$|R|<A|b'|+A\log(q+1)\eta^{-\frac{1}{2}} \qquad ㉚$$

由 ㉖,㉗,㉙,㉚ 与 ⑤ 可知

$$f_{2,k}(x)=-\frac{b}{Y}+G_k+P_k$$

$$|P_k|<A(\log(q+1))^A(|b|+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}})$$

$$f_2(x)=-\frac{\mu(q)}{hY}+\sum_k C_kG_k+P \qquad ㉛$$

$$|P| < A\sqrt{q}(\log(q+1))^{A}\left(\frac{1}{h}\sum_{k}|b_k| + \eta^{-\frac{1}{2}} + |Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad ㉜$$

由 ㉛,㉜,⑬ 与 ⑲ 即得引理 4.

(5) **引理 5** 若 $q > 1$ 及 χ_k 为原特征(从而为非主特征),则

$$L(s) = \frac{ae^{bs}}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}\prod_{\rho}\left(\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\right) \qquad ㉝$$

此处

$$a = a(q,\chi) = a_k$$

$$|L(1)| = \pi q^{-\frac{1}{2}}|L(0)|, a = 1 \qquad ㉞$$

$$|L(1)| = 2q^{-\frac{1}{2}}|L'(0)|, a = 0 \qquad ㉟$$

进而言之

$$1-\ominus \leqslant R(\rho) \leqslant \ominus \qquad ㊱$$

与

$$\frac{|L'(1)|}{|L(1)|} < A(\log(q+1))^{A} \qquad ㊲$$

这一引理仅为引理 6 与引理 7 证明中所需结果的综合,它们有很不相同的深度. ㉝ 是经典的. 其余两个可以从 $L(s)$ 的函数方程立刻推出.

不等式 ㊱ 立刻由 $L(s)$ 的函数方程及它没有因子 $1-\varepsilon_{\gamma}\omega_{v}^{-s}$(对于原特征 χ) 而出. 最后, ㊲ 是革隆瓦尔(Gronwall)①证明的.

$$|L(1)| < A\log q\sqrt{\log\log q}$$

朗道还证明(属于海克(Hecke) 的) 了与基本判别式 $-q$ 有关的实特征 $\left(\frac{-q}{n}\right)$ 有

$$\frac{1}{|L(1)|} < A\log q$$

这方面的第一个结果是属于朗道自己的(见'Uber das Nichtverschwinden der Dirichletschen Reihen, welche Komplexen Charackeren entsprechen', Mach, Annalen vol.70(1911),69-78) 朗道在那里证明了,对于复特征 χ 有

$$\frac{1}{|L(1)|} < (\log q)^{5}$$

---

① 见 T.H.Gronwall,'Surlesse'ries de Dirichlet correspondant a des caracteres complexes', Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol.35(1913),145-159. 革隆瓦尔证明了对于每个复特征,当猜想 R(或较弱的猜想) 成立下,对于实特征有

$$\frac{1}{|L(1)|} < A\log q(\log\log q)^{3/8}$$

朗道('Uber die Klassenzahl imaginar quadratischer Zahlkorper', Göttinger Nachrichten, 1918,285-295(p. 286,f.n.2)) 指出,当 χ 为实特征,革隆瓦尔的方法只能得到较弱的不等式.

容易证明(见最后征引的朗道的文章)

$$|L'(1)| < A(\log q)^7$$

所以所有这些结果均比我们需要者更多.

(6)① **引理6** 若 $M(T)$ 表示 $L(s)$ 在

$$0 \leqslant T \leqslant |\gamma| \leqslant T+1$$

中的零点个数,则

$$M(T) < A(\log(q+1))^A \log(T+2) \tag{38}$$

非原特征对应的 $L(s)$ 的 ρ 为对应的模 Q 的原特征的 $L(s)$ 的零点,此处 $Q \mid q$,加上($s=0$ 除外)某函数

$$E_v = 1 - \varepsilon_v \omega_v^{-s}$$

的诸零点,此处

$$|\varepsilon_v| = 1, \omega_v \mid q$$

ω_v 的个数不超过 $A\log(q+1)$,每个 E_v 在 $\sigma = 0$ 上有一个零点集,并有等距

$$\frac{2\pi}{\log \omega_v} > \frac{2\pi}{\log(q+1)}$$

这些零点加于 $M(T)$ 的量小于 $A(\log(q+1))^2$;从而我们仅需考虑一个原特征(因此,当 $q>1$ 时,非主特征)的 $L(s)$.

我们注意到:对于 $L(s)$ 与 $\overline{L}(s)$,a 是一样的;对于实数 s,$L(s)$ 与 $\overline{L}(s)$ 互为共轭,所以对应于 $L(s)$ 的 b' 为对应于$L(s)$ 的 b' 的共轭$\overline{b'}$;$L(s)$ 的典型零点 ρ 或为$\bar{\rho}$,或(由函数方程)为 $1-\rho$,所以

$$S = \sum\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho}\right) = \sum\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\bar{\rho}}\right)$$

为实的.

记住这些注记,首先假定 $a=1$,则由 ㉝ 与 ㉞ 可知

$$\frac{\pi^2}{q} = \left|\frac{L(1)\overline{L}(1)}{L(0)\overline{L}(0)}\right| = Ae^b \prod\left(\left(1-\frac{1}{\rho}\right)e^{\frac{1}{\rho}}\right)e^{\bar{b}} \prod\left(\left(1-\frac{1}{1-\rho}\right)e^{\frac{1}{1-\rho}}\right) = Ae^2$$

这儿用到

$$\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\left(1-\frac{1}{1-\rho}\right) = 1$$

因此

$$|2R(b') + S| < A\log(q+1) \tag{39}$$

另一方面,若 $a=0$,由 ㉝ 与 ㉟ 得

$$\frac{4}{q} = \left|\frac{L(1)\overline{L}(1)}{L'(0)\overline{L}'(0)}\right| = A\left|e^{b'} \prod\left(\left(1-\frac{1}{\rho}\right)e^{-\frac{1}{\rho}}\right)e^{\bar{b}'} \prod\left(1-\frac{1}{1-\rho}\right)e^{\frac{1}{1-\rho}}\right|$$

如前仍可得 ㊴.

② 对于每一非主特征(原特征或非原特征),由 ⑳ 可知

$$\frac{L'(1)}{L(1)} = \delta + b' - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+a}{2}\right) + \sum\left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) \tag{40}$$

特别地，当 χ 为原特征，由 ⑩，㊲ 与 ㉒ 得

$$|R(b) + S| = \left|R\frac{L'(1)}{L(1)} - \delta + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+a}{2}\right)\right| < A(\log(q+1))^A \tag{41}$$

由 ⑩ 与 ㊶ 得

$$S < A(\log(q+1))^A \tag{42}$$

与

$$|R(b)| < A(\log(q+1))^A \tag{43}$$

③ 若 $q > 1$，χ 为原特征(所以 $b = 0$)，及 $s = 2 + \mathrm{i}T$，则由 ⑳，㉑ 与 ㊸ 得

$$\begin{aligned}0 < &\sum\left(\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right) = \\ &R\sum\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) = R\frac{L'(s)}{L(s)} - R\left(\frac{\delta}{s}\right) - \\ &R(b') + \frac{1}{2}R\left(\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)\right) \leqslant \\ &\left|\frac{L'(s)}{L(s)}\right| + \left|\frac{b'}{s}\right| + |R(b)| + \left|\psi\left(\frac{s+a}{2}\right)\right| < \\ &A + A\log(q+1) + A(\log(q+1))^A + \\ &A\log(|T|+2) < A(\log(q+1))^A\log(|T|+2)\end{aligned}$$

$$\sum_{|T-\gamma|<1}\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} < A(\log(q+1))^A\log(|T|+2)$$

左端的每一项皆大于 A，而项数不少于 $M(T)$，故得引理的结果，我们除去 $q = 1$ 的情况，这时的结果是熟知的.

(7)① **引理 7** 我们有

$$|b'| < Aq(\log(q+1))^A \tag{44}$$

首先假定 χ 为非主特征，则由 ⑩ 与 ㊲ 得

$$|b'| < A(\log(q+1))^A + \left|\sum\left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)\right| \tag{45}$$

我们记

$$\sum = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \tag{46}$$

此处 $\sum_1$ 的求和范围为 $1 - \ominus \leqslant R(\rho) \leqslant \ominus$，而 $\sum_2$ 过 $R(\rho) = 0$ 的 ρ 求和，易知 $\sum_1 = S'$，此处 S' 为对应于模 Q 的原特征的 $L(s)$ 所对应的 S，此处 $Q \mid q$，因此由 ㊷ 得

$$\left|\sum\nolimits_1\right| < A(\log(Q+1))^A < A(\log(q+1))^A \tag{47}$$

由于 $\sum_2$ 中的零点 ρ 为

$$\prod_v\left(1-\frac{\varepsilon_v}{\omega_v^s}\right)$$

的零点（$s=0$除外），其中ω_v为q的因子而ε_v为m次单位根，此处$m=\varphi(Q)<q$①；因此ω_v的个数小于$A\log q$及

$$\varepsilon_\gamma=e^{2\pi i\omega'_v}$$

其中$\omega_v=0$或

$$\frac{1}{q}\leqslant|\omega'_v|\leqslant\frac{1}{2}$$

我们用ρ_v表示$1-\varepsilon_v\omega_v^{-s}$的一个零点，用$\rho'_v$表示满足$|\rho_v|\leqslant1$的零点，用$\rho''_v$表示满足$|\rho_v|>1$的一个零点，则

$$\left|\sum_2\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|\leqslant\sum_v\left(\sum_{\rho'}\sum_{\rho''}\right)\left|\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right| \tag{48}$$

任何ρ_v皆有形式

$$\rho_v=\frac{2\pi i(m+\omega'_v)}{\log\omega_v}$$

此处m为一个整数，因此ρ'_v的个数不超过$A\log\omega_v$或$A\log(q+1)$；在我们的和中的对应项的绝对值不超过

$$\frac{A}{|\rho|}<\frac{A\log\omega_v}{|\omega'_v|}<Aq\log(q+1) \tag{49}$$

因此

$$\left|\sum_{\rho'}\right|<Aq(\log(q+1))^2 \tag{50}$$

还有

$$\left|\sum_{\rho''}\right|\leqslant\sum_{\rho''}\left|\frac{1}{\rho(1-\rho)}<\sum_{\rho''}\frac{1}{|\rho|^2}\right|<A(\log\omega_v)^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}<A(\log(q+1))^2 \tag{51}$$

由㊽，㊿与51可知

$$\left|\sum\nolimits_2\right|<Aq(\log(q+1))^4 \tag{52}$$

而由㊻，㊼与52即得引理.

② 我们已经假定χ不是主特征：对于主特征(mod q)，我们有

$$L_1(s)=\prod_{\omega|q}\left(1-\frac{1}{\omega^s}\right)\zeta(s)$$

因$a=0,b=1$，我们得

① 由于(朗道，p482)$\varepsilon_r=X(\omega_v)$，其中$X$的模$Q$的一个特征.

$$\sum_{\omega|q}\frac{\log\omega}{\omega^s-1}+\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{L'_1(s)}{L_1(s)}=\frac{\delta-1}{s}-\frac{1}{s-1}+b'-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}s\right)$$

$$\sum\left(+\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\sum_{\omega|q}\frac{\log\omega}{\omega-1}+\lim_{s=1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)=$$

$$\delta-1+b'-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\sum\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

$$|b'|<A\log(q+1)+\left|\sum\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\right|$$

这对应于㊺,由此可如前加以证明.

(8)① **引理8** 若$0<\eta\leqslant 1/2$,则

$$f(x)=\frac{\mu(q)}{hY}+\sum_{h-1}^{h}C_kG_k+P \qquad ㊾$$

此处

$$G_k=\sum_{\rho k}\Gamma(\rho)Y^{-\rho} \qquad ㊿$$

$$|P|<A\sqrt{q}(\log(q+1))^A(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}}\delta^{-\frac{1}{2}}) \qquad (55)$$

$$\delta=\arctan\frac{\eta}{|\theta|} \qquad (56)$$

这是引理4与引理7的直接推论.

② **引理9** 若$0<\eta\leqslant 1/2$,则

$$f(x)=\varphi+\Phi \qquad (57)$$

此处

$$\varphi=\frac{\mu(q)}{hY} \qquad (58)$$

$$|\Phi|<A\sqrt{q}(\log(q+1))^A(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right) \qquad (59)$$

$$\delta=\arctan\frac{\eta}{|\theta|} \qquad (60)$$

我们有

$$|G_k|\leqslant\sum\nolimits_1|\Gamma(\rho)Y^{-\rho}|+\sum\nolimits_2|\Gamma(\rho)Y^{-\rho}|$$

$$|Y^{-\rho}|=|Y|^{-\beta}\exp\left(\gamma\arctan\frac{\theta}{\eta}\right)<A|Y|^{-\beta} \qquad (61)$$

而在$\sum_{2,1}$中有$|\Gamma(\rho)|<A$.所以

$$\left|\sum\nolimits_{2,1}\right|<A|Y|^{-\beta}\sum\nolimits_{2,1}|\Gamma(\rho)|<$$

$$A|Y|^{-\theta}\sum\nolimits_{2,1}1<A(\log(q+1))^A|r|^{-\theta} \qquad (62)$$

在 $\sum_{2,2}$ 中，$|Y|<A$，及由㊾有

$$\frac{1}{|\rho|}<Aq\log(q+1)$$

所以

$$\left|\sum_{2,2}\right|<A\sum_{2,2}|\Gamma(p)|=A\sum_{2,2}\frac{|I(1+\rho)|}{|\rho|}<$$

$$A\sum_{2,2}\frac{1}{|\rho|}<Aq(\log(q+1))^{A} \quad ㊳$$

由㊶，㊽，㊿，㊷与㊳得

$$|G_k|<A(\log(q+1))^{A}(q+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}})\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)=H_k \quad ㊹$$

及由㊸，㊹，㊺，㊼，㊽与㊹得

$$|\Phi|=\left|\sum_{k=1}^{h}C_kG_k+P\right|<\sum_{k=1}^{h}|C_kG_k|+A\sqrt{q}(\log(q+1))^{A}(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$$

此处 $\sum_1$ 过适合 $|\gamma|\geqslant 1$ 的诸 ρ_k 求和，$\sum_2$ 则过 $|\gamma|<1$ 的 ρ_k 求和，在 $\sum_1$ 中我们有

$$|\Gamma(\rho)Y^{-\rho}|=\Gamma(\beta+i\gamma)\,||Y|^{-\beta}\exp\left(\gamma\arctan\frac{\theta}{\eta}\right)|\leqslant A|\gamma|^{\beta-\frac{1}{2}}|Y|^{-\beta}$$

$$\exp\left(-\left(\frac{1}{2}\pi-\arctan\frac{|\theta|}{\eta}\right)|\gamma|\right)\leqslant A|\gamma|^{\theta-\frac{1}{2}}|Y|^{\theta}e^{-\delta|\gamma|}$$

（因 $|Y|<A$，及由猜想 R，$\beta\leqslant\theta$）由㊳可知 $|\gamma|$ 介于 T 与 $T+1(T\geqslant 0)$ 中的 ρ 的个数 $M(T)$ 不超过 $A(\log(q+1)^{A}\log(T+2))$. 因此

$$\sum_1|\gamma|^{\theta-\frac{1}{2}}e^{-\delta|\gamma|}\leqslant A(\log(q+1))^{A}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\theta-\frac{1}{2}}=$$

$$\log(n+2)e^{-\delta n}<A(\log(q+1))^{A}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)$$

$$\sum|-\Gamma(p)Y^{-\rho}|<A(\log(q+1))^{A}|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right) \quad ㊺$$

③ 再由㊳，$\sum_2$ 最多含有 $A(\log(q+1))^{A}$ 项. 记

$$\sum_2=\sum_{2,1}+\sum_{2,2} \quad ㊻$$

$\sum_{2,1}$ 过适合 $1-\theta\leqslant\beta\leqslant\theta$ 的零点，而 $\sum_{2,2}$ 则过 $\beta=0$ 的零点，在 $\sum_2$ 中有小于

$$\frac{\sqrt{q}}{h}\sum_{k=1}^{h}H_k+A\sqrt{q}(\log(q+1))^{A}(q+\eta^{-\frac{1}{2}}+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\delta}+2\right))<$$

$$A\sqrt{q}(\log(q+1))^{A}(q+\eta^{-\frac{1}{2}})+|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta}+2\right)$$

㊾证完.

(9) **引理 10**　我们有

$$h = \varphi(q) > Aq(\log q)^{-A} \tag{67}$$

事实上,我们有

$$\varphi(q) > (1-\delta)e^{-C}\frac{q}{\log\log q},(q > q_v(\delta))_\gamma$$

此处 δ 为任意正数,C 为欧拉常数.

1.3　主要定理的证明

(1)① **定理 A**　若 r 为一个整数大于等于 3,及

$$(f(x))^r = \sum v_r(n)x^n \tag{68}$$

于是

$$v_r(n) \sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n} \log\omega_1\log\omega_2\cdots\log\omega_r \tag{69}$$

则

$$v_r(n) = \frac{n^r-1}{(r-1)!}S_r + O(n^{r-1+(\theta-\frac{3}{4})}(\log n)^B) \backsim \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}S_r \tag{70}$$

此处

$$S_r = \sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n) \tag{71}$$

有这样的了解,今后与 O 有关的常数仅依赖于 r,而它表示 $n\to\infty$ 的极限过程.

有 $n \geqslant 2$,则得

$$v_r(n) = \frac{1}{2\pi i}\int(f(x))^r\frac{dx}{x^n+1} \tag{72}$$

积分路径为圆 $|x| = e^{-H}$,此处 $H = \frac{1}{n}$,所以

$$1-|x| = \frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \backsim \frac{1}{n}$$

用阶为 $N = [\sqrt{n}]$ 的法雷分割,得

$$v_r(n) = \sum_{q=1}^{N}\sum_{p<p,(p,q)=1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta_{p,q}}(f(x))^r\frac{dx}{x^n+1} =$$

$$\sum e_q(-np)\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta_{p,q}}(f(x))^r\frac{dX}{X^n+1}\sum e_q(-np)j_{p,q} \tag{73}$$

由于

$$|f^r-\varphi^r| \leqslant \Phi(|f^{r-1}|+|f^{r-2}\rho|+\cdots+|\varphi^{r-1}|) <$$
$$B(|\Phi f^{r-1}|+|\Phi\varphi^{r-1}|)$$

及 $|X^{-n}| = e^{n+1} < A$，所以

$$j_{p,q} = l_{p,q} + m_{p,q} \tag{74}$$

此处

$$l_{p,q} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta_{p,q}} \varphi^r \frac{dX}{X^n + 1} \tag{75}$$

$$|m_{p,q}| = 0\left(\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} (|\Phi f^{r-1}| + |\Phi\varphi^{r-1}| d\theta)\right) \tag{76}$$

② 我们有 $\eta = H = \frac{1}{n}$ 及 $q \leqslant \sqrt{n}$，故由 ⑲ 有

$$|\Phi| < An^{\frac{3}{4}}(\log n)^A + A(\log n)^A\sqrt{q}\,|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta} + 2\right) \tag{77}$$

此外 $\delta = \arctan \eta/|\theta|$. 我们分两种情况来讨论. 若 $|\theta'| \leqslant \eta$，则

$$|Y| > A\eta, \delta > A$$

及

$$\sqrt{q}\,|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta} + 2\right) < An^{\frac{1}{4}}\eta^{-\theta} = An^{\theta+\frac{1}{4}} \tag{78}$$

若 $\eta < |\theta'| \leqslant \bar{\theta}'_{p,q}$，则由于 $q|\theta'| \leqslant q\bar{\theta}'_{p,q} < An^{-1/2}$，所以

$$\delta > A\frac{\eta}{|\theta'|} > \frac{A}{n}, |Y| > A|\theta'|$$

$$\sqrt{q}\,|Y|^{-\theta}\delta^{-\theta-\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{\delta} + 2\right) < A\sqrt{q}$$

$$|\theta'|^{-\theta} \cdot \eta^{-\theta-\frac{1}{2}}|\theta'|^{\theta+\frac{1}{2}} \cdot \log n = An^{\theta+\frac{1}{2}}\log n(q|\theta'|)^{\frac{1}{2}} < An^{\theta+\frac{1}{2}}\log n \cdot n^{-\frac{1}{4}} = An^{\theta+\frac{1}{4}}\log n \tag{79}$$

故对任何情况皆有 ⑲. 由于 $\theta \geqslant 1/2$ 及由 ⑰ 可知

$$|\Phi| < An^{\theta+\frac{1}{4}}(\log n)^A \tag{80}$$

③ 注意 $r \geqslant 3$，所以

$$\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |\varphi|^{r-1}d\theta < Bh^{-(r-1)}$$

$$\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |Y|^{-(r-1)}d\theta < Bh^{-(r-1)}$$

$$\int_0^{\infty}(\eta^2 + \theta^2)^{-\frac{1}{2}(r-1)}d\theta < Bh^{-(r-1)}n^{r-2}$$

故由 ⑳ 与 ⑰ 可知

$$\sum_{p,q}\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |\Phi\varphi^{r-1}|\,d\theta < Bn^{r-2}(\max|\Phi|)$$

$$\sum_q h^{-(r-2)} < Bn^{r-2+\theta+\frac{1}{4}}(\log n)^B = Bn^{r-1+(r-\frac{3}{4})}(\log n)^B \qquad ⑧①$$

④ 若 $\arg x = \psi$，则得

$$\sum\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |f|^2 d\theta = \int_0^2 |f|^2 d\psi =$$

$$2\pi\sum_{\omega}(\log\omega)^2 |x|^{2\omega} < A\sum_{m=2}\log mA(m)|x|^{2m} <$$

$$A(1-|x|^2)\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{m}\log kA(k)\right)|x|^{2m} <$$

$$A(1-|x|)\sum_{m=2}^{\infty} m\log m|x|^{2m} <$$

$$\frac{A}{1-|x|}\log\left(\frac{1}{1-|X|}\right) < An\log n$$

类似地

$$|f| \leqslant \sum_{\omega}\log\omega|x|^{\omega} < \sum_m A(m)|x|^m < \frac{A}{1-|x|} < An$$

因此

$$\sum_{p,q}\int_{-\theta'_{p,q}}^{\theta_{p,q}} |f|^{r-1}|\Phi| d\theta \leqslant \max|\Phi f^{-3}|\int_0^2|f|^2 d\psi <$$

$$Bn^{r+\frac{1}{4}}\log n\cdot n^{r-3}\cdot n\log n < Bn^{r-1+(\theta-\frac{3}{4})}(\log n)^B \qquad ⑧②$$

由 ⑦③,⑦④,⑦⑥,⑧① 与 ⑧② 得

$$v_r(n) = \sum e_q(-np)l_{p,q} + O(n^{r-1+(\theta-\frac{3}{4})}(\log n)^K) \qquad ⑧③$$

此处 $l_{p,q}$ 由 ⑦⑤ 定义.

⑤ 在 $l_{p,q}$ 中，我们记 $X = e^{-Y}$，$dX = -e^{-Y}dY$，则 Y 沿直线由 $\eta + i\theta_{p,q}$ 变至 $\eta - i\theta'_{p,q}$，所以由 ⑤⑧ 与 ⑦⑤ 得

$$l_{p,q} = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\mu(q)}{h}\right)^r\int_{\eta+i\theta_{p,q}}^{\eta-i\theta'_{p,q}} Y^{-r}e^{nY}dY \qquad ⑧④$$

现在

$$-\int_{\eta+i\theta_{p,q}}^{\eta-i\theta'_{p,q}} = \int_{\eta-i\infty}^{\eta-i\infty} Y^{-r}e^{nY}dY + O\left(\int_{\theta_q}^{\infty}|\eta+i\theta|^{-r}d\theta\right) =$$

$$2\pi i\frac{n^{r-1}}{(r-1)!} + O\left(\int_{\theta_q}^{\infty}|\eta+i\theta|^{-r}d\theta\right) \qquad ⑧⑤$$

此处

$$\theta_q = \min_{p<q}(\theta_{p,q}, \theta'_{p,q}) \geqslant \frac{1}{2qN}$$

又有

$$\int_{\theta_q}^{\infty}(\eta+\mathrm{i}\theta)^{-r}\mathrm{d}\theta < \int_{\theta_q}^{\infty}\theta^{-r}\mathrm{d}\theta < B\theta_q^{1-r} < B(q\sqrt{n})^{r-1} \tag{85}$$

⑭,⑮与⑯可知

$$\sum \mathrm{e}_q(-np)l_{p,q} = \frac{n^{t-1}}{(r-1)!}$$

$$\sum_{p,q}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r \mathrm{e}_q(-np) + Q \tag{87}$$

此处

$$|Q| < B\sum_{p,q}h^{-r}q^{r-1}n^{\frac{1}{2}(r-1)} < Bn^{\frac{1}{2}(r-1)}$$

$$\sum_{q}\left(\frac{q}{h}\right)^{r-1} < Bn^{\frac{1}{2}(r-1)}$$

$$\sum_{q-1}^{N}(\log q)^B < Bn^{\frac{1}{2}r}(\log n)^B \tag{88}$$

因 $r\geqslant 3$ 及 $\theta\geqslant 1/2$，$\frac{1}{2}r < r-1-\frac{1}{4} < r-1+\left(\theta-\frac{3}{4}\right)$，及由⑬，⑯与⑱得

$$v_r(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}\sum_{p,q}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r e_q(-np) + O(n^{r-1+(\theta-\frac{3}{4})}(\log n)^B) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}\sum_{q\leqslant N}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n) + O(n^{r-1+(\theta-\frac{3}{4})}(\log n)^B)$$

⑥ 为了完成定理A的证明，我们仅需证明⑲中有限级数可以换成 S_r，由于

$$\frac{1}{2}r < r-1+(\theta-3/4)$$

及

$$\left|n^{r-1}\sum_{q>N}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n)\right| < Bn^{r-1}\sum_{q>N}q^{1-r}(\log q)^B < Bn^{\frac{1}{2}}(\log n)^B$$

因此这个误差可以吸收在⑲的第二项之中. 定理证完.

(2) 奇异级数求和.

① **引理 11** 若

$$c_q(n) = \sum e_q(np) \tag{90}$$

此处 n 为一个正整数，求和范围为小于 q 且与 q 互素的所有正整数 p；当 $q=1$ 时，$p=0$ 包在内，否则不包在内，则

$$c_q(-n) = c_q(n) \tag{91}$$

$$c_{qq'}(n) = c_q(n)c'_q(n) \tag{92}$$

此处$(q,q')=1$;及

$$c_q(n)=\sum\delta_\mu\left(\frac{q}{\delta}\right) \tag{93}$$

此处δ为q与n的公因子.

对应于p与$q-p$的项是共轭的,所以$c_q(n)$是实的,由于$c_q(n)$与$c_q(-n)$为互为共轭的,故得 ⑦①.

又可知

$$c_q(n)c'_q(n)=\sum_{p,p'}\exp\left(2n\pi i\left(\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}\right)\right)=\sum_{p,p'}\exp\left(\frac{2nP\pi i}{qq'}\right)$$

此处

$$P-pq'+p'q$$

当p过$\varphi(q)$个正的,与q互素,且关于模q互不同余的整数,而p'过模q'的类似集合时,则P过一个$\varphi(q)\varphi(q')=\varphi(qq')$个值的集合,其元素为正的,与$qq'$互素,且关于模$qq'$互不同余,故得 ⑨②.

最后,显然有

$$\sum_{d\mid q}c_d(n)=\sum_{h=0}^{q-1}e_q(nh)$$

除去$q\mid n$,它等于q之外,均取值0,因此若记

$$\eta(q)=q(q\mid n),\eta(q)=(qxn)$$

则得

$$\sum_{d\mid q}c_d(n)=\eta(q)$$

所以由熟知的麦比乌斯反转公式,得

$$c_q(n)=\sum_{d\mid q}\eta(d)\mu\left(\frac{q}{d}\right)$$

这就是 ⑨③②

② **引理 12** 假定$r\geqslant 2$及

$$S_r=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^r c_q(-n) \tag{94}$$

则当n与r奇偶相异时

$$S_r=0 \tag{95}$$

否则

---

① 若$q=1$或$q=2$,则推理有误;但$c_1(n)=c_1(-n)=1$,$c_2(n)=c_2(-n)=-1$.

② 公式 ⑨③ 是拉马努金证明的('θn certain trigonometrical Sums and their applications in the theory of numbers' Trans. Camb. Phil. Soc; vol.22(1918),259-276(p260)).朗道已给出 n = 1 时的结果(Handbuch (1909) 572: 朗道将它当作已知结果),一般情况则是耶申(Jensen)证明的('Et nyt Udtryk for den talteoretiske Funktion $\sum\mu(n)=M(n)$', Den 3 Skand. Mate. Kongres, Kristiania(1915),145).拉马努金给出这个和很多漂亮的应用,所以可以用其名字来命名这个和.

$$S_r = 2C_r \prod_p \left(\frac{(p-1)^r + (-1)^r (p-1)}{(p-1)^r - (-1)^r} \right) \quad ⑯$$

此处 p 表示 n 的奇素因子及

$$C_r = \prod_{\omega=3}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^r}{(\omega-1)^r} \right) \quad ⑰$$

命

$$\left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \right)^r c_q(-n) = A_q \quad ⑱$$

则当 $(q, q') = 1$ 时

$$\mu(qq') = \mu(q)\mu(q'), \varphi(qq') = \varphi(q)\varphi(q')$$

$$c_{q,q'}(-n) = c_q(-n)c'_q(-n)$$

所以(在相同假定下)

$$A_{qq'} = A_q A_{q'} \quad ⑲$$

因此①

$$S_r = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = 1 + A_2 \cdots = \prod_{\omega} \chi_{\omega}$$

此处

$$\chi_{\omega} = 1 + A_{\omega} + A_{\omega}^2 + A_{\omega}^3 + \cdots = 1 + A_{\omega} \quad ⑳$$

这是由于因子 $\mu(q)$,所以 $A_{\omega}^2, A_{\omega}^3, \cdots$ 都等于 0.

③ 若 $\omega \mid n$,则

$$\mu(\omega) = -1, \varphi(\omega) = \omega - 1, c_{\omega}(n) = \mu(\omega) = -1$$

$$A_{\omega} = -\frac{(-1)^r}{(\omega-1)^r} \quad (101)$$

若另一方面 $\omega \mid n$,则

$$c_{\omega}(n) = \mu(\omega) + \omega\mu(1) = \omega - 1$$

$$A_{\omega} = \frac{(-1)^r}{(\omega-1)^{r-1}} \quad (102)$$

因此

$$S_r \prod_{\omega | n} \left(1 + \frac{(-1)^r}{(\omega-1)^{r-1}} \right)$$

$$\prod_{\omega \nmid n} \left(1 - \frac{(-1)^r}{(\omega-1)^r} \right) \quad (103)$$

若 n 为偶及 r 为奇,则由 $\widetilde{\omega} = 2$ 对应的因子可知第一个因子为零;若 n 为奇

① 因 $|c_q(n)| \leqslant \sum \delta$,此处 $\delta \mid n$,所以 $c_q(n) = O(1)$(当 n 固定及 $q \to \infty$),又由引 10 可知 $\varphi(q) > Aq(\log q)^{-A}$,因此我们研究的级数与乘积是绝对收敛的.

及 r 为偶,则类似,第二个因子为零,故当 n 与 r 奇偶相异时有 $S_r=0$.

若 n 与 r 奇偶相同时,$\omega=2$ 对应的因子恒等于 2;及如引理所示

$$S_r=2\prod_{\omega=3}\left(1-\frac{(-1)^r}{(\tilde{\omega}-1)^r}\right)\prod_p\left(\frac{(p-1)^r+(-1)^r(p-1)}{(p-1)^r-(-1)^r}\right)$$

最后公式的证明.

(3) **定理 B** 假定 $r\geqslant 3$,则当 n 与 r 奇偶相异时有

$$v_r(n)=0(n^{r-1}) \tag{104}$$

但当 n 与 r 奇偶相同时有

$$v_r(n)\backsim\frac{2Cr}{(r-1)!}n^{r-1}\prod_p\left(\frac{(p-1)^r+(-1)^r(p-1)}{(p-1)^r-(-1)^r}\right) \tag{105}$$

此处 p 为 n 的奇素因子及

$$C_r=\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^r}{(\tilde{\omega}-1)^r}\right) \tag{106}$$

这可以由定理 A 及引理 12 直接推出来.

(4) **引理 13** 若 $r\geqslant 3$ 及 n 与 r 奇偶相同,则当 $n\geqslant n_0(r)$ 时有

$$v_r(n)>Bn^{r-1}$$

在证明定理 C 时要用到这条引理,若 r 为偶数,则

$$\prod\left(\frac{(p-1)^r+p-1}{(p-1)^r-1}\right)>1$$

若 r 为奇数,则

$$\prod\left(\frac{(p-1)^r-p+1}{(p-1)^r+1}\right)>\prod\left(\frac{(p-1)^r-p}{(p-1)^r}\right)^r>$$
$$\prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1-\frac{\omega}{(\omega-1)^s}\right)=\mathrm{A}$$

在任何情况下,由 ⑩⑤ 可得引理之结论.

(5) **定理 C** 若 $r\geqslant 3$ 及 n 与 r 奇偶相同,则

$$N_r(n)\backsim\frac{v_r(n)}{(\log n)^r} \tag{107}$$

首先可见

$$N_r(n)=\sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n}1\leqslant\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_r=n}1\leqslant Bn^{r-1}1$$

及

$$v_r(n)=\sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n}\log\omega_1\cdots\log\omega_r\leqslant$$
$$(\log n)^rN_r(n)<Bn^{r-1}(\log n)^r \tag{108}$$

记

$$v_r = v'_r + v''_r, N_r = N'_r + N''_r \tag{109}$$

此处 v'_r 与 N'_r 包含求和中适合于

$$\omega_s \geqslant n^{1-\delta} \quad ,0 < \delta < 1, s = 1,2,\cdots,r$$

的所有项,则显然

$$v'_r(n) \geqslant (1-\delta)^r (\log n)^r N'_r(n) \tag{110}$$

又可知

$$N''_r(n) \leqslant r\sum_{\omega_2<n} 1-\delta\Big(\sum_{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r=n} 1\Big) <$$

$$B\sum_{\omega r<n} 1-\delta N_{r-1}(n-\omega_r) < Bn^{1-\delta}\cdot n^{r-2} < Bn^{r-1-\delta}$$

$$v''_r(n) \leqslant (\log n)^r N''_r(n) < Bn^{r-1-\delta}(\log n)^r$$

但当 $n \geqslant n_0(r)$ 时,$v_r(n) > Bn^{r-1}$(引理13),所以对于每一正数 δ 皆有

$$(\log n)^r N''_r(n) = o(v_r(n))$$

$$v''_r(n) = o(v_r(n)) \tag{111}$$

由 ⑩⑧,⑩⑨,⑪⓪ 与 ⑪① 可知

$$(1-\delta)^r(\log n)^r(N_r - N''_r) \leqslant v_r - v''_r \leqslant (\log n)^r N_r$$

$$(1-\delta)^r(\log n)^r N_r \leqslant v_r + 0(v_r) \leqslant (\log n)^r N_r$$

$$(1-\delta)^r \leqslant \lim \frac{v_r}{(\log n)^r N_r}, \overline{\lim} \frac{v_r}{(\log n)_r N_r} \leqslant 1$$

因 δ 是任意的,故得 ⑩⑦.

(6) **定理 D** 每个大奇数 n 都是三个奇素数之和,表示法个数 $\overline{N}_3(n)$ 的渐近公式为

$$\overline{N}_3(n) \backsim C_3 \frac{n^2}{(\log n)^3} \prod\left(\frac{(p-1)(p-2)}{p^2-3p+3}\right) \tag{112}$$

此处 p 为 n 的一个素因子及

$$C^3 = \prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1+\frac{1}{(\omega-1)^3}\right) \tag{113}$$

这几乎是定理 B 与 C 的直接推论,这些定理给出 $N_3(n)$ 的对应公式,若非所有素数为奇的,则必两个为 2 及 $n-4$ 为素数,这种表示法的个数最多只有一个.

定理 E 每个大偶数 n 为四个奇素数之和(自然地,其中的一个可以预先确定),表示法的总数有渐近公式

$$\overline{N}_4(n) \backsim \frac{1}{3} C_4 \frac{n^3}{(\log n)^4}$$

$$\prod\left(\frac{(p-1)(p^2-3p+3)}{(p-2)(p^2-2p+2)}\right) \tag{114}$$

此处 p 为 n 的一个奇素数因子及

$$C_4 = \prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(\omega - 1)^4}\right) \quad ⑮$$

这也是这两条定理的推论，我们仅需注意着，非全为奇素数的四个素数和的表示法的总和为 $O(n)$，对于更大的 r，我们有完全类似的结果.

1.4 关于"哥德巴赫定理"的注记

(1) 当 $r = 2$ 时，我们的方法失败了，但对于主项，它没有失败，因它得到一个看来是正确的结果；但即使假定 $\theta = \frac{1}{2}$，我们亦不能克服证明中的难点. 我们能得到的最佳误差上界估计亦嫌大，略言之，大了一个因子 $n^{\frac{1}{4}}$.

由我们的方法可以得到的公式包含于

猜想 A 每个大偶数为两个奇素数之和. 表示法的个数的渐近公式为

$$N_2(n) \backsim 2C_2 \frac{n}{(\log n)^2}\prod_{p}\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \quad ⑯$$

此处 p 为 n 的一个奇素因子及

$$C_2 = \prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(\omega - 1)^2}\right) \quad ⑰$$

我们说几句关于这个公式的历史的话，其真实性由经验检证①.

这种性质的第一个确切结果是属于西尔怀斯特(Sylvester)②的，他在 1871 发表于 proceedings of London Mathematical Society 上的一篇短文中建议

$$N_2(n) \backsim \frac{2n}{\log n}\prod\left(\frac{\omega-2}{\omega-1}\right) \quad ⑱$$

此处

$$3 \leqslant \omega < \sqrt{n}, \omega/n$$

由于

$$\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(\frac{\omega-2}{\omega-1}\right) = \prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{(\omega-1)^2}\right)$$

$$\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \backsim C_2\prod_{\omega<\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)$$

及③

---

① 关于"哥德巴赫定理"较早的历史，见狄克逊. Historg of the theory of Numbers, vol. 1(Washington 1919), 421-425.

② J. J. Sye. vester, On the partition of an even number into two primes', Proc. London Math. Soc., ser. 1. vol. 4(1871), 4-6 (Math. Papers, vol. 2, 709-711). See also'On the Goldbach-Euler Theorem regarding prime numbers', Nature, vol. 55(1896 - 7).

③ 196-197, 269(Math. papers, vol. 4, 734-737), 关于西尔怀斯特文章的知识与剑桥大学三一学院的威尔逊(Wilson)先生有关. 见 Shah 与 Wilson(1), 及哈代与李特伍德(2).

$$\prod_{\omega\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\backsim\frac{2e^{-C}}{\log n} \qquad (119)$$

此处 C 为欧拉常数,(118) 等价于

$$N_2(n)\backsim 4e^{-C}C_2\frac{n}{(\log n)^2}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \qquad (120)$$

这与 (116) 相矛盾,这两个公式相差一个因子 $2e^{-C}=1.123\cdots$,我们将证明 (116) 是这种类型公式中唯一可能正确者,所以西尔怀斯特公式是错误的,但西尔怀斯特是第一个找到与 $N_2(n)$ 不规则性有关的因子

$$\prod\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \qquad (121)$$

者,但没有充分证据来表明他是如何得到他的结果的.

1896 年,史泰克尔①(Stackel) 建议了一个完全不同的公式

$$N_2(n)\backsim\frac{n}{(\log n)^2}\prod\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

这个公式中没有引进因子 (121),而且事实上并未给出好的逼近;1900 年,朗道②证明无论如何这个公式也是不对的.

在 1915 年,麦尔林(Merlin)③有一篇关于哥德巴赫定理的未完成的论文,麦尔林未给出一个完全的渐近公式,但他亦认识到(如西尔怀斯特一样) 因子 (121) 的重要性.

差不多同一时间,布朗④ 研究了这个问题,由布朗方法很自然地得到公式

$$N_2(n)\backsim 2Hn\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \qquad (122)$$

此处

$$H=\prod_{3\leq\omega\leq\sqrt{n}}\left(1-\frac{2}{\omega}\right) \qquad (123)$$

很容易证明它等价于

$$N_2(n)\backsim 8e^{-2r}C_2\frac{n}{(\log n)^2}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \qquad (124)$$

它与 (116) 相差一个因子 $4e^{-2C}=1.263\cdots$ 的论证将表明如同西尔怀斯特公式一样,这个公式也是不正确的.

---

① P.Stackel, 'Über Goldbach's empirisches' Theorem: Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden', Göttinger Nachrichten, 1896, 292-299.

② E.Landau. 'Über die zahlentheoretische Funktion φ(n) und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz', Göttinger Nachrichten, 1900, 177-186.

③ J.Merlin, 'Un travail sur les nombres premiers', Bulletin des sciencs mathematiques, vol.39(1915), 121-136.

④ V.Brun, Über das Goldbachsche Gesatz und die Anzahl der primzahlpaare', Archiv for Mathematik(Christiania), vol.34, part 2(1915), no.8, 1-15. 公式 (124) 实际上并非布朗形成的;见 Shahand Wilson(1),及 Hardy and Littlewood(2) 的讨论,亦见布朗的第二篇文章,'Sur les nombres premiers de laforme ap + b, ibid; part 4(1917) no.14, 1-9;及本文之附录.'

最后，在 1916 年，斯泰克尔在发表于 Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 上的一系列论文上，又回到这个主题，直到最近我们尚未论及，在我们文章的最后注记中将给出关于这些文章的进一步注记.

(2) 今往证明我们的结论，即 ⑫⑩ 与 ⑫④ 是不正确的.

定理 F 假定[①]当

$$n = 2^{a} p^{a} p'^{a'} \cdots \quad, a > 0, a, a', \cdots > 0$$

时有

$$N_2(n) \backsim A \frac{n}{(\log n)^2} \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right) \qquad (125)$$

及当 n 为奇数时

$$N_2(n) = 0\left(\frac{n}{(\log n)^2} \right) \qquad (126)$$

则

$$A = 2C_2 = \prod_{\omega=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\omega-1)^2} \right) \qquad (127)$$

记

$$\Omega(n) = An \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right) (n \text{ 偶}), \Omega(n) = 0 (n \text{ 奇}) \qquad (128)$$

则由 ⑫⑤ 与定理 C 得

$$v_2(n) = \sum^{\omega+\omega'=1} \log \omega \log \omega' \backsim \Omega(n) \qquad (129)$$

这被了解为，当 n 为奇数时；这公式的含义为

$$v_2(n) = o(n)$$

进一步，命

$$f(s) = \sum \frac{\Omega(n)}{n^s} = \frac{\Omega(n)}{\sum n^{1+u}}$$

若 $R(s) > 2, R(u) > 1$，则这些级数是绝对收敛的. 所以

$$f(s) = A \sum_{n=0(\mathrm{mod}\, 2)} n^{-u} \prod_p \left(\frac{p-1}{p-2} \right) =$$

$$A \sum_{a>0} a^{-au} p^{-au} p'^{-a'u} \cdots \frac{(p-1)(p'-1)\cdots}{(p-2)(p'-2)\cdots} =$$

$$\frac{2^{-u}A}{1-2^{-u}} \prod_{\omega=3}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega-1}{\omega-2} \frac{\omega^{-u}}{1-\omega^{-u}} \right) = \frac{2^{-u}A}{1-2^{-u}} \xi(u) \qquad (130)$$

现在假定 $u \to 1$，及命

① 在整个文章中，A 表示同一常数.

$$\eta(u) = \prod_{\omega=3}^{\infty}\left(1 + \frac{\omega^{-u}}{1-\omega^{-u}}\right) = \prod_{\omega=3}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\omega^{-n}}\right) = (1-2^{-u})\zeta(u)$$

则

$$\frac{\xi(u)}{\eta(u)} = \prod\left(\left(1+\frac{\omega-1}{\omega-2}\cdot\frac{\omega^{-u}}{1-\omega^{-u}}\right)\Big/\left(1+\frac{\omega^{-u}}{1-\tilde{\omega}^{-u}}\right)\right) - \prod\left(\left(1+\frac{1}{\omega-2}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{\omega-1}\right)\right) = \prod\left(\frac{(\omega-1)^2}{\omega(\omega-2)}\right) = \prod\left(\frac{(\omega-1)^2}{(\omega-1)^2-1}\right) = \frac{1}{C_2}$$

因此

$$f(s) \backsim A\xi(u) \backsim \frac{A}{C_2}n(u) \backsim \frac{A}{2C_2}\xi(u) \backsim \frac{A}{2C_2(n-1)} = \frac{A}{2C_2(s-2)} \quad (131)$$

另一方面,当 $x \to 1$ 时有

$$\sum v_2(n)x^n \backsim \left(\sum \log \omega x^{\omega}\right)^2 \backsim \frac{1}{(1-x)^2}$$

所以①

$$v_2(1) + v_2(2) + \cdots + v_2(n) \backsim \frac{1}{2}n^2 \quad (132)$$

用初等运算② 可知当 $s \to 2$ 时有

$$g(s) = \sum \frac{v_2(n)}{n^2} \backsim \sum \frac{1}{n^{s-1}} \backsim \frac{1}{s-2}$$

所以①(在假定 (125) 与 (126) 之下)

$$f(s) \backsim \frac{1}{s-2} \quad (133)$$

比较 (131) 与 (133) 即得定理的结果.

(3) 无论西尔怀斯特公式还是布朗公式皆包有一个错误的因子,在每一个情况下,这个因子都是 e^{-C} 的简单函数,故并不很严重.

首先我们注意到素数论中的任何公式,若它们是由概率的考虑推导出来的,常常可能有这样的错误.例如,考虑这样的问题"一个大数 n 是一个素数的'概率'是多少?"我们已知"概率"渐近于$\frac{1}{\log n}$.

但现在已知 n 不被任何小于固定数 x 的素数整除的"概率"渐近于

① 我们在此用到我们的文章'Tauherian theorems concerning power series and Dirichler's series whose coefficients are positive', Proc. London Math. Soc, Ser. 2, vol. 13, 174-192.这是一个最快的证明,但并非最初等者.应用前面征引的朗道的文章可知 (128) 等价于公式

$$\sum_{1}^{n} N_2(m) \backsim \frac{n^2}{2(\log n)^2}$$

② 对于一般的定理,包括用到这里的一些特例,见 K. Knopp, 'Divergenzcharactere gewisser Dirichlet'scher Relhen', Acta Math; vol. 34, 1909, 165-204(定理 Ⅳ. p176)

$$\prod_{w<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$$

由于很自然地推出[①]所欲求的"概率"渐近于

$$\prod_{w<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$$

但

$$\prod_{w<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\omega}\right)\backsim\frac{2e^{-C}}{\log n}$$

所以上面这一推论是不正确的，它多了一个因子 $2e^{-U}$.

布朗的论证中确未用到概率的语言[②]，但是他用了不严格的趋限，这如上述论证方法有同样的性质，布朗首先发现（天才地运用"埃拉朵斯染尼氏筛法"）将 n 表示为两个素因子个数不超过固定数的整数之和的表示法的渐近公式，这个公式是对的，因此它是上述论证中的第一步；它在于枚举各种可能，所有涉及"概率"[③]处均可去掉. 正是在趋限时导致了错误，在各种情况下，错误的性质是同样的.

(4) 夏 (Shah) 与威尔逊广泛地检验了猜想 A，与康妥 (Cantor)、奥锐 (Aubry)、哈斯勒尔 (Haussner) 及李坡尔特 (Ripert) 收集的经验数据相比较. 我们复印了他们结果的表格，但需作些注记. 首先重要的，其数值检证如公式 ⑯ 的 $N_2(n)$，而不是如 ⑲ 的 $v_2(n)$. 我们的分析正相反，首先应是 $v_2(n)$，而 $N_2(n)$ 的公式则是第二位的. 为了导出 $N_2(n)$ 的渐近公式，我们有

$$v_2(n)=\sum_{\omega+\omega'=n}\log\omega\log\omega'\backsim(\log n)^2N_2(n)$$

因子 $(\log n)^2$ 只是阶 $\log n$ 的错误，更为自然地[④]为将 $v_2(n)$ 换为

$$((\log n)^2-2\log n+\cdots)N_2(n)$$

对于我们采用的变换，渐近公式自然是无差别的. 但以一定范围内验证为目的，则是有区别的，因 $\log n$ 的项并非可以忽略不计的，它对于结果的似真性有巨大差异. 基于这些考虑，夏与威尔逊不搞公式 ⑯，而搞一个修改过的公式

$$N_2(n)\backsim\rho(n)=2C_2\frac{n}{(\log n)^2-2\log n}\prod_p\left(\frac{p-1}{p-2}\right)$$

这种错误对过去一系列误解有关. 因此（如夏与威尔逊指出）[⑤]在附表给出的值 n 的范围内，西尔怀斯特的公式确实比未经修改的公式 ⑯ 得到的结果好.

还有次重要的一点注记：在我们的分析中，最自然的函数不是

---

① 我们可以将 $\omega<\sqrt{n}$ 换成 $\omega<n$，则所得"概率"减少一半，这个事实本身就足以说明论证是不充分的.

② 西尔怀斯特论证中是否用到"概率"，我们尚不能判断.

③ 概率并非纯数学的一个标志，它是属于哲学与物质的标志.

④ 比较 Shah and Wilson(1)，238. 用其他方法也可以得到相同的结论.

⑤ Shah and Wilson(1)，242.

$$f(x) = \sum \log \omega x^{\omega}$$

而是

$$g(x) = \sum \Lambda(n) x^n = \sum_{w_2 l} \log \omega x^{\omega^l}$$

对应的数值函数不是 $v_2(n)$ 与 $N_2(n)$，而是

$$g_2(n) = \sum_{m+n'=n} \Lambda(m)\Lambda(m'), Q_2(n) = \sum_{\omega l+\omega l=n} 1$$

（因此 $Q_2(n)$ 为将 n 表为两个素数或素数幂的表示法个数）．$N_2(n)$ 与 $Q_2(n)$ 是渐近等价的，它们的差异为低阶的，低于任何情况下我们所忽略者．当 n（不可避免地）的值不太大时，将它作为以后作比较的基础．

在附表中，表示为两个素数之和及素数幂之和的表示法是分开算的；但以其总和与 $\rho(n)$ 比较．常数 $2C_2$ 为 1.320 3．可以看出计算值与真值之间的对应是良好的．

附　　表

n	$Q_2(n)$	$\rho(n)$	$Q_2(n):\rho(n)$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	$6 + 4 = 10$	22	0.45
$32 = 2^5$	$4 + 7 = 11$	8	1.38
$34 = 2 \cdot 17$	$7 + 6 = 13$	9	1.44
$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$8 + 8 = 16$	17	0.94
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$4^2 + 0 = 4^2$	49	0.85
$214 = 2 \cdot 107$	$17 + 0 = 17$	16	1.07
$216 = 2^3 \cdot 3^3$	$28 + 0 = 28$	32	0.88
$256 = 2^8$	$16 + 3 = 19$	17	1.10
$2\,048 = 2^{11}$	$50 + 17 = 67$	63	1.06
$2,259 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$	$174 + 26 = 200$	179	1.11
$2\,304 = 2^8 \cdot 3^2$	$134 + 8 = 142$	136	1.04
$2\,306 = 2 \cdot 1\,153$	$67 + 20 = 87$	69	1.26
$2\,310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$228 + 6 = 244$	244	1.00
$3\,888 = 2^4 \cdot 3^3$	$186 + 24 = 210$	107	1.06
$3\,898 = 2 \cdot 1\,949$	$99 + 6 = 105$	99	1.06
$3\,990 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$	$328 + 20 = 348$	342	1.02
$4\,096 = 2^{12}$	$104 + 5 = 109$	107	1.06

续附表

n	$Q_2(n)$	$\rho(n)$	$Q_2(n):\rho(n)$
$4\,996 = 2^2 \cdot 1\,249$	$124 + 16 = 140$	119	1.18
$4\,998 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17$	$288 + 20 = 308$	305	1.01
$5\,000 = 2^3 \cdot 5^4$	$150 + 26 = 176$	157	1.12
$8\,190 = 2.3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	$578 + 26 = 604$	597	1.01
$8\,192 = 2^{13}$	$150 + 32 = 182$	171	1.06
$8\,194 = 2 \cdot 17 \cdot 241$	$192 + 10 = 202$	219	0.92
$10\,008 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 139$	$388 + 30 = 418$	396	1.06
$10\,010 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	$384 + 36 = 420$	384	1.09
$10\,014 = 2 \cdot 3 \cdot 1\,669$	$408 + 8 = 416$	396	1.05
$30\,030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	$1\,800 + 54 = 1\,854$	1 795	1.03
$36\,960 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$1\,956 + 38 = 1\,994$	1 937	1.03
$39\,270 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$	$2\,152 + 36 = 2\,188$	2 213	0.99
$41\,580 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$2\,140 + 44 = 2\,184$	2 125	1.03
$50\,026 = 2 \cdot 25\,013 = 50 \cdot 144 = 2^5 \cdot 1\,567$	$702 + 8 = 710$	692	1.03
	$607 + 99 = 706$	694	1.02
$170\,166 = 2 \cdot 3 \cdot 79 \cdot 359$	$3\,734 + 46 = 3\,780$	3 762	1.00
$170\,170 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	$3\,784 + 8 = 3\,792$	3 841	0.99
$170\,172 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 29 \cdot 163$	$3\,732 + 48 = 3\,780$	3 866	0.98

编者注 我们略去论文的其余部分,在那里包含了仅考虑优弧,用圆法得到的有关其他许多堆垒问题的猜想.

2 Goldbach's problems[①]

——R.C.VAVGHAN

2.1 The ternary Goldbach problem

Vinogradov's attack on Goldbach's ternary problem follows the pattern of the previous chapter, but this time with

$$f(\alpha) = \sum_{p \leqslant n} (\log p) e(\alpha p) \tag{①}$$

① 摘自 R.C.VAVGHAN.THE HAPDY-LITTLEWOOD METHOD.世界图书出版公司

The poor current state of knowledge concerning the distribution of primes in arithmetic progressions demands that the major arcs be rather sparse. The principal difficulty then lies on the minor arcs and the establishment of a suitable analogue of Weyl's inequality.

Let B denote a positive constant, and for n sufficiently large write

$$P = (\log n)^B \qquad ②$$

When $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant P$ and $(a, q) = 1$, let

$$M(q, a) = \{\alpha \mid |\alpha - a/q| \leqslant Pn^{-1}\} \qquad ③$$

denote a typical major arc and write M for their union. Since n is large, the major arcs are disjoint and lie in

$$u = (Pn^{-1}, 1 + Pn^{-1})$$

Let $m = u \setminus M$. Then, by①

$$R(n) = \int_u f(\alpha)^3 e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha =$$

$$\int_M f(\alpha)^3 e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_m f(\alpha)^3 e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha \qquad ④$$

where

$$R(n) = \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \\ p_1+p_2+p_3=n}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3) \qquad ⑤$$

The treatment of the minor arcs rests principally on the following theorem.

Theorem 1 Suppose that $(a, q) = 1, q \leqslant n$ and $|\alpha - a/q| \leqslant q^{-2}$. Then

$$f(\alpha) \ll (\log n)^4 (nq^{-1/2} + n^{4/5} + n^{1/2} q^{1/2})$$

Proof Let

$$\tau_x = \sum_{\substack{d \mid x \\ d \leqslant X}} \mu(d)$$

where μ is Möbius's function. Then taking $X = n^{2/5}$ and $\lambda(x, y) = \Lambda(y)e(\alpha xy)$ in the identity

$$\sum_{X < y \leqslant n} \lambda(1, y) + \sum_{X < x \leqslant n} \sum_{X < y \leqslant n/x} \tau_x \lambda(x, y) =$$

$$\sum_{d \leqslant X} \sum_{X < y \leqslant n/d} \sum_{z \leqslant n/(yd)} \mu(d)\lambda(dz, y)$$

gives

$$f(\alpha) = S_1 - S_2 - S_3 + O(n^{1/2})$$

where

$$S_1 = \sum_{x \leqslant X} \sum_{y \leqslant n/x} \mu(x)(\log y) e(\alpha xy)$$

$$S_2 = \sum_{x \leqslant X^2} \sum_{y \leqslant n/x} c_x e(\alpha x y) \text{ with } c_x = \sum_{d \leqslant X} \sum_{\substack{y \leqslant X \\ dy = x}} \mu(d) \Lambda(y)$$

$$S_3 = \sum_{\substack{x > X \\ xy \leqslant n}} \sum_{y > X} \tau_x \Lambda(y) e(\alpha x y)$$

Here Λ is von Mangoldt's function, and the identity follows by observing that $\tau_x = 0(1 < x \leqslant X)$ and inverting the order of summation.

The inner sum in S_1 is

$$\mu(x) \int_1^{n/x} \sum_{\gamma < y \leqslant n/x} e(\alpha x y) \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma}$$

and $c_x < \log x$. Hence

$$S_1, S_2 \ll (\log n) \sum_{x \leqslant x^2} \min(n/x, \| \alpha x \|^{-1})$$

Therefore

$$S_1, S_2 \ll (\log n)^2 (nq^{-1} + n^{4/5} + q)$$

Thus it remains to estimate S_3:

$$\text{Let } \mathscr{A} = \{X, 2X, 4X, \cdots, 2^k X \mid 2^k X^2 < n \leqslant 2^{k+1} X^2\}$$

Then

$$S_3 = \sum_{Y \in \mathscr{A}} S(Y)$$

where

$$S(Y) = \sum_{Y < x \leqslant 2Y} \sum_{X < y \leqslant n/x} \tau_x \Lambda(y) e(\alpha x y)$$

By Cauchy's inequality

$$| S(Y) |^2 \ll \Big(\sum_{x \leqslant 2Y} \mathrm{d}(x)^2 \Big) \sum_{Y < x \leqslant 2Y} \Big| \sum_{X < y \leqslant n/x} \Lambda(y) e(\alpha x y) \Big|^2$$

It is easily shown that $\sum_{x \leqslant Z} d(x)^2 \ll Z(\log 2Z)^3$. Hence

$$| S(Y) |^2 \ll Y (\log n)^5 \sum_{y \leqslant n/Y} \sum_{z \leqslant n/Y} \min(Y, \| \alpha(y - z) \|^{-1})$$

Thus

$$| S(Y) |^2 \ll n (\log n)^6 (nq^{-1} + Y + n/Y + q)$$

which gives

$$S_3 \ll \sum_{Y \in \mathscr{A}} (\log n)^3 (nq^{-1/2} + n^{1/2} Y^{1/2} + nY^{-1/2} + n^{1/2} q^{1/2}) \ll$$
$$(\log n)^4 (nq^{-1/2} + n^{4/5} + n^{1/2} q^{1/2})$$

as required.

To estimate

$$\int_M f(\alpha)^3 e(-\alpha n) \mathrm{d}\alpha$$

it is now only necessary to make two observations. First that Parseval's identity and elementary prime number theory together give

$$\int_0^t |f(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{p \leqslant n} (\log p)^2 \ll n \log n$$

Second that, by Theorem 1

$$\sup_{\alpha \in m} |f(\alpha)| \ll n(\log n)^{4-B/2}$$

Thus

Theorem 2 Suppose that A is a positive constant and $B \geqslant 2A + 10$. Then

$$\int_M |f(\alpha)|^3 d\alpha \ll n^2 (\log n)^{-A}$$

The treatment of the major arcs, although straightforward, requires an appeal to the theory of the distribution of primes in arithmetic progressions.

Lemma 1 Let

$$v(\beta) = \sum_{m=1}^{n} e(\beta m) \tag{6}$$

Then there is a positive constant C such that whenever $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant P$, $(a, q) = 1, \alpha \in M(q, a)$ one has

$$f(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} v(\alpha - a/q) + O(n\exp(-C(\log n)^{1/2}))$$

Proof Let

$$f_X(\alpha) = \sum_{p \leqslant X} (\log p) e(\alpha p)$$

Then

$$f_X(a/q) = \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} e(ar/q) \vartheta(X, q, r) + O((\log X)(\log q))$$

where

$$\vartheta(X, q, r) = \sum_{\substack{p \leqslant X \\ p \equiv r (\mathrm{mod}\ q)}} \log p$$

By Theorem 53 and (40) of Estermann(1952) it follows that whenever $\sqrt{n} < X \leqslant n$ one has

$$f_X(a/q) = \frac{X}{\phi(q)} \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} e(ar/q) + O(n\exp(-C_1(\log n)^{1/2})) \tag{7}$$

Observe that this is trivial when $X \leqslant \sqrt{n}$. Also, by Theorem 271 of Hardy & Wright (1979)

$$\sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} e(ar/q) = \mu(q)$$

Hence, by ①, ⑥, ⑦ with $X = n$. $F(m) = e(\beta m), \beta = \alpha - a/q$.

$$C_m = \begin{cases} e(am/q)\log m - \mu(q)/\phi(q), & \text{when } m \text{ is prime} \\ -\mu(q)/\phi(q), & \text{otherwise} \end{cases}$$

one has

$$f(\alpha) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)} v(\alpha - a/q) \ll (1 + n \mid \alpha - a/q \mid) n \exp(-C_1(\log n)^{1/2})$$

With ③and②this establishes the lemma.

Let $\alpha \in M(q, a)$. Then, by the above lemma.

$$f(\alpha)^3 - \frac{\mu(q)}{\phi(q)^3} v(\alpha - a/q)^3 \ll n^3 \exp(-C(\log n)^{1/2})$$

Now integrating over M gives

$$\sum_{q \leqslant P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{M(q,a)} \left(f(\alpha)^3 - \frac{\mu(q)}{\phi(q)^3} v(\alpha - a/q)^3\right) e(-\alpha n) \mathrm{d}\alpha \ll$$
$$P^3 n^2 \exp(-C(\log n)^{1/2})$$

Therefore, by③

$$\int_M f(\alpha)^3 e(-\alpha n) \mathrm{d}\alpha = G(n, P) \int_{-P/n}^{P/n} v(\beta)^3 e(-\beta n) \mathrm{d}\beta + O(P^3 n^2 \exp(-C(\log n)^{1/2})) \quad ⑧$$

where

$$G(n, P) = \sum_{q \leqslant P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \frac{\mu(q)}{\phi(q)^3} e(-an/q) \quad ⑨$$

By⑥, when β is not an integer

$$v(\beta) \ll \| \beta \|^{-1} \quad ⑩$$

Hence the interval of integration $[-P/n, P/n]$ can be replaced by $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$with a total error

$$\ll \sum_{q \leqslant P} \phi(q)^{-2} n^2 P^{-2}$$

Therefore, by ②

$$\int_M f(\alpha)^3 e(-\alpha n) \mathrm{d}\alpha = G(n, P) J(n) + O(n^2 (\log n)^{-2B}) \quad ⑪$$

where

$$J(n) = \int_{-1/2}^{1/2} v(\beta)^3 e(-\beta n) \mathrm{d}\beta$$

By ⑥, $J(n)$ is the number of solutions of $m_1 + m_2 + m_3 = n$ with $1 \leqslant m_j \leqslant n$. Thus

$$J(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \quad ⑫$$

Also, by⑨

$$G(n,P) = G(n) + O\Big(\sum_{q \leqslant P} \phi(q)^{-2}\Big)$$

where

$$G(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\phi(q)^3} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e(-an/q) \qquad ⑬$$

Hence, by ①, ⑪ and Theorem 327 of Hardy & Wright(1979)

$$\int_{M} f(\alpha)^3 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = G(n)J(n) + O(n^2(\log n)^{-B/2})$$

By Theorems 67 and 272 of Hardy & Wright (1979) Ramanjuan's sum

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e(-an/q)$$

is a multiplicative function of q and satisfies

$$c_q(n) = \frac{\mu(q/(q,n))\phi(q)}{\phi(q/(q,n))} \qquad ⑭$$

Hence, by ⑬

$$G(n) = \Big(\prod_{p \nmid n}(1 + (p-1)^{-3})\Big)\prod_{p \mid n}(1 - (p-1)^{-2}) \qquad ⑮$$

This establishes

Theorem 3 Suppose that A is a positive constant and $B \geqslant 2A$. Then

$$\int_{M} f(\alpha)^3 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}n^2 G(n) + O(n^2(\log n)^{-A})$$

where $G(n)$ satisfies ⑮.

Note that $G(n) \gg 1$ when n is odd and $G(n) = 0$ when n is even. When coupled with Theorem 3.2 and (3.4), Theorem 3.3 yields

Theorem 4 Suppose that A is a positive constant and $R(n)$ satisfies ⑤. Then

$$R(n) = \frac{1}{2}n^2 G(n) + O(n^2(\log n)^{-A})$$

where $G(n)$ satisfies ⑮.

Corollary Every sufficiently large odd number is the sum of three primes.

2.2 The binary Goldbach problem

In the binary Goldbach problem it is not possible to obtain an asymptotic formula in the same manner as in 2.1. However, a nontrivial estimate can be obtained for

$$\sum_{m=1}^{n}(R_1(m) - mG_1(m))^2$$

where

$$R_1(m) = \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1+p_2=m}} (\log p_1)(\log p_2)$$

and $G_1(m)$ is the corresponding singular series. This is because the above expression corresponds to a quaternary problem, rather than to a binary problem. It leads to the less precise conclusion that almost every even number is a sum of two primes.

Let

$$R_1(m) = R_1(m,n) = \sum_{\substack{p_1 \leqslant n}}\sum_{\substack{p_2 \leqslant n \\ p_1+p_2=m}}(\log p_1)(\log p_2) \tag{16}$$

Then

$$R_1(m) = R_2(m) + R_3(m) \tag{17}$$

where

$$R_2(m) = \int_M f(\alpha)^2 e(-\alpha m)\mathrm{d}\alpha \tag{18}$$

and

$$R_3(m) = \int_M f(\alpha)^2 e(-\alpha m)\mathrm{d}\alpha \tag{19}$$

Here f, M, m are as in 2.1.

Now $R_3(m)$ is the Fourier coefficient of the function which if $f(\alpha)^2$ on m and 0 elsewhere. Hence, by Bessel's inequality

$$\sum_{m=1}^{n} |R_3(m)|^2 \leqslant \int_m |f(\alpha)|^4 \mathrm{d}\alpha \tag{20}$$

Theorem 5 Suppose that A is a positive constant and $B \geqslant A + 9$. Then

$$\sum_{m=1}^{n} |R_3(m)|^2 \ll n^3(\log n)^{-A}$$

This can be deduced, via ⑳, in a similar manner to Theorem 2. Let

$$G_1(m,P) = \sum_{q \leqslant P}\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \frac{\mu|q|^2}{\phi(q)^2} e(-am/q) \tag{21}$$

Then by making only trivial adjustments to the argument that gives ⑧ one obtains

$$R_2(m) = G_1(m,P)\int_{-P/n}^{P/n} v(\beta)^2 e(-\beta m)\mathrm{d}\beta +$$
$$O(P^3 n\exp(-C(\log n)^{1/2}))$$

Moreover, by ⑩

$$\int_{P/n}^{1/2} | v(\beta) |^2 d\beta \ll nP^{-1}$$

Hence, by ㉑ and the elementary estimate $\sum_{q \leqslant P} \phi(q)^{-1} \ll \log n$, one has

$$R_2(m) = G_1(m,P)J_1(m) + O(n(\log n)^{1-B})$$

where

$$J_1(m) = \int_{-1/2}^{1/2} v(\beta)^2 e(-\beta m) d\beta$$

By ⑥, $J_1(m)$ is the number of solutions of $m_1 + m_2 = m$ with $1 \leqslant m_j \leqslant n$. Hence, when $m \leqslant n$, one has $J_1(m) = m - 1$. Therefore, by ㉑

$$R_2(m) = mG_1(m,P) + O(n(\log n)^{1-B}) \quad ,1 \leqslant m \leqslant n \tag{㉒}$$

By ⑭, one has

$$\sum_{X < q \leqslant Y} \frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e(-am/q) = \sum_{d|m} \frac{\mu(d)^2}{\phi(d)} \sum_{\substack{X/d < q \leqslant Y/d \\ (q,m)=1}} \frac{\mu(q)}{\phi(q)^2} \ll$$
$$\sum_{d|m} \frac{\mu(d)^2}{\phi(d)} \min\left(\frac{d}{X}, 1\right) \tag{㉓}$$

using the elementary fact that

$$\sum_{q > Z} \phi(q)^{-2} \ll Z^{-1}$$

Hence

$$G_1(m) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)^2}{\phi(q)^2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e(-am/q) \tag{㉔}$$

converges,

$$G_1(m,P) - G_1(m) \ll \log m$$

and

$$\sum_{m=1}^{n} | G_1(m,P) - G_1(m) |^2 \ll (\log n) \sum_{d \leqslant n} \frac{\mu(d)^2 n}{\phi(d) d} \min\left(\frac{d}{P}, 1\right) \ll$$
$$n(\log n) P^{-1} \sum_{d \leqslant n} \frac{\mu(d)^2}{\phi(d)} \ll$$
$$n(\log n)^2 P^{-1}$$

Hence, by ② and ㉒

$$\sum_{m=1}^{n} | R_2(m) - mG_1(m) |^2 \ll n^3(\log n)^{2-B} \tag{㉕}$$

By ⑭

$$G_1(m) = \left(\prod_{p \nmid m} (1 - (p-1)^{-2})\right) \prod_{p|m} (1 + (p-1)^{-1}) \tag{㉖}$$

Now, by choosing B suitably one obtains.

Theorem 6 Suppose that A is a positive constant and $B \geqslant A + 2$. Then

$$\sum_{m=1}^{n} | R_2(m) - mG_1(m) |^2 \ll n^3(\log n)^{-A}$$

where $G_1(m)$ satisfies ㉕.

Combining ⑰ and Theorems 5 and 6 establishes.

Theorem 7 Let A denote a positive constant. Then

$$\sum_{m=1}^{n} | R_1(m) - mG_1(m) |^2 \ll n^3(\log n)^{-A}$$

where R_1 and G_1 satisfy ⑯ and ㉕ respectively.

Note that $G_1(m) \gg 1$ when m is even and $G_1(m) = 0$ when m is odd.

Corollary The number $E(n)$ of even numbers m not exceeding n for which m is not the sum of two primes satisfies

$$E(n) \ll n(\log n)^{-A}$$

Proof By ⑯ and ㉕, for each m counted by $E(n)$,

$$m^{-2} | R_2(m) - mG_1(m) |^2 = G_1(m)^2 \gg 1$$

Hence

$$E(n) \ll \sum_{m=1}^{n} m^{-2} | R_2(m) - mG_1(m) |^2$$

The conclusion now follows from Theorem 7 by partial summation.

2.3 Exercises

(1) Show that ever large natural number can be written in the form $p_1 + p_2 + x^k$.

(2) Suppose that $a_1, \cdots, a_4$ are fixed non-zero integers with a_1, a_2, a_3 not all of the same sign. Show that

$$R(n) = \sum_{\substack{p_1 \leq n\, p_2 \leq n\, p_3 \leq n \\ a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4 = 0}}\sum\sum (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3)$$

satisfies

$$R(n) = J(n)G + O(n^2(\log n)^{-A})$$

where $J(n)$ is the number of solutions of

$$a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + a_4 = 0$$

with $m_j \leq n$ and

$$G = \sum_{q=1}^{\infty} \phi(q)^{-3} \prod_{j=1}^{4} c_q(a_j)$$

Show that if $(a_1, a_2, a_3) \mid a_4$, then $J(n) \gg n^2$ for large n.

(3) In the notation of the previous exercise show that a sufficient condition for

$G \gg 1$ to hold is that

$$(a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_4) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\ (a_1, a_2, a_3, a_4))$$

Show that this condition is also necessary, and that, if it fails, then $G = 0$.

3 三素数定理的一个新证明

——潘承彪

(1) 在 Hardy-Littlewood 圆法基础上,1937 年 И.М.Виноградов①首先利用他所提出的估计素数变数的三角和的方法证明了任一充分大的奇数都是三个素数之和,它通常称为 Goldbach-Виноградов 定理,简称三素数定理.此后,Ю.В.ЛИННИК.②及 И. Г. Чудаков.③利用 L - 函数零点密度估计给出了另外二个证明.最近,H.L.Montgomery④及 M.N.Huxley⑤仍用 L - 函数零点密度估计给出二个较为简化的证明,但他们利用了复杂的 L - 函数的渐近函数方程和 L - 函数四次幂的均值公式.本文的目的是不用 Виноградов 方法及 L - 函数的零点密度估计,而只用一些熟知的基本结果,对三素数定理给出一个新的简单的分析证明.

(2) 本文中用 N 表示充分大的正整数,p, p_1, p_2, p_3 为素数以及 $e(x) = e^{2\pi ix}$.设

$$S(x, N) = \sum_{d \leqslant N} e(px) \qquad ①$$

那么 N 表为三个素数之和的形式的个数为

$$r(N) = \sum_{d_1 + d_2 + d_3 = N} 1 = \int_0^1 S^3(x, N) e(-Nx) \mathrm{d}x \qquad ②$$

三素数定理就是要证明,当 N 为充分大的奇数时必有 $r(N) > 0$.证明的关键是要得到下面的结果:设 c 为某一正整数,若

$$\log^c N < q \leqslant N \log^{-c} N, (q, h) = 1 \qquad ③$$

则

① Виноградов И.М., Представление Нечёткого чнела суммойтрех Простых чисел,ДАН СССР, 15(1937),291-294.

② Линник Ю.В.,О возможности единюго метода В Некоторых Вопросах"аддитивной"И"Дистрибутивной" Теории Простых чисел,ДАН СССР,49(1945),3-7.

③ Чудаков Н.Г.(Tchudakoff N.),On Goldbach - Vinogradov, sthcorem, Ann. of Math.(2)48 (1947), 515-545.

④ Montgomery H.L., Topics in Multiplicative Number Theory, Lecture Notes in Math. 227,1971.

⑤ Huxley M.N., The Distribution of Prime Numbers, Oxford Mathematical Monographs, 1972.

$$S\left(\frac{h}{q},N\right)\ll N\log^{-3}N \tag{④}$$

本文主要是证明下面的定理.

定理 设

$$T_1(x,N)=\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)\log\frac{N}{n}e(nx) \tag{⑤}$$

若$(q,h)=1,1\leqslant q=N$,则

$$T_1\left(\frac{h}{q},N\right)\ll Nq^{-\frac{1}{2}}\log^{10}N+N^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{13}{2}}N \tag{⑥}$$

由我们的定理就可推出④,因而就证明了三素数定理.为此需要下面熟知的引理.

引理1 设$\chi(n)$是模q的特征,则

$$\sum_{\chi}\left|\sum_{n=n_0+1}^{n_0+X}a_n\chi(n)\right|^2\leqslant(q+K)\sum_{n=n_0+1}^{n_0+X}|a_n|^2 \tag{⑦}$$

其中$\sum\limits_{\chi}$表示对全体模q的特征求和.

证明 当$(q,h)=1$时

$$T_1\left(\frac{h}{q},N\right)=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e\left(\frac{hl}{q}\right)\sum_{\substack{n\leqslant N\\n\equiv l(q)}}\Lambda(n)\log\frac{N}{n}+$$
$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\(n,q)>1}}\Lambda(x)\log\frac{N}{n}e\left(\frac{hl}{q}\right)=\frac{1}{\phi(q)}$$
$$\sum_{\chi}\tau(\overline{\chi})\chi(h)\psi_1(N,\chi)+O(\log^2N\log q) \tag{⑧}$$

其中$\phi(q)$为Euler函数,及

$$\tau(\chi)\sum_{l=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{h}{q}\right) \tag{⑨}$$

$$\psi_1(N,\chi)=\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)\chi(n)\log\frac{N}{n} \tag{⑩}$$

由于$\tau(\chi_0)=\mu(q)$(χ_0为主特征),$|\tau(\chi)|\leqslant\sqrt{q}(\chi\neq\chi_0)$及$\phi(q)\gg q\log^{-1}q$,故

$$T_1\left(\frac{h}{q},N\right)\ll\frac{\log q}{q}\psi_1(N,x_0)+$$
$$\frac{\log q}{\sqrt{q}}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi_1(N,\chi)|+\log^2N\log q \tag{⑪}$$

容易证明当$a>1$时

$$\psi_1(N,\chi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}-\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{N^2}{s^2}ds-$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} -\frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{N^s}{s^2}ds \quad ⑫$$

设 $A \leqslant N$ 为一待定常数,及

$$M(s,\chi) = \sum_{n\leqslant A}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s} \quad ⑬$$

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数,把 $-\frac{L'}{L}(s,\chi)$ 分为①

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = -\frac{L'}{L}(s,\chi)(1-L(s,\chi)M(s,\chi)) - L'(s,\chi)M(s,\chi) \quad ⑭$$

现取 $\alpha = 1+\log^{-1}N$, $B = [6\log^2 N]$,熟知有

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = f_1(s,\chi) + f_2(s,\chi) + O(N^{-3}) \quad ⑮$$

其中

$$f_1(s,\chi) = \sum_{n\leqslant A}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s},\ f_2(s,\chi) = \sum_{A<n\leqslant 2^B A}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} \quad ⑯$$

由于在 $\mathrm{Re}s = 1+\log^{-1}N$ 上,$L(s,\chi)\ll\log N$, $M(s,\chi)\ll\log N$,故从⑭,⑮得,在 $\mathrm{Re}s = 1+\log^{-1}N$ 上有

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = f_1(1-LM) + f_2(1-LM) - LM + O(N^{-2}) \quad ⑰$$

由⑫,⑰得

$$\psi_1(N,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(1)}[f_1(1-LM) + f_2(1-LM) - L'M]\frac{N^s}{s^2}ds + O(N^{-1}) \quad ⑱$$

当 $\chi\neq\chi_0$ 时,其中第一、第三项积分可移至直线 $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$ 上,故得

$$\psi_1(N,\chi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{2})}[f_1(1-LM) - L'M]\frac{N^s}{s^2}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{2})}f_2(1-LM)\frac{N^s}{s^2}ds + O(N^{-1}) \ll \int_{(\frac{1}{2})}(|f_1|+|f_1LM|+|L'M|)\frac{N^{\frac{1}{2}}}{|s|^2}|ds| + \int_{(\frac{1}{2})}|f_2||1-LM|\frac{N}{|s|^2}|ds| + O(N^{-1}) \quad ⑲$$

利用 Hölder 不等式由⑲即得

① 潘承洞,丁夏畦.一个均值定理.数学学报,1975:18(4),254-262.

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi_1(N,\chi)|\ll N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|f_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}+$$
$$N^{\frac{1}{2}}\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|f_1|^4\Big)^{\frac{1}{4}}\cdot$$
$$\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|M|^4\Big)^{1/4}\int_{(\frac{1}{2})}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{|\mathrm{d}s|}{|s|^2}+N^{\frac{1}{2}}\sup_{\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|M|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\int_{(\frac{1}{2})}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L'|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{|\mathrm{d}s|}{|s|^2}+N\sup_{\mathrm{Re}\,s=a}$$
$$\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|f_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\sup_{\mathrm{Re}\,s=a}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|1-LM|^2\Big)^{\frac{1}{2}}+qN^{-1}\qquad ⑳$$

由简单而熟知的结果

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|L\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t_1x\Big)\right|^2\ll q\,|s|\log^2 q\,|s|,s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\qquad ㉑$$

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|L'\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t_1x\Big)\right|^2\ll q\,|s|\log^4 q\,|s|,s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\qquad ㉒$$

可推得

$$\int_{(\frac{1}{2})}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L^2|\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{|\mathrm{d}s|}{|s|^2}\ll\sqrt{q}\log q\qquad ㉓$$

$$\int_{(\frac{1}{2})}\Big(\sum_{\chi\neq\chi_0}|L'|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{|\mathrm{d}s|}{|s|^2}\ll\sqrt{q}\log^2 q\qquad ㉔$$

因而，为了估计 ⑳ 就只要利用引理 1 来估计其中的各个和. 下面都利用了条件

$$q\leqslant N,A\leqslant N$$

(i) 由 ⑯ 和引理 1 得

$$\sum_{\chi}\left|f_1\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\Big)\right|^2\leqslant(q+A)\log^3 N\qquad ㉕$$

(ii) 由 ⑬ 和引理 1 得

$$\sum_{\chi}\left|M\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\Big)\right|^2\leqslant(q+A)\log N\qquad ㉖$$

(iii) 由 ⑯ 得

$$f_1^2(s,\chi)=\sum_{n\leqslant A^2}\frac{a_n\chi(n)}{n^s},|a_n|\leqslant d(n)\log^2 n$$

其中 $d(n)$ 为除数函数. 故从引理 1 得

$$\sum_{\chi}\left|f_1\Big(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\Big)\right|^4\leqslant(q+A^2)\log^8 N\qquad ㉗$$

这里用到了$\sum_{n\leqslant \chi}\frac{d^2(n)}{n}\ll \lg^4 x$.在(iv)和(vi)中亦要用此结果.

(iv) 由⑬得

$$M_2(s,\chi)=\sum_{n\leqslant A^2}\frac{b_n\chi(n)}{n^8},\ |b_n|\leqslant d(n)$$

故从引理1及$\sum_{n\leqslant \chi}\frac{d^2(n)}{n}\ll \log^4 x$得

$$\sum_{\chi}\left|M\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\right)\right|^4\leqslant (q+A^2)\log^4 N \qquad ㉘$$

(v) 由⑯得当$\mathrm{Re}s=1+\lg^{-1}N$时

$$\sum_{\chi}|f_2(s,\chi)|^2=\sum_{\chi}\left|\sum_{j=0,2}^{B-1}\sum_{A<n<2^x+1}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^8}\right|^2\leqslant$$

$$B\sum_{j=0}^{B-1}\sum_{\chi}\left|\sum_{2^PA<n\leqslant 2^{x+1}A}\frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}\right|^2\ll$$

$$\log^2 N\sum_{j=0}^{B-1}(q+2^jA)\sum_{2^PA<n\leqslant 2^{x+1}A}\frac{\Lambda^2(n)}{n^2}\ll$$

$$\left(\frac{q}{A}+\log^2 N\right)\log^6 N \qquad ㉙$$

(vi) 由于当$\mathrm{Re}s=1+\log^{-1}N$时

$$1-LM=\sum_{A<n<2^BA}\frac{c_n\chi(n)}{n^s}+O(N^{-1})$$

$$|c_n|\leqslant d(n)$$

和(v)一样并利用$\sum_{n\leqslant x}d^2(n)\ll x\log^3 x$可证当$\mathrm{Re}s=1+\log^{-1}N$时

$$\sum_{\chi}|1-LM|^2\ll\left(\frac{q}{A}+\log^2 N\right)\log^8 N \qquad ㉚$$

⑳及㉓～㉚就得

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi_1(N,\chi)|\ll N^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}(q+A^2)^{\frac{1}{2}}\log^4 N+N\left(\frac{q}{A}+\log^2 N\right)\log^7 N \qquad ㉛$$

现取$A=N^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}\log^{\frac{2}{3}}N$,则由⑪,㉛及$\psi_1(N,\chi_0)\ll N$即得⑥,定理证毕.

由我们的定理推得

引理2 设c是一大于42的整数,则当

$$\log^c N<q\leqslant N\log^{-c}N,(q,h)=1 \qquad ㉜$$

有

$$T_1\left(\frac{h}{q},N\right)\ll N\log^{-4}N \qquad ㉝$$

(3) 为了证明三素数定理,即证明(4)需要下面的引理.

引理 3① 设 c 是一大于 46 的整数

$$T_0(x,N)=\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)e(nx) \tag{34}$$

则当 $\log^c N<q\leqslant N\log^{-c}N,(q,h)=1$ 时有

$$T_0\left(\frac{h}{q},N\right)\ll N\log^{-2}N \tag{35}$$

证明 设 $\lambda=\log^{-2}N$,则有

$$T_1\left(\frac{h}{q},N+\lambda N\right)-T_1\left(\frac{h}{q},N\right)=\log(1+\lambda)T_0\left(\frac{h}{q},N\right)+\sum_{N<n\leqslant N+\lambda N}\Lambda(n)\log\frac{N+\lambda N}{n}e(nx) \tag{36}$$

故由引理 2 和 ㊱ 得

$$\log(1+\lambda)T_0\left(\frac{h}{q},N\right)\ll N\log^{-4}N+\lambda N\cdot\log(1+\lambda) \tag{37}$$

由于当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时 $\log(1+x)>\frac{1}{2}x$,故

$$T_0\left(\frac{h}{q},N\right)\ll\lambda^{-1}N\log^{-4}N+\lambda N\ll N\log^{-2}N \tag{38}$$

证毕.

利用分部求和不难从引理 3 推得,当

$$\log^c N<q\leqslant N\log^{-c}N,(q,h)=1,c\geqslant 42 \tag{39}$$

时有

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant N}\frac{\Lambda(n)}{\log n}e\left(\frac{nh}{q}\right)\ll N\log^{-3}N \tag{40}$$

而这就等于 ④. 因而也就证明了三素数定理.

(4)㉑,㉒ 的证明,先证明 ㉑. 设 $\chi\neq\chi_0,H=[q|s|]$,及 $F(x)=\sum_{H<n\leqslant x}\chi(n)$. 由 Pólya 定理知

$$F(x)\ll\sqrt{q}\log q$$

故

$$\sum_{r=H+1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}}=\int_H^\infty\frac{\mathrm{d}F(x)}{x^{\frac{1}{2}+it}}=\int_H^\infty\left(\frac{1}{2}+it\right)\frac{F(x)}{x^{\frac{3}{2}+it}}\mathrm{d}x\ll|s|\sqrt{q}\log q\int_H^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}}}\ll\sqrt{|s|}\cdot\log q \tag{41}$$

由此及引理 1 得

---

① 这引理是丁夏畦同志提出的,事实上,用下面的方法亦可得到关于 $T_c(x,N)$ 的一个一般估计式.

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|L\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\right)\right|^2 \ll \sum_{\chi\neq\chi_0}\left[\left|\sum_{n=1}^{H}\frac{\chi(n)}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}t}\right|^2+\right.$$
$$\left.|s|\log^2 q\right] \ll (q+H)\log H + q|s|\log^2 q \ll$$
$$q|s|\log^2 q|s| \qquad ㊷$$

这就证明了 ㉑,㉒ 可完全同样地加以证明.

4 哥德巴赫猜想的一种新尝试①

——潘承洞

设 N 是大偶数,$D(N)$ 是 N 表为两个素数之和的表法个数,即

$$D(N)=\sum_{N=p_1+p_2}1 \qquad ①$$

利用圆法可以得到

$$D(N)=G(N)\frac{N}{\log^2 N}+R \qquad ②$$

其中

$$G(N)=2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p|N,p>2}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)$$

$$R=\left(\sum_{q>Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-N)\right)\frac{N}{\log^2 N}+\int_E S^2(\alpha,N)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\alpha N}\mathrm{d}\alpha \qquad ③$$

$$S(\alpha,N)=\sum_{p\leqslant N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha p},\ C_q(-N)=\sum_{h=1}^{q}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}Nh/q}$$

$Q=\log^{16}N$ 以及 E 表示通常的余区间. 这一结论使我们猜想 $D(N)$ 的主项是 $G(N)N/\log^2 N$,即

$$D(N)\sim G(N)\frac{N}{\log^2 N} \qquad ④$$

大家知道,证明这一猜想的困难是在于处理误差项 R 中的积分. 据我所知,至今支持我们认为猜想(4) 成立的唯一途径是圆法②. 本文将提出另一种方法,它也支持我们认为猜想(4) 成立. 这一方法看起来比圆法更为直接和初等.

为方便起见,代替 $D(N)$ 我们来考虑

$$\hat{D}(N)=\sum_{N=d+d'}\Lambda(d)\Lambda(d')=\sum_{d\leqslant N}\Lambda(d)\Lambda(N-d)$$

---

① 1982 年 2 月 2 日收到. 原载数学年刊,3(1982),555-560.

② 最近,华罗庚教授对此提出了一个不同的新方法,但还未发表.

容易看出

$$D(N)=\frac{\hat{D}(N)}{\log^2 N}\left[1+O\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)\right]+O\left(\frac{N}{\log^6 N}\right)$$

我们要证明下面的定理：

定理 1 设 N 是大偶数，那么，对

$$Q=\sqrt{N}\log^{-20}N$$

我们有

$$\hat{D}(N)=G(N)N+\hat{R} \qquad ⑤$$

其中 $G(N)$ 由式 ③ 给出

$$\hat{R}=R_1+R_2+R_3+O(N\log^{-1}N) \qquad ⑥$$

及

$$R_1=\sum_{n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d_1\mid n\\ d_1>0}}a(d_1)\Big)\Big(\sum_{\substack{d_2\mid N-n\\ d_2\mid N=1\\ d_2>Q}}a(d_2)\Big)$$

$$R_2=\sum_{n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d_1\mid n\\ d_1>0}}a(d_1)\Big)\Big(\sum_{\substack{d_2\mid N-n\\ (d_2,N)=1\\ d_2>Q}}a(d_2)\Big)$$

$$R_3=\sum_{n\leqslant N}\Big(\sum_{\substack{d_1\mid n\\ d_1>0}}a(d_1)\Big)\Big(\sum_{\substack{d_2\mid N-n\\ d_2\mid N=1\\ d_2>Q}}a(d_2)\Big)$$

$$\alpha(m)=\mu(m)\log m$$

定理 2 利用 Bombieri 定理可得

$$R_1=R_2=O(N\log^{-1}N) \qquad ⑦$$

首先证明几个引理：

引理 1 设 m 是正整数，及 $m\leqslant N^{c_1}$. 那么，对

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c_2}{\sqrt{\log N}}\geqslant 1/2$$

我们有

$$\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\ll\log^{c_3}N \qquad ⑧$$

证明 取 $T=\mathrm{e}^{\sqrt{\log N}}$，我们有

$$\left|\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right|\leqslant\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right)^{-1}=\prod_{p\mid m}\left(1+\frac{1}{p^\sigma-1}\right)$$

及

$$\log\prod_{p\mid m}\left(1+\frac{1}{p^\sigma-1}\right)\leqslant\sum_{p\mid m}\frac{1}{p^\sigma-1}\ll\sum_{p\mid m}\frac{1}{p^\sigma}=$$
$$\sum_{\substack{p\mid m\\ p\leqslant T}}\frac{1}{p^\sigma}+\sum_{\substack{p\mid m\\ p>T}}\frac{1}{p^\sigma}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2$$

进而得到

$$\sum\nolimits_1 \ll \log\log N$$

及

$$\sum\nolimits_2 \ll T^{-1/2}\log N \ll 1$$

因为 $\sigma \geqslant 1/2$,综合以上各式即得引理.

引理 2 设 m 是正整数,$m \leqslant N^{c_1}$.我们有

$$\sum_{\substack{d\leqslant N\\(d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d} \ll \mathrm{e}^{-c_4\sqrt{\log N}} \tag{9}$$

和

$$\sum_{\substack{d\leqslant N\\(d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d}\log d = -\frac{m}{\phi(m)} + O(\mathrm{e}^{-c_5\sqrt{\log N}}) \tag{10}$$

证明 取 $X = N + 1/2$ 及

$$F(s) = \prod_{p\mid m}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\zeta(s)$$

那么有

$$\sum_{\substack{d\leqslant N\\(d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T} \frac{1}{f(1+W)}\frac{X^w}{w}\mathrm{d}w + O\left(\frac{\log N}{T}\right)$$

其中

$$b = \frac{1}{\log X}, T = \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$$

把积分线路移至$[c - \mathrm{i}T, c + \mathrm{i}T]$,$c = -c_6/\sqrt{\log X}$,并用引理 1,就得到

$$\sum_{\substack{d\leqslant N\\(d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d} \ll \mathrm{e}^{-c_4\sqrt{\log N}}$$

利用 Abel 求和法易证

$$\sum_{\substack{d=1\\(d,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d}\log d = \sum_{\substack{d\leqslant X\\(d,m)=1}} \frac{\mu(d)}{d}\log d + O(\mathrm{e}^{-c_7\sqrt{\log X}}) \tag{11}$$

及

$$\sum_{\substack{d=1\\(d,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d}\log d = \lim_{\sigma\to 1_+}\sum_{\substack{d=1\\(d,m)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{\sigma}}\log d = -\left(\frac{1}{F(s)}\right)'_{s=1} \tag{12}$$

从式 ⑪、⑫ 及

$$\left(\frac{1}{F(s)}\right)'_{s=1} = \prod_{p\mid m}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{m}{\phi(m)} \tag{13}$$

立即推出式 ⑩.

引理 3 我们有

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\(n,m)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{\phi(n)} = -G(m) + O(\mathrm{e}^{-c_8\sqrt{\log N}})$$

证明　我们有

$$\sum_{\substack{d\leqslant N\\(d,m)=1}}\frac{\mu(d)\log d}{\phi(d)}=\sum_{\substack{d\leqslant N\\(d,m)=1}}\frac{\mu(d)\log d}{d}\sum_{t\mid d}\frac{\mu^2(t)}{\phi(t)}\sum_{\substack{t\leqslant N\\(t,m)=1}}\frac{\mu^2(t)}{\phi(t)}\sum_{\substack{d\leqslant N\\(d,m)=1\\t\mid d}}\frac{\mu(d)\log d}{d}=$$

$$\sum_{\substack{t\leqslant N\\(t,m)=1}}\frac{\mu^2(t)}{\phi(t)}\sum_{\substack{v\leqslant N/t\\(v,m)=1}}\frac{\mu(vt)\log vt}{vt}=$$

$$\sum_{\substack{t\leqslant N\\(t,m)=1}}\frac{\mu^2(t)}{\phi(t)}\frac{\mu(t)}{t}\sum_{\substack{v\leqslant N/t\\(v,mt)=1}}\frac{\mu(v)}{v}(\log v+\log t)=$$

$$\sum_{\substack{t\leqslant N\\(t,m)=1}}\frac{\mu(t)}{t\phi(t)}\sum_{\substack{v\leqslant N/t\\(v,mt)=1}}\frac{\mu(v)}{v}\log v+$$

$$\sum_{\substack{t\leqslant N\\(t,m)=1}}\frac{\mu(t)\log t}{t\phi(t)}\sum_{\substack{v\leqslant N/t\\(v,mt)=1}}\frac{\mu(v)}{v}=$$

$$\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2$$

利用式 ⑩ 得

$$\sum\nolimits_1=\sum_{\substack{t\leqslant\sqrt{N}\\(t,m)=1}}\frac{\mu(t)}{t\phi(t)}\sum_{\substack{v\leqslant N/t\\(v,mt)=1}}\frac{\mu(v)}{v}\log v+\sum_{\sqrt{N}<t\leqslant N}=$$

$$-\sum_{\substack{t\leqslant\sqrt{N}\\(t,m)=1}}\frac{\mu(t)}{t\phi(t)}\frac{rt}{\phi(rt)}+O(\mathrm{e}^{-c_5\sqrt{\log N}})=$$

$$-\frac{m}{\phi(m)}\sum_{\substack{t=1\\(t,m)=1}}^{\infty}\frac{\mu(t)}{\phi^2(t)}+O(\mathrm{e}^{-c_5\sqrt{\log N}})=$$

$$-G(m)+O(\mathrm{e}^{-c_5\sqrt{\log N}})$$

类似地，利用式 ⑨ 可推出

$$\sum\nolimits_2=\sum_{\substack{t\leqslant\sqrt{N}\\(t,m)=1}}\frac{\mu(t)\log t}{t\phi(t)}\sum_{\substack{v\leqslant N/t\\(v,mt)=1}}\frac{\mu(v)}{v}+\sum_{\substack{\sqrt{N}<t\leqslant N\\(t,m)=1}}\sum_{\substack{v\leqslant N/t\\(v,mt)=1}}\frac{\mu(v)}{v}=$$

$$O(\mathrm{e}^{-c_4\sqrt{\log N}})$$

综合以上各式即得引理.

定理 1 的证明　我们有

$$\hat{D}(N)=-\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)\sum_{d\mid N-n}a(d)=$$

$$-\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)\sum_{\substack{d\mid N-n\\(d,N)=1}}a(d)-\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)\sum_{\substack{d\mid N-n\\(d,N)>1}}a(d)=I_1+I_2 \tag{14}$$

显有

$$I_2=O(N^{\frac{2}{3}}) \tag{15}$$

以及

$$I_1 = \sum_{n\leq N}\sum_{d_1|N}a(d_1)\sum_{\substack{d_2|N-n\\(d_2|N)=1}}a(d_2) =$$

$$\sum_{n\leq N}\Big(\sum_{\substack{d_1|n\\d_1\leq Q}}a(d_1)+\sum_{\substack{d_1|n\\d_1>Q}}a(d_1)\Big)\Big(\sum_{\substack{d_2|N-n\\(d_2|N)=1\\d_2\leq Q}}a(d_2)+\sum_{\substack{d_2|N-n\\(d_2|N)=1\\d_2>Q}}a(d_2)\Big) =$$

$$\sum\nolimits_1 + R_1 + R_2 + R_3 \qquad ⑯$$

其中 $$\sum\nolimits_1 = \sum_{n\leq N}\sum_{\substack{d_1|n\\d_1\leq Q}}a(d_1)\sum_{\substack{d_2|N-n\\d_2\leq Q\\(d_2,N)=1}}a(d_2)$$

容易看出

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{n\leq N}\sum_{\substack{d_1|n\\d_1\leq Q}}a(d_1)\sum_{\substack{d_2|N-n\\d_2\leq Q\\(d_2,N)=1}}a(d_2) = \sum_{\substack{d_2\leq Q\\(d_2,N)=1}}a(d_2)\sum_{\substack{d_1\leq Q\\(d_1,d_2)=1}}a(d_1)\sum_{\substack{d_1n\leq N\\d_1n\equiv N(d_2)}}1 =$$

$$N\sum_{\substack{d_2\leq Q\\(d_2,N)=1}}\frac{a(d_2)}{d_2}\sum_{\substack{d_1\leq Q\\(d_1,d_2)=1}}\frac{a(d_1)}{d_1}+O(Q^2\log^2 N) \qquad ⑰$$

从式 ⑰,引理 2 和引理 3,就得到

$$\sum\nolimits_1 = N\sum_{\substack{d_2\leq Q\\(d_2,N)=1}}\frac{\mu(d_2)\log d_2}{d_2}\sum_{\substack{d_1\leq Q\\(d_1,d_2)=1}}\frac{\mu(d_1)\log d_1}{d_1}+O(N\log^{-1}N) =$$

$$-N\sum_{\substack{d_2\leq Q\\(d_2,N)=1}}\frac{\mu(d_2)\log d_2}{\phi(d_2)}+O(N\log^{-1}N) = G(N)N+O(N\log^{-1}N)$$

定理证毕.

现在来证明定理 2.

定理 2 的证明

$$R_1 = \sum_{n\leq N}\sum_{\substack{d_1|n\\d_1\leq Q}}\mu(d_1)\log d_1\sum_{\substack{d_2|N-n\\(d_2,N)=1\\d_2>Q}}\mu(d_2)\log d_2 =$$

$$\sum_{d_1\leq Q}\mu(d_1)\log d_1\Big(\sum_{\substack{n\leq N\\n_1\equiv 0(d_1)}}\sum_{\substack{d_2|N-n\\(d_2,N)=1\\d_2>Q}}\mu(d_2)\log d_2\Big) =$$

$$\sum_{a_1\leq Q}\mu(d_1)\log d_1\Big(\sum_{\substack{n\leq N\\n_1\equiv 0(d)}}\Lambda(N-n)-\sum_{\substack{n\leq N\\n_1\equiv 0(d_1)}}\sum_{\substack{d_2|N-n\\(d_2,N)=1\\d_2\leq Q}}\mu(d_2)\log d_2\Big)+$$

$$O(N\log^{-1}N) =$$

$$\sum_{d_1 \leqslant Q}\mu(d_1)\log d_1\Bigg(\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv N(d_1)}}\Lambda(n) - \frac{N}{d_1}\sum_{\substack{d_2 \leqslant Q \\ (d_2, d_1)=1}}\frac{\mu(d_2)\log d_2}{d_2}\Bigg) + O(N\log^{-1}N) =$$

$$\sum_{d_1 \leqslant Q}\mu(d_1)\log d_1\Bigg(\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n_1 \equiv 0(d_1)}}\Lambda(n) - \frac{N}{\phi(d_1)}\Bigg) + O(N\log^{-1}N) =$$

$$\sum_{\substack{d_1 \leqslant Q \\ (d_1, N)=1}}\mu(d_1)\log d_1\Bigg(\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n_1 \equiv 0(d_1)}}\Lambda(n) - \frac{N}{\phi(d_1)}\Bigg) + O(N\log^{-1}N) =$$

$$O(N\log^{-1}N)$$

类似可证

$$R_2 = O(N\log^{-1}N)$$

定理证毕.

5　关于哥德巴赫问题①

——潘承洞

设

$$r(N) = \sum_{N = p_1 + p_2}\log p_1 \log p_2$$

本文证明了

$$r(N) = 2N\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p \mid N \\ p>2}}\left(1 + \frac{1}{p-2}\right) + R$$

这里

$$R = \sum_{n \leqslant N}\Lambda(n)a_{N-n} + O(n\log^{-1}N)$$

$$a_n = \sum_{\substack{d \mid n \\ d > A}}\mu(d)\log d, A = \sqrt{N}\log^{-16N}$$

令

$$r(N) = \sum_{N = p_1 + p_2}\log p_1 \log p_2 \qquad ①$$

这里 N 为偶数,p_1,p_2 为素数,哥德巴赫猜想就是要证明当 $N \geqslant 4$ 时恒有

$$r(N) > 0 \qquad ②$$

在本世纪 20 年代英国数学家 Hardy 及 Littlewood 利用他们所创造的"圆法"

① 原载山东大学学报,1981,第1期,1-6.

提出了下面更强的猜想

$$r(N) \sim 2N\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid N\\ p>2}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right) \qquad ③$$

此处 N 为大偶数.

本文的目的是要从另一个途径来研究哥德巴赫猜想,主要结果如下:

定理 设 N 为大偶数

$$A=\sqrt{N}\log^{-16N}, a_n=\sum_{\substack{d\mid n\\ d>A}}\mu(d)\log d$$

则

$$r(N)=2N\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid N\\ p>2}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)+R$$

这里

$$R=\sum_{n\leqslant N}\Lambda(n)a_{N-n}+O(N\log^{-1}N)$$

下面我们用 $C_1,C_2,C_3,\cdots$ 表示正的绝对常数.

引理 1 设 $r\leqslant N^{c_1}, \alpha=\dfrac{C_2}{\sqrt{\log N}}$,则当 $\sigma\geqslant 1-\alpha$ 时

$$\prod_{p\mid r}(1-p^{-s})^{-1}\ll \log^{c_3}N$$

这里 $s=\sigma+it$.

证明

$$\begin{aligned}\prod_{p\mid r}(1-p^{-s})^{-1}&=\prod_{p\mid r}\left(1+\frac{1}{p^s-1}\right)\ll\prod_{p\mid r}\left(1+\frac{1}{p^\sigma-1}\right)\ll\\&\exp\left(\sum_{p\mid r}\log\left(1+\frac{1}{p^\sigma-1}\right)\right)\ll\exp\left(\sum_{p\mid r}\frac{1}{p^\sigma-1}\right)\ll\\&\exp\left(C_4\sum_{p\mid r}\frac{1}{p^\sigma}\right)\ll\exp\left(\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2\right)\end{aligned} \qquad ④$$

此处

$$\sum\nolimits_1=C_4\sum_{\substack{p\mid r\\ p\leqslant e^{\sqrt{\log N}}}}\frac{1}{p^\sigma}$$

$$\sum\nolimits_2=C_4\sum_{\substack{p\mid r\\ p\leqslant e^{\sqrt{\log N}}}}\frac{1}{p^\sigma}$$

显见

$$\sum\nolimits_1\leqslant C_5e^{\alpha\sqrt{\log N}}\sum_{p\leqslant e^{\sqrt{\log N}}}\frac{1}{p}\leqslant C_6\log\log N \qquad ⑤$$

$$\sum\nolimits_2\leqslant e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log N}}\sum_{p\mid r}1\leqslant e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log N}}\log r=O(1)$$

由以上几式立即推出

$$\prod_{p|r}(1-p^{-s})^{-1} \ll \log^{c_3} N$$

引理 2 设 $r \leqslant N^{c_1}$，则

$$\sum_{\substack{N \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)}{n} = O(\mathrm{e}^{-c_7\sqrt{\log N}}) \quad ⑥$$

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)}{n}\log\frac{N}{n} = \frac{r}{\phi(r)} + O(\mathrm{e}^{-c_8\sqrt{\log N}}) \quad ⑦$$

证明

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)}{n}\log\frac{N}{n} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}T}^{a+\mathrm{i}T}\prod_{p|r}(1-p^{-1-s})^{-1}\frac{N^s}{s(1+s)s^2}\mathrm{d}s + O\left(\frac{N^a\log^2 N}{T}\right) ⑧$$

此处

$$a = \frac{1}{\log N}, T = \mathrm{e}^{\sqrt{\log N}} \quad ⑨$$

利用围道积分方法将积分线路移至$(-b-\mathrm{i}T, -b+\mathrm{i}T)$，这里 $b = \frac{C_2}{\sqrt{\log N}}$，则熟知

$$\frac{1}{s(1+s)} = O(\log N), \sigma \geqslant 1 - \frac{C_2}{\sqrt{\log N}}, |t| \leqslant T$$

再利用引理 1 的结果即得引理.（同法证 ⑥）

由引理 2 立即推出

$$\sum_{\substack{N \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -\frac{r}{\phi(r)} + O(\mathrm{e}^{-C_9\sqrt{\log N}}) \quad ⑩$$

引理 3

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{\phi(n)} = -2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|r \\ p>2}}\left(1+\frac{1}{p-2}\right) + O(\mathrm{e}^{-C_{14}\sqrt{\log N}})$$

⑪

证明

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{\phi(n)} = \sum_{\substack{n \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n}\frac{n}{\phi(n)} =$$

$$\sum_{\substack{n \leqslant N \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{N}\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} =$$

$$\sum_{d \leqslant N}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv O(d) \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n} =$$

$$\sum_{\substack{d \leq N \\ (d,r)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} \sum_{\substack{dn \leq N \\ (n,dr)=1}} \frac{\mu(nd)\log nd}{nd} =$$

$$\sum_{\substack{d \leq N \\ (d,r)=1}} \frac{\mu(d)}{d\phi(d)} \sum_{\substack{n \leq N/d \\ (n,dr)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n} +$$

$$\sum_{\substack{d \leq N \\ (d,r)=1}} \frac{\mu(d)\log d}{d\phi(d)} \sum_{\substack{n \leq N/d \\ (n,dr)=1}} \frac{\mu(n)}{n} = I_1 + I_2 \qquad ⑫$$

$$I_1 = \sum_{\substack{d \leq N \\ (d,r)=1}} \frac{\mu d}{d\phi(d)} \sum_{\substack{n \leq N/d \\ (n,dr)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n} =$$

$$\sum_{\substack{d \leq \sqrt{N} \\ (d,r)=1}} \frac{\mu(d)}{d\phi(d)} \sum_{\substack{n \leq N/d \\ (n,dr)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n} + I_3 \qquad ⑬$$

$$I_3 = \sum_{\substack{\sqrt{N} < d \leq N \\ (d,r)=1}} \frac{\mu(d)}{d\phi(d)} \sum_{\substack{n \leq N/d \\ (n,dr)=1}} \frac{\mu(n)\log n}{n} = O(\mathrm{e}^{-C_{10}\sqrt{\log N}}) \qquad ⑭$$

由引理 2 及 ⑬,⑭ 得到

$$I_1 = -\sum_{\substack{d \leq \sqrt{N} \\ (d,r)=1}} \frac{\mu(d)}{d\phi(d)} \frac{dr}{\phi(dr)} + O(\mathrm{e}^{-C_{11}\sqrt{\log N}}) =$$

$$-\frac{r}{\phi(r)} \sum_{\substack{d \leq \sqrt{N} \\ (d,r)=1}} \frac{\mu(d)}{\phi^2(d)} + O(\mathrm{e}^{-C_{11}\sqrt{\log N}}) =$$

$$-\frac{r}{\phi(r)} \prod_{p \mid r} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) + O(\mathrm{e}^{-C_{12}\sqrt{\log N}}) =$$

$$-2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p \mid r \\ p>2}} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) + O(\mathrm{e}^{-C_{12}\sqrt{\log N}})$$

由引理 2 的 ⑥ 可以证明

$$I_2 = O(\mathrm{e}^{-C_{13}\sqrt{\log N}})$$

引理得证.

现在来证明本文的主要结果,令

$$D(N) = \sum_{n \leq N} \Lambda(n)\Lambda(N-n) \qquad ⑮$$

则

$$D(N) = r(N) + O(\sqrt{N}\log^3 N) \qquad ⑯$$

$$D(N) = -\sum_{n \leq N} \Lambda(n) \sum_{d \mid N-n} \mu(d)\log d =$$

$$-\sum_{n \leq N} \Lambda(n) \sum_{\substack{d \mid N-n \\ d \leq A}} \mu(d)\log d - \sum_{n \leq N} \Lambda(n)\alpha_{N-n} =$$

$$-\sum_{d \leq A} \mu(d)\log d \sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv N(d)}} \Lambda(n) - R \qquad ⑰$$

此处

$$R = \sum_{n \leqslant N} \Lambda(n) \alpha_{N-n}$$

而

$$\sum_{d \leqslant A} \mu(d) \log d \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv N(d)}} \Lambda(n) = \sum_{\substack{d \leqslant A \\ (d,N)=1}} \mu(d) \log d \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv N(d)}} \Lambda(n) + O(\sqrt{N} \log N^3) =$$

$$N \sum_{\substack{d \leqslant A \\ (d,N)=1}} \frac{\mu(d) \log d}{\phi(d)} + \sum_{\substack{d \leqslant A \\ (d,N)=1}} \mu(d) \log d \left(\sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv N(d)}} \Lambda(n) - \frac{N}{\phi(d)} \right) + O(\sqrt{N} \log^3 N)$$

由 Bombieri 的均值定理得到

$$\sum_{d \leqslant A} \mu(d) \log d \sum_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv N(d)}} \Lambda(d) = N \sum_{\substack{d \leqslant A \\ (d,N)=1}} \frac{\mu(d) \log d}{\phi(d)} + O(N \log^{-1} N)$$

由引理 3 得到

$$D(N) = 2N \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-2)^2}\right) \prod_{\substack{p \mid N \\ p>2}} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right) + R$$

这里

$$R = \sum_{n \leqslant N} \Lambda(n) \alpha_{N-n} + O(N \log^{-1} N)$$

由上式及 ⑯ 定理得证.

6 关于哥德巴赫问题的余区间[①]

——潘承洞

设 N 为大偶数,令

$$r(N) = \int_0^1 S^2(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha \tag{①}$$

这里

$$S(\alpha) = \sum_{n \leqslant N} \Lambda(n) e^{2\pi i n \alpha}$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

再令 $L = \log N$, $\tau = NL^{-15}$,将积分区间移至$\left(-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau}\right)$,用 $M_{a,q}$ 表示区间

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \ |\beta| \leqslant \frac{1}{\tau}, 1 \leqslant q \leqslant L^{17}, (a,q) = 1$$

① 原载山东大学学报,1980,第 3 期,1 - 4.

显然这些小区间互不重叠，以 m 表示这些小区间的总和，称为基本区间，余下的部分记作 E 称为余区间，我们将下面这些小区间的总和记作 E_1

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \mid \beta \mid \leqslant \frac{1}{q\tau}, L^{17} < q \leqslant \tau L^{-1-\varepsilon}, (a, q) = 1 \qquad ②$$

这里 ε 为任意小的正数.

本文的目的是要证明下面的定理.

定理

$$\int_{E_1} \mid S(\alpha) \mid^2 \mathrm{d}\alpha \ll NL^{-\varepsilon} \qquad ③$$

显然，定理的意义在于缩小了余区间的研究范围.

当 $q \leqslant L^{17}$ 时，由 Siegel - Walfisz 定理容易得到下面的估计

$$S(\frac{a}{q} + \beta) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \sum_{n \leqslant N} \mathrm{e}^{2\pi i n\beta} + O(N\mathrm{e}^{-C_1\sqrt{L}}) \qquad ④$$

这里 c_1 为一正常数.

由上式得到

$$S^2(\frac{a}{q} + \beta) = \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} (\sum_{n \leqslant N} \mathrm{e}^{2\pi i n\beta})^2 + O(N^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}C_1\sqrt{L}}) \qquad ⑤$$

由经典方法我们得到下面的结论

$$\int_M S^2(\alpha)\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha N}\mathrm{d}\alpha = N \sum_{q \leqslant L^{17}} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} \mathrm{e}^{-2\pi i\frac{a}{q}N} + O\left(\frac{N}{L^2}\right) \qquad ⑥$$

现在来证明本文的主要定理，设 $e(\alpha n) = \mathrm{e}^{2\pi i\alpha n}$，令

$$T(\alpha, n) = \sum_{m \leqslant n} e(\alpha m)$$

$$S(\alpha, n) = \sum_{m \leqslant n} \Lambda(m) e(\alpha m)$$

显有

$$T(\beta, n) = e(n\beta)T(0, n) - 2\pi i\beta \int_0^n e(t\beta)T(0, t)\mathrm{d}t \qquad ⑦$$

$$S(\frac{a}{q} + \beta, n) = e(n\beta)S(\frac{a}{q}, n) - 2\pi i\beta \int_0^n e(t\beta)S(\frac{a}{q}t)\mathrm{d}t \qquad ⑧$$

由 ⑦ 及 ⑧ 得到

$$S(\frac{a}{q} + \beta, n) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\beta, n) = e(n\beta)\left\{S(\frac{a}{q}, n) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0, n)\right\} -$$
$$2\pi i\beta \int_0^n e(\beta t)\left\{S(\frac{a}{q}, t) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0, t)\right\}\mathrm{d}t \qquad ⑨$$

所以

$$\left| S(\frac{a}{q} + \beta, n) - \frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\beta, n) \right| \leqslant$$

$$\left|S\left(\frac{a}{q},N\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,N)\right|+$$

$$2\pi|\beta|\int_0^N\left|S\left(\frac{a}{q},t\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,t)\right|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$(1+2\pi|\beta|N)\max_{V\leqslant N}\left|S\left(\frac{a}{q},V\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,V)\right| \qquad ⑩$$

设 $\alpha=\frac{a}{q}+\beta$ 为 E_1 中的点,则有 $|\beta|\leqslant L^{-1}N^{-1}$,所以当 $\alpha\in E_1$ 时有

$$\left|S\left(\frac{a}{q}+\beta,N\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\beta,N)\right|\leqslant 2\max_{V\leqslant N}\left|S\left(\frac{a}{q},V\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,V)\right| \qquad ⑪$$

而

$$\left|S^2\left(\frac{a}{q}+\beta,N\right)\right|\leqslant\left|S\left(\frac{a}{q}+\beta,N\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\beta,N)+\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\beta,N)\right|^2\leqslant$$

$$2\left|S\left(\frac{a}{q}+\beta,N\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\beta,N)\right|^2+$$

$$2\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}|T(\beta,N)|^2$$

令 $Q=\tau L^{-1}$,则由上式得到

$$\int_{E_1}|s(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha\leqslant 2\sum_{L^{17}<q\leqslant Q}\sum_{(a,q)=1}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}\left|S\left(\frac{a}{q}+\beta,N\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\beta,N)\right|^2\mathrm{d}\beta+$$

$$2\sum_{L^{17}<q\leqslant Q}\frac{1}{\phi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}\int_{-\frac{1}{q\tau}}^{\frac{1}{q\tau}}|T(\beta,N)|^2\mathrm{d}\beta \qquad ⑫$$

由 ⑪ 及 ⑫ 得到

$$\int_{E_1}|S(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha\leqslant 4\max_{V\leqslant N}\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{q\tau}\sum_{(a,q)=1}\left|S\left(\frac{a}{q},V\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,V)\right|^2+O(NL^{-1})$$

⑬

为了估计 ⑬ 右边的和,我们需要下面的引理.

引理 设 $A>0,Q_1=NL^{-A}$,则

$$\max_{V\leqslant N}\sum_{q\leqslant Q_1}\frac{1}{q}\sum_{(a,q)=1}\left|S\left(\frac{a}{q},V\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,V)\right|^2\ll N^2L^{1-A}$$

证明

$$\sum_{q\leqslant Q_1}\frac{1}{q}\sum_{(a,q)=1}\left|S\left(\frac{a}{q},V\right)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,V)\right|^2=$$

$$\sum_{q\leqslant Q_1}\frac{1}{q}\sum_{(a,q)=1}\left|\sum_{(l,q)=1}e\left(\frac{a}{q}l\right)\sum_{\substack{n\leqslant V\\ n\equiv l(q)}}\Lambda(n)-\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(0,V)\right|^2+O(Q_1^2)=$$

$$\sum_{q\leqslant Q_1}\frac{1}{q}\sum_{(a,q)=1}\left|\sum_{(l,q)=1}e\left(\frac{a}{q}l\right)\Psi(l,q,V)-\frac{T(0,V)}{\phi(q)}\right|^2+O(Q_1^2)\leqslant$$

$$\sum_{q\le Q_1}\frac{1}{q}\sum_{a=1}^{q}\left|\sum_{(l,q)=1}e\left(\frac{a}{q}l\right)\Psi(l,q,V)-\frac{T(0,V)}{\phi(q)}\right|^2+O(Q_1^2)\ll$$

$$\sum_{q\le Q_1}\sum_{(l,q)=1}\left|\Psi(l,q,V)-\frac{V}{\phi(q)}\right|^2+O(Q_1^2)$$

由熟知的 Барбан 均值定理①立即推出所需结果.

由 ⑬ 及引理,我们得到

$$\int_{E_1}|S(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha\ll\frac{NQL}{\tau}+O(NL^{-1})\ll NL^{-\varepsilon}$$

定理得证.

7 哥德巴赫猜想与潘承洞

——刘建亚

人的首要责任就是要有雄心.在拿破仑的雄心中有某些高贵的因素,但是最高贵的雄心,就是要在死后留下具有永久价值的东西.

——哈代:《一个数学家的自白》

编者按:也许是因为徐迟的那篇充满激情和诗意的报告文学,也许是因为历史的因缘巧合,哥德巴赫猜想居然成了中国人家喻户晓的一个名词.这个词代表了一段传奇,代表了一代人的集体记忆,也代表了一个民族的光荣与梦想.直到今天,仍然有难以计数的人们,有大学老师、中学老师,甚至工人、农民,为哥德巴赫猜想着魔.

我们无法准确地评价延续 20 多年的"哥德巴赫猜想现象".也许不同的人站在不同的视角上,都会发出自己的思考.

而下面的文章,则纯粹从学术的角度介绍了哥德巴赫猜想的研究历史,也是一篇很好的科普文章.希望有助于人们更深入地了解哥德巴赫猜想,当然,我们也把此文献给去世 5 年的潘承洞先生——他的名字已经镌刻在哥德巴赫猜想研究的年表上.

7.1 数学与数论

数学王子高斯有一句名言:"数学是科学的女王."他又讲"数论是数学的王

① P. X. Gallagher, The large sieve, Mathematika, Vol. 14, 1967.

冠”.正如他所说,数论在数学中一直处于醒目的地位.

18世纪的领袖数学家拉格朗日有一个著名的定理,即任何一个正整数都能写成四个整数的平方和.这个定理是费马早年的猜测,与拉格朗日同时代的大数学家欧拉曾经给出一个不完整的证明.第一个完整的证明是拉格朗日给出的.他在完成这个工作之后很感慨,在给欧拉的一封信中,他说:“对我来讲,算术是最难的.”这里,算术就是数论.这是拉格朗日对数论的评价.

7.2 何谓哥德巴赫猜想

俄国数学家辛钦(A.Ya.Shinchin)曾经评论说,哥德巴赫猜想是王冠上的一颗明珠.当然,这个王冠上可能还有其他明珠.

哥德巴赫并不是职业数学家,而是一个喜欢研究数学的富家子弟.他于1690年生于德国哥尼斯堡,受过很好的教育.哥德巴赫喜欢到处旅游,结交数学家,然后跟他们通信.1742年,他在给好友欧拉的一封信里陈述了他著名的猜想——哥德巴赫猜想.欧拉在回信中说,他相信这个猜想是正确的,虽然他不能给出证明.

用当代语言来叙述,哥德巴赫猜想有两个内容,第一部分叫做奇数的猜想,第二部分叫做偶数的猜想.奇数的猜想指出,任何一个大于等于7的奇数都是三个素数的和.偶数的猜想是说,大于等于4的偶数一定是两个素数的和.

任何人看了这个猜想之后,都能发现这是一个漂亮的猜想.本人认为,一个好的猜想应该具备以下四个条件.第一,它的表述应该很简单,大凡智力正常的人一听就能明白.我相信,小学四、五年级的学生都能明白哥德巴赫猜想的内容.第二个条件,虽然表述很简单,但是这个猜想的证明断然不能简单.第三点,一旦有了证明,这个证明一定是出人意料的.一个好的猜想的证明一定是有趣的,绝对不能像愚公移山一样,天天重复同样枯燥的工作,重复了上万年,才取得成功.第四点,这个猜想绝对不能是孤立的,任何孤立的猜想在数学中都没有太大的意义.一个好的猜想的研究应该可以提升到人类文化史的高度上来看,能够带动其他相关领域甚至是数学以外的学科的发展.具备上面这四点,那就是一个伟大的猜想.我个人认为,哥德巴赫猜想就具备以上这四个条件.

给定一个猜想,人们可以用各种各样的方法进行研究.譬如,对于哥德巴赫猜想,有人可能用数手指头的方法来研究,这人可能是个小学生.有人想用打算盘的方法来研究,那这人可能是一个小店的会计兼出纳.真正研究这个猜想,则需要很高深的数学工具.还必须指出的是,从这个猜想可以看出数学的特征——数学是在所有学科当中唯一能够处理无穷的学科.我们不能用做实验的方法来研究哥德巴赫猜想.计算机算得再快,也只能在有限时间内算有限个数;然而,遗憾的是,奇数和偶数都有无穷多个.所以,这个猜想让迷信实验的人非

常沮丧.不过,在最好的计算机所能算到的范围之内,哥德巴赫猜想全是对的.

7.3 奇数的哥德巴赫猜想

相对来讲,奇数的猜想比较容易,因为它是偶数的猜想的推论.如果每个大偶数都能写成两个素数之和,那么我们就能够证明任何大奇数都是三个素数之和,因为任何奇数减去3都是一个偶数.

关于哥德巴赫猜想的研究,历史上第一个重要文献是哈代(G.H.Hardy)和李特伍德(J.E.Littlewood)1921年的伟大论文,在这篇长达70页的文章里,他们提出了圆法.哈代在英国皇家学会演讲时说:"我和李特伍德的工作是历史上第一次严肃地研究哥德巴赫猜想."虽然此前很多有名的数学家都研究过这个猜想,甚至有人宣布证明了猜想.然而,哈代和李特伍德对奇数猜想的证明依赖于一个条件——广义黎曼猜想——这个猜想到现在也未被证明.在英国人看来,哈代重振了牛顿以后的英国分析.

1937年,俄国数学家维诺格拉多夫无条件地基本证明了奇数的哥德巴赫猜想.维诺格拉多夫定理指出,任何充分大的奇数都能写成三个素数之和.也就是说,在数轴上取一个大数,从这个数往后看,哥德巴赫猜想都对;在这个数前面的奇数,需要用手或计算机来验证.然而,至今计算机还未能触及那个大数.

维诺格拉多夫的证明发表之后,又出现了几个新证明.这些证明既简洁,又提供了完全不同的方法.在这些新证明中,有三个特别应该强调的:一个是俄国数学家林尼克的,再一个是潘承彪先生的,还有英国数学家沃恩的.在相当长的一个阶段内,人们认为林尼克是离哥德巴赫猜想很近的人,他对哥德巴赫猜想进行了深入的研究.与此同时,他还是一个很好的数理统计学家.

7.4 偶数哥德巴赫猜想

很遗憾,偶数的哥德巴赫猜想到现在都没有得到证明.但是,数学家们从各个方向逼近这个猜想,并且取得了辉煌的成就.我将介绍研究偶数的哥德巴赫猜想的四个途径,其中几乎每个途径都有潘老师的工作.这四个途径分别是:殆素数,例外集合,小变量的三素数定理,以及几乎哥德巴赫问题.

7.5 途径一:殆素数

殆素数就是素因子个数不多的正整数.现设 N 是偶数,虽然现在不能证明 N 是两个素数之和,但是可以证明它能够写成两个殆素数的和,即 $N=A+B$,其中 A 和 B 的素因子个数都不太多,譬如说素因子个数不超过10.现在用$(a+b)$来表示如下命题:每个大偶数 N 都可表为 $A+B$,其中 A 和 B 的素因子个数分别不超过 a 和 b.显然,哥德巴赫猜想就可以写成$(1+1)$.在这一方向上的进

展都是用所谓的筛法得到的.

1920年,布朗首先取得突破性的进展,证明了命题(9+9).后续进展如下:拉德马赫尔,1924,(7+7);埃斯特曼,1932,(6+6);里奇,1937,(5+7);布赫夕塔布,1938,(5+5);布赫夕塔布,1940,(4+4);库恩,1941,$a+b$小于或等于6.1950年,菲尔兹奖得主塞尔伯格改进了筛法.王元先生1956年证明了(3+4).另一个原苏联数学家维诺格拉多夫1957年证明了(3+3),王元先生1957年进一步证明了(2+3).

上述结果有一个共同的特点,就是a和b中没有一个是1,即A和B没有一个是素数.所以,要是能证明$a=1$,再改进b,那就是一件更了不起的工作.林尼克1941年提出来的大筛法使得这项工作成为可能.后来,林尼克的学生、匈牙利数学家兰易深入地研究了大筛法,并在1948年证明了命题$(1+b)$.用王元先生的话说,这个b是个天文数字.当时,没有人知道b究竟有多大.这个b的数值依赖于素数在算术级数中平均分布的水平,即另外一个重要常数θ的值.

此后便是潘承洞先生的伟大工作.1962年,28岁的潘承洞定出θ可以取1/3,从而推出命题(1+5),一下子把b从天文数字降到了5.这是一个决定性的突破.王元先生改进筛法之后,证明了(1+4).同一年,潘老师又得到了一个更大的$\theta=3/8$.从3/8出发,潘老师也证明了(1+4).然后,布赫夕塔布证明了3/8蕴涵命题(1+3),即从潘老师的$\theta=3/8$可以推出命题(1+3)来.以上结果表明,θ做得越大,b就越小.但θ不能太大,其可能的最大值是1/2;比1/2再大,均值定理的形式就会发生变化,所以可以认为1/2是最佳.1965年,θ的最佳值1/2被取到,这个定理就叫做朋比尼-维诺格拉多夫定理,是庞比尼和维诺格拉多夫独立证明的.朋比尼是意大利数学家,因为这项工作获得了菲尔兹奖.虽然朋比尼证明了θ能取到1/2,但是他未能证明(1+2).

命题(1+2)的证明是陈景润先生完成的.1966年,陈景润先生在《科学通报》上登了命题(1+2)证明的简报,此后"文化大革命"开始,《科学通报》与《中国科学》随即停刊.直到1973年《中国科学》复刊之后,陈先生(1+2)证明的全文才得以发表.

以上是沿着殆素数方向研究哥德巴赫猜想的进展.直到现在,(1+2)还是最好的结果.虽然突破(1+2)就会得到(1+1),但是大家公认再用筛法去证明(1+1)几乎是不可能的,只有发展革命性的新方法,才有可能证明(1+1),所以,哈伯斯坦在他们的名著《筛法》(《Sieve Methods》)的最后一章指出:"陈氏定理是所有筛法理论的光辉顶点."

7.6 途径二:例外集合

在数轴上取定大整数x,再从x往前后,寻找使得哥德巴赫猜想不成立的

那些偶数,即例外偶数. x 之前所有例外偶数的个数记为 $E(x)$. 我们希望,无论 x 多大, x 之前只有一个例外偶数,那就是 2,即只有 2 使得猜想是错误的.这样一来,哥德巴赫猜想就等价于 $E(x)$永远等于 1.当然,直到现在还不能证明 $E(x)=1$;但是能够证明 $E(x)$远比 x 小.在 x 前面的偶数个数大概为 $x/2$;如果当 x 趋于无穷大时, $E(x)$与 x 的比值趋于零,那就说明这些例外偶数密度是零,即哥德巴赫猜想对于几乎所有的偶数成立.这就是例外集合的思路.

维诺格拉多夫的三素数定理发表于 1937 年.第二年,在例外集合这一途径上,就同时出现了四个证明,其中,包括华罗庚先生的著名定理.

现在,我每个月都要接见几个业余搞哥德巴赫猜想的人,其中不乏有人声称"证明"了哥德巴赫猜想在概率意义下是对的.实际上他们就是"证明"了例外偶数是零密度.我告诉他们,这个结论华老早在 60 年前就真正证明出来了.

注意,我们的目标是证明 $E(x)$的上界是 x 的零次方,然而 1938 年 $E(x)$上界的世界记录基本上是 x 的 1 次方,二者相差很远.因此降低该上界中 x 的方次将是一件很重要的事.1975 年,蒙哥马利与沃恩证明存在一个小于 1 的正数 δ,使得 $E(x)$的上界是 x 的 δ 次方.1979 年,潘老师与陈景润先生合作,证明了这个 δ 可以取 0.99.按照陈先生和潘老师的思路,后来有很多人都改进了 δ 的值.目前最好的结果是李红泽教授 2000 年得到的, δ 可以取 0.92.

在广义黎曼猜想之下,哈代和李特伍德证明了 δ 可取 1/2,就是说,即使能够证明广义黎曼猜想,我们也不能进而推出哥德巴赫猜想.最近,我与叶扬波教授合作,利用广义黎曼猜想和 L - 函数零点分布的统计规律猜想,进一步推进了例外集合的上界,证明了 $E(x)$不超过 $\log x$ 的平方.请注意,与 x 的任何 δ 次方相比, $\log x$ 增长都是很慢的.因此我们的结果指出, $E(x)$小于 x 的任何 δ 次方.

但是我们毕竟没能证明哥德巴赫猜想.到目前为止,猜想研究的现状仍然可以用潘老师生前的一句话来概括,即"哥德巴赫猜想甚至没有一个假设性的证明".哈代 1921 年在皇家学会演讲时指出:"哥德巴赫猜想似乎不能用布朗的方法(即筛法)来证明."他说:"能够最终证明猜想的方法,应该与我与李特伍德圆法类似.我们不是在原则上没有成功,而是在细节上没有成功."哈代同时还指出,不是圆法无力,而是他与李特伍德的分析能力不够.作者认为,更高阶的 L - 函数应该是哈代和李特伍德所需要的分析工具;或许,将高阶的 L - 函数融入圆法就会最终证明哥德巴赫猜想.

7.7 途径三:小变量的三素数定理

上文曾经提到,如果偶数的哥德巴赫猜想正确,那么奇数的猜想也正确.我们可以把这个问题反过来思考.已知奇数 N 可以表示成三个素数之和,假如又

能证明这三个素数中有一个非常小,譬如说第一个素数可以总取 3,那么我们也就证明了偶数的哥德巴赫猜想.这个思想就促使潘承洞先生在 1959 年,即他 25 岁时,研究有一个小素变数的三素数定理.这个小素变数不超过 N 的 θ 次方.我们的目标要证明 θ 可以取 0,即这个小素变数有界,从而推出偶数的哥德巴赫猜想.潘承洞先生首先证明 θ 可取 1/4.后来的很长一段时间内,这方面的工作一直没有进展,直到 1995 年展涛教授把潘老师的定理推进到7/120.这个数已经比较小了,但是仍然大于 0.

7.8　途径四:几乎哥德巴赫问题

1953 年,林尼克发表了一篇长达 70 页的论文.在文中,他率先研究了几乎哥德巴赫问题,证明了,存在一个固定的非负整数 k,使得任何大偶数都能写成两个素数与 k 个 2 的方幂之和.这个定理,看起来好像丑化了哥德巴赫猜想,实际上它是非常深刻的.我们注意,能写成 k 个 2 的方幂之和的整数构成一个非常稀疏的集合;事实上,对任意取定的 x, x 前面这种整数的个数不会超过 $\log x$ 的 k 次方.因此,林尼克定理指出,虽然我们还不能证明哥德巴赫猜想,但是我们能在整数集合中找到一个非常稀疏的子集,每次从这个稀疏子集里面拿一个元素贴到这两个素数中去,这个表达式就成立.这时的 k 用来衡量几乎哥德巴赫问题向哥德巴赫猜想逼近的程度,数值较小的 k 表示更好的逼近度.显然,如果 k 等于 0,几乎哥德巴赫问题中 2 的方幂就不再出现,从而,林尼克的定理就是哥德巴赫猜想.

林尼克 1953 年的论文并没有具体定出 k 的可容许数值,此后四十多年间,人们还是不知道一个多大的 k 才能使林尼克定理成立.但是按照林尼克的论证,这个 k 应该很大.1999 年,作者与廖明哲及王天泽两位教授合作,首次定出 k 的可容许值 54 000.这第一个可容许值后来被不断改进.其中有两个结果必须提到,即李红泽、王天泽独立地得到 $k=2\,000$.目前最好的结果 $k=13$ 是英国数学家希思、布朗和德国数学家普赫塔(Puchta)合作取得的,这是一个很大的突破.

7.9　一个数学家的价值

以上缅怀了潘承洞先生的部分工作,以及哥德巴赫猜想研究的最新进展.最后,我想引用哈代《一个数学家的自白》中的几句话,来总结作为数学的潘承洞先生的生平.哈代说:

> "人的首要责任就是要有雄心.在拿破仑的雄心中有某些高贵的因素,但是最高贵的雄心,就是要在死后留下具有永久价值的东西."

《一个数学家的自白》结尾写道：

> “我的一生，或者在相同意义上作为数学家的那些人的一生，可以这样总结：我们丰富了知识，也帮助别人更多地丰富了知识，而我们所做的这一切，与那些历史上的大数学家和艺术家的不朽贡献相比，只有程度的不同，没有本质的差异.”

哈代的朋友罗素说过：

> “我希望在工作中满足地死去，因为我清楚地知道，所有能做的事都已完成，而且会有后人继续我未竟的事业.”

潘承洞老师永垂不朽，因为他的事业永垂不朽.

（本文根据作者在纪念潘承洞院士逝世5周年学术报告会上讲演整理而成，整理者：徐长平、曲彦. 刘建亚是潘承洞先生的学生，现为“长江学者奖励计划”特聘教授，山东大学数学与系统科学学院副院长）

8 小于3亿的全部偶数均为哥德巴赫数①

——尹定

“不小于6的任一偶数都是两个素数之和”这就是至今未能证明的哥德巴赫猜想. 国外已有人验证1亿之内的全部偶数都是两个素数之和.

最近我们用计算机证实1亿到3亿之间的全部偶数也都是两个素数之和.

若 M,L 为两偶数，$M<L$，X 为$[M,L]$间的一个偶数. 令 $X=P_1+P_2$. P_1，P_2 均为素数，则可能有许多解. 这个程序能找出使 P_1 最小的一种解. 具体做法如下：

(1)用筛法找出小于$[\sqrt{L}]$的全部奇素数序列 P_1.

(2)用筛法找出 $M-[\sqrt{L}]$到 L 间的全部素数序列 P_2.

(3)由小到大顺序用 P_1 中的一个素数加 P_2 中的一个素数，得一偶数. 若这个偶数在区间$[M,L]$内则将它剔除. 这样可按 P_1 的大小对$[M,N]$间的偶数

① 原载《科学通报》，1984年1150页.

分类.

(4)若以上工作做完,$[M, L]$间仍有偶数未被剔除,则应作进一步验证.但实际计算表明,1亿到3亿间的1亿个偶数中 P_1 大于1 000的偶数只有30个,最大 P_1 值也仅为1 321,远远小于$[\sqrt{L}]$.

9 缅怀我的导师潘承洞院士

——展涛

潘承洞先生是杰出的数学家、教育家,1997年12月27日离开了我们,至今已经5年了.

作为潘老师的学生,我在近20年的时间里,除了中间在国外学习进修外,其他的时间基本上都是以潘老师的学生、学术科研助手以及后来作为副校长的身份陪伴在他的左右.应该说,我对潘校长的了解是比较多的.但是,在今天这个时刻,我发现自己的语言是多么贫乏.

作为教师,潘老师首先是一位敬业的教师,是一位把数学看得比生命还重的教师.我1979年进入数学系,数学分析的第一堂课是潘老师讲的.回忆往事,仿佛就是昨天:黑板前他那高大的身影,一笔一画特别认真仔细的板书,还有铿锵有力、非常简洁的话语.他的板书总是从左边开始,由于潘老师是1.85米的大个子,从左边最高处写着写着就往右低下去了,所以看到的是一行行斜线.他近视得厉害,所以他写的字特别大,生怕学生们看不见,而且特别用力.他讲的课很有自己的特色,内容不是非常的细致,但是他站得很高,能留给学生非常多的遐想和自由思考的空间.后来听他的第二堂课,是他自己和于秀源一起写的《阶的估计》.还听过他的一门数论基础课,那是在1982年,潘老师给本科生讲的最后一门课,以后他没有再给本科生上课.那时潘老师已经有病了,但是他只是意识到自己的身体不舒服,没有当回事,一节课没讲完,已是大汗淋漓,然后说讲不动了,休息一会儿,第二节课继续讲.后来查出来,他那时已经长了肿瘤,现在回忆起他当时讲课的镜头,我仍然非常感动.

潘老师第一次住院做肿瘤手术时候,我刚刚考上研究生,在师母的安排下给他送饭.手术之后不久,潘老师觉得无聊,想看书,他给了我一个纸条,上面写了两本书的名字,让我悄悄地把那本书带去.我那时年轻,不懂事,真的按照他的要求做了,从数学院的资料室借了书带给他,记得其中的一本特别厚,是关于函数论方面的.后来,没过两天,就听说大夫和护士非常严厉地批评了他,还问是谁把书带给他的.潘老师在病床上跟我们谈的就是学习怎么样,看了什么新

书，然后讲我们能听得懂的数论或者数学其他方面的知识．那是最初和老师近距离地接触．

作为一个老师，他是一个特别爱学生的人．经常在周末的时候到我们的教室里转，看到我们在上自习，就非常高兴，问我们看了什么书，有什么收获．特别是我在做了研究生之后，就更能亲身感受到他对学生的那种爱．我们每个人的博士论文，几乎都是潘校长给定的题目，许多学术上的成果，都包含着他的心血，而且都包含着他许多独特的、关键的思想．但是，我们没有一个人和他联名写过论文．每一篇论文后面只写了几个字——感谢潘承洞教授．

作为老师，潘老师还是一个特别富有人格魅力的人．他很少直接告诉我们应该怎样做事、做人，但是他的言谈举止，他的一举一动，对我们影响很大，有人说，我讲的普通话有点像南方普通话，起初，我百思不得其解，后来有人不经意地问我是不是受潘老师的影响，我才恍然有点觉察．而且现在我说话走路的一些方式，往往不自觉地在模仿潘老师的动作，因为非常崇敬他．在他的周围聚集了一批非常优秀的年轻人，而且这些年轻人基本上都有一段海外的经历，但几乎所有人都自觉地、开心地回到他身边，在他身边工作，为学校工作，为我们的祖国工作．

作为一个学者，潘老师是一位大学者．“大”是指他事业之大．他本身研究的领域就比较宽了，但他还考虑一些相关领域的发展．像信息网络安全，数论在信息网络安全中的应用，他就非常敏锐地意识到这是非常有发展前途的方向．于是果断决定招收了研究生，并为他们的学习创造了难得的条件，这就为一个新的领域的开创和发展起到了至关重要的作用．

他的女学生王小云教授现在已是国际知名的密码学专家．

“大”还体现在他研究的问题之“大”和成果之“大”．他往往对那些小的成果不放在眼里，告诉我们应该做大问题，有意义的问题．他是这样说的，更是这样做的．潘老师一生发表的论文并不是太多，但是几乎每一篇论文都有他独到的思想．比如他在上世纪50年代末发表的一篇文章，那是他非常年轻时发表的，至今还有非常高的引用率，就是因为那篇文章里面所隐含的思想和方法为后人继续关注，继续研究．

“大”还体现在潘老师的心胸之“大”．他是无私的、胸怀坦荡的人．他在数学界的口碑特别好．王元先生在《潘承洞文集》的序中称他淡泊名利，胸襟坦荡，为人正直，我认为是十分中肯的．也正是因为如此，他不仅在数学院，在山东大学，而且在整个中国的数学界，在国际的数论学界都享有很高的声誉．这一方面是因为他的成果，另一方面也是因为他的人品．

作为校长，首先他是一个战略家．潘老师做校长时，是整个高等教育发展处于低谷的时候，他清楚地看到了学校面临的困难，提出一个大胆的想法，就是山东大学应该面向山东，教育应该面向地方的经济、社会发展．是他首先倡议并促

成了山东大学和山东人民政府之间的紧密合作，正是因为这种关系，在学校困难的时候，每年从政府得到了政策上和经费上的大力支持．如果没有他战略的思考，没有山东大学面向山东经济发展的战略调整，就不可能得到山东政府强有力的支持，新的山东大学也不可能那么顺利地实现教育部和山东省的共建．

其次他是一位特别爱才的校长．上世纪 90 年代初，山东大学当时是新老交替的关键时候，他提议并顺利实施了每年破格提拔一批年轻学者成为教授，第一批是 16 位，我们数学院有 4 位，我也是其中的一位．现在这 16 个人以及以后每年 10 名左右的破格教授，已经成为山东大学学术和管理的中坚力量，有些已成为国家学术界非常有影响力的人物，还有些在国外取得了突出的成绩．

他对人才的热爱是无条件的，他喜欢一个人，就是因为这个人特别有才．比如现在中国政法大学的徐显明校长，潘校长最初并不熟悉他，但是了解到他很有才，就一直提携他．像这样的例子还有很多，在潘老师看来很普通很自然．但正是他，影响了一代年轻学者的成长，也为学校的发展奠定了坚实的基础．

作为校长，潘老师还是一位具有国际视野的校长．他自己出访过许多国际上知名的大学，通过他学术上的影响和他个人的人格魅力，使山东大学逐步迈开了走外向型发展之路的步伐．

潘老师尽管离开我们 5 年了，但是他留给我们许多难以忘记、难以抹去的东西．他留给我们的财富是一种精神，这种精神将激励我们为学校的发展、为中华民族的复兴贡献我们的青春和力量．新山东大学成立之后，我们正在努力营造学校的文化氛围，确定了“气有浩然　学无止境”的新校训．我想，我们踏踏实实地做事，潘老师会含笑九泉的！

（本文根据作者在纪念潘承洞院士逝世 5 周年学术报告会上的讲演整理而成，整理者：徐长平、李文娟．展涛先生是潘承洞先生的学生，现为山东大学校长）

从林尼克到陈景润

第八章

1 关于大筛法

——朋比尼

本文的目的为给予林尼克的大筛法以新的与改进的形式并给出一些应用.大筛法导源于哈代-李特伍德圆法,在它的最普遍的形式中,它可以考虑为与一个积分$\int_0^1 |S(\alpha)|^2 d\alpha$引起的奇异级数相关联的一个不等式.

朋比尼(Bombieri, Enrilo, 1940—),生于米兰.

罗斯①使这个问题有了重要进展,他证明了下面的定理.

定理 A(罗斯①) 命 $n_j(1 \leqslant j \leqslant Z)$ 为不超过 N 的互异整数及命 $Z(N;q,a)$ 表示 $n_j \equiv a(\bmod q)$ 的 n_j 的个数.命 $X \geqslant 2$ 及 P 为满足 $p \leqslant X$ 的一个互异素数集,则

$$\sum_{p \in P} p \sum_{a=1}^{p} (Z(N;p,a) - Z/p)^2 \ll ZN + ZX^2 \log R + Z^2 |P| R^{-2}$$

此时 $|P|$ 表示 P 的元素个数.

特别地,若 $X \geqslant N^{1/2}(\log N)^{-1/2}$,则

$$\sum_{p \leqslant X} p \sum_{a=1}^{p} (Z(N;p,a) - Z/p)^2 \ll ZX^2 \log X$$

① K F Roth. On the large sieve of Linnik and Rényi. Mathematatika, 1965,12:1-9.

我们将对这个结果作一些改进来证明：

定理 1 在定理 A 的记号下，我们有

$$\sum_{p\leqslant X}p\sum_{a=1}^{p}(Z(N;p,a)-Z/p)^2\leqslant 7\max(N,X^2)Z$$

我们在此将要考虑的大筛法的普遍形式将包有定理 1 为其特例，它取下面定理的形式，现在关于素数与整数贯的任何文献中都未见到过：

定理 2 命 a_n 为任意复数及

$$S(\alpha)=\sum_{Y<n\leqslant Z}a_n e(n\alpha) \qquad ①$$

此处用通常的记号 $e(t)=e^{2\pi it}$. 则得

$$\sum_{q\leqslant X}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}|S(a/q)|^2\leqslant 7\max(Z-Y,X^2)\sum_{Y<n\leqslant Z}|a_n|^2 \qquad ②$$

为了推出定理 1，在定理 2 中取 $Y=0$ 及 $Z=N$，并当 $n=n_j$ 时，命 $a_n=1$，否则 $a_n=0$. 则 $\sum|a_n|^2=Z$（用定理 A 的记号），及由 ② 推出

$$\sum_{p\leqslant X}\sum_{a=1}^{p-1}|S(a/q)|^2\leqslant 7\max(N,X^2)Z$$

用简单的计算可得

$$\sum_{a=1}^{p-1}|S(a/p)|^2=p\sum_{a=1}^{p}(Z(N;p,a)-Z/p)^2$$

故得定理 1.

有兴趣者为定理 2，它并非远离臻于至善者，首先取 $Z-Y\geqslant X^2$ 及 $a_n=1$. 则 $|S(1)|^2=(Z-Y)^2$，及 ② 给出上界 $7(Z-Y)^2$；这表明当 $Z-Y\geqslant X^2$ 时，我们不能将因子 $7\max(Z-Y,X^2)$ 换为 $\max(Z-Y,X^2)$. 现在取 $Y=0,Z=1$，$a_1=1$. 则 $|S(a/q)|=1$，因此 ② 的左端为

$$\Big(\sum_{q\leqslant X}\phi(q)\Big)\Big(\sum_{Y<n\leqslant Z}|a_n|^2\Big)\sim\frac{3X^2}{\pi^2}\sum_{Y<n\leqslant Z}|a_n|^2$$

这表明当 $Z-Y<X^2$，我们不能将因子 7 换为任何小于 $3/\pi^2$ 的数.

我们可以将 ② 看成加性特征的不等式，我们可以询问是否存在一个乘性特征的相应不等式. 尽管最后结果取不同形状，事实上就是这个情况的结果.

命 Q 为正整数的有限集，并命

$$M=M(Q)=\max_{q\in Q}q \qquad ③$$

$$D=D(Q)=\max_{q\in Q}d(q) \qquad ④$$

此处 $d(q)$ 表示 q 的因子个数. 对于任意模 q 的特征 χ，命 $\tau(\chi)$ 表示高斯和

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e(a/q) \qquad ⑤$$

我们有

$$|\tau(\chi)| = \begin{cases} \mu^2(q/q^*)q^*, & (q^*, q/g^*) = 1 \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \qquad ⑥$$

此处 q^* 为特征 χ 的引导(χ 为模 q^* 的原特征对模 q 的扩张)注意当 χ 为原特征(mod q)时有 $|\tau(q)|^2 = q$ 及 $|\tau(\chi_0)|^2 = \mu^2(q)$,此处 χ_0 为主特征,及恒有 $|\tau(\chi)|^2 \leqslant q$.

定理 2 的乘法类似为:

定理 3 命 a_n 为任意复数,及 Q 为任意有限正整数集合.则

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2\left|\sum_{Y<n\leqslant Z}\chi(n)a_n\right|^2 \leqslant$$
$$7D\max(Z-Y, M^2)\sum_{Y<n\leqslant Z}d(n)|a_n|^2 \qquad ⑦$$

此处 $\sum\limits_{\chi}$ 表示过模 q 的所有特征 χ 求和.

对于特殊情况,可以证明稍强的结果,特别地,若 n 为素数时,$a_n = 1$,否则 $a_n = 0$,则有同样广义类型的结果,但没有 D 与 $d(n)$.

定理 3 对迪利克雷 L - 函数的零点与素数分布理论有重要应用.事实上,林尼克在创立大筛法时即着眼于对素数论中经典问题的应用.

我们将要证明素数分布方面的主要结果如下.命

$$\psi(z;q,a) = \sum_{\substack{n\leqslant z \\ n\equiv a(\bmod q)}}\Lambda(n)$$

此处$(a,q) = 1$,考虑算术数列中的素数定理的误差

$$E(z;q,a) = \psi(z;q,a) - z/\phi(q) \qquad ⑧$$

定理 $E(z,q)$ 及 $E^*(z,q)$ 如下,即

$$E(z,q) = \max_{(a,q)=1}|E(z;q,a)| \qquad ⑨$$

$$E^*(z,q) = \max_{y\leqslant z}E(y,q) \qquad ⑩$$

定理 4 对于任何正常数 A 皆存在正常数 B 使当 $X \leqslant z^{1/2}(\log z)^{-B}$ 时有

$$\sum_{q\leqslant X}E^*(z,q) \ll z(\log z)^{-A} \qquad ⑪$$

我们将证明 B 可以取为 $3A + 23$.

看来这条定理也可以从前面提到的罗斯的定理A来证明,然而,应用定理3来证明看来是更相宜的.

我们需要注意,即使假定了广义黎曼猜想,并将它用于此:$E^*(z,q) \ll z^{1/2}(\log z)^2(q \leqslant z)$,我们亦不能证明比⑪更精密的结果,我们可以说在不少与素数有关的推垒问题中,定理 4 可以用来代替广义黎曼猜想,关于这个一般原则有不少例子,德文波特(Davenport)教授与作者曾将这定理有关相邻素数距

离问题上应用的详细证明投交 Proc. Royal Soc. A.

类似于 ⑪ 的结果,例如对于某个正常数 η 有

$$\sum_{q \leqslant z^{\eta-1}} \mu^2(q) E(z,q) \ll z(\log z)^A \tag{⑫}$$

已被几个作者宣布过,林尼克与端尼①②关于大筛法的工作导致一个略比 ⑫ 弱一点的不等式. 巴尔巴恩③④与潘承洞⑤⑥发表了这方面的结果. 无论如何,巴尔巴恩的工作受到了潘承洞⑤ 的批评,但作者还不理解潘承洞⑥ 的文章(似乎该文引理 1.2 中素数的除外集依赖于 s 与 a,而(2.7) 中 a 与 $s(=\rho)$ 的选择依赖于 D,对 ρ 的选择有许多可能,所以引理 1.2 不可使用).

定理 4 将从 L - 函数零点的新型的密度定理(下面的定理 5) 中推出;绝大部分属于所谓 L - 函数统计理论的已知结果,均包于这个密度定理之中.

命 $N(\alpha, T; \chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形

$$\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T \tag{⑬}$$

中的零点个数,此处 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. 我们的主要密度定理为:

定理 5 命 Q 为一个正整数的有限集及命 M 与 D 由 ③ 与 ④ 定义. 则对于 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1, T \geqslant 2$ 有

$$\sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} |\tau(\chi)|^2 N(\alpha, T; \chi) \ll DT(M^2 + MT)^{4(1-\alpha)/(3-2\alpha)} \log^{10}(M+T) \tag{⑭}$$

对于 Q 一致地成立.

除引用朗道、李特伍德与梯其玛奇的经典著作外,定理 4 与 5 的证明是自给自足的,我们已给足证明的详细细节.

关于 ⑭ 的意义加一些注记可能是有意义的,李特伍德曾指出,对于固定 χ 与变数 s,迪利克雷 L - 函数 $L(s,\chi)$ 理论中的许多结果成立,则对于固定 s 与变数 χ(对于变数模) 具有类似性("q 类似"),关于这方面的一个好例子为

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} |L(1+\mathrm{i}t, \chi)| / \log\log t > 0$$

其中,q 类似为对于二次特征 $\chi(\bmod q)$ 有

$$\overline{\lim_{q \to \infty}} L(1, \chi) / \log\log q > 0$$

---

① Yu. V. Linnik. "The large sieve", Doklady Akad. Nauk SSSR. 1974, 30: 292-294(in Russian).

② A. Rényi. "On the representation of an even number as the sum of a single prime and an almost prime number", Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 1948, 12: 57-73(in Russian); also American Math. Soc. Translations(2), 1961, 19: 299-321.

③ M. B. Barban, Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk Uz. S. S. R, 22(1961), 1-20.

④ M. B. Barban, Mat. Sbornik (N. S.), 61(103)(1963), 418-425.

⑤ Pan Cheng-Dong, Acta Math. Sinica, 14(1964), 597-606 = Chinese Math, 5(1964), 642-652.

⑥ Pan Cheng-Dong, Acta Math. Sinica, 13(1963), 262-268 = Chinese Math, 4(1963), 283-290.

易见我们的不等式⑭与 L - 函数的密度猜想的 q 类似相关联，这个猜想断言

$$\sum_{\chi} N(\alpha, T; \chi) \ll q^{1+\varepsilon} T^{2(1-\alpha)+\varepsilon} \quad ⑮$$

而其 q 类似为

$$\sum_{\chi} N(\alpha, T; \chi) \ll q^{2(1-\alpha)+\varepsilon} T^{1+\varepsilon} \quad ⑯$$

此处 $\sum_{\chi}$ 表示过所有特征 $\chi(\bmod q)$ 的一个和. 最后两个不等式尚未被证明，也可能很困难，但可能证明很接近于 ⑯ 的结果，事实上，正如我们将于以后看到的，我们可以由定理 5 推出

系　对于$\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ 及 $2 \leqslant T \leqslant \sqrt{x}$ 一致地有

$$\sum_{q \leqslant X} \sum_{\chi} N(\alpha, T; \chi) \leqslant X^{1/2(1-\alpha)+\varepsilon} T^{1+\varepsilon} \quad ⑰$$

进而言之

$$\sum_{q \leqslant X} \sum_{\chi} N(\alpha, T; \chi) \leqslant X^{1+\varepsilon} T^{2+\varepsilon} \quad ⑱$$

对于 $5/6 \leqslant \alpha \leqslant 1, 2 \leqslant T \leqslant X^2$ 一致地成立.

⑰ 表示密度猜想 ⑯ 对于 q 平均地成立. 如果 $2 \leqslant T \leqslant (\max q)^{1/2}$，而 ⑱ 表示当 $5/6 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 及 $T \leqslant (\max q)^2$，它关于 q 的平均亦成立，后面的结果是惊奇的，这说明定理 5 确为一个新型的密度结果，我们作如下猜想：

密度猜想　若$\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ 及 $T \geqslant 2$，则

$$\sum_{q \leqslant X} \sum_{\chi}{}^{*} N(\alpha, T; \chi) \ll X^{4(1-\chi)+\varepsilon} T^{1+\varepsilon} \quad ⑲$$

对于 α 一致成立，此处 $\sum_{\chi}{}^{*}$ 表示过 mod q 所有原特征的一个和.

最后，作者对德文坡特教授表示深深的感谢，由于一次讨论才导致了这项工作，他还帮助审核了本文.

我们将在下面证明定理 2 与 3. 我们记(m, n) 平面上形如

$$y < m \leqslant z, \quad y' < n \leqslant z'$$

的矩形为 $R(y, z; y', z')$，或简记为 R. 命 $c_{m,n}$ 为复数的双指标数列，其中 (m, n) 的定义范围为方形 $Y < m \leqslant Z, Y < n \leqslant Z$；对于每个这种数列，我们可以使之对应于方形的子矩形

$$R_0 = R_0(Y, Z_0; Y, Z_0')$$

它依赖于数列 $c_{m,n}$ 及 Y, Z，且具有性质：

对于每个含于 $R(Y, Z; Y, Z)$ 的矩形 $R = R(Y, z; Y, z')$，我们有

$$\left| \sum_{R} c_{m,n} \right| \leqslant \left| \sum_{R_0} c_{m,n} \right| \quad ⑳$$

显然，这样一个矩形 R_0 总是存在的，显然并不需要它是唯一的.

引理1(阿贝尔不等式) 命 $b_{m,n}$ 为实数，此处 $Y < m \leqslant Z, Y < n \leqslant Z$，并适合条件

$$(\mathrm{i})\begin{cases} b_{m,n} \geqslant 0, b_{m,n} - b_{m+1,n} \geqslant 0, b_{m,n} - b_{m,n+1} \geqslant 0 \\ b_{m,n} - b_{m+1,n} - b_{m,n+1} + b_{m+1,n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$

命 $B = \max b_{m,n}$，则

$$\left| \sum_{R_0} c_{m,n} b_{m,n} \right| \leqslant B \left| \sum_{R_0} c_{m,n} \right| \tag{21}$$

证明 当 $(m,n) \in R_0$ 时，置 $b^*_{m,n} = b_{m,n}$，否则置 $b^*_{m,n} = 0$. 由分部求和得

$$\sum_{R_0} c_{m,n} b_{m,n} = \sum_{R_0} \Big(\sum_{R(Y,m,Y,n)} c_{h,k} \Big) (b^*_{m,n} - b^*_{m+1,n} - b^*_{m,n+1} + b^*_{m+1,n+1})$$

因此

$$\left| \sum_{R_0} c_{m,n} b_{m,n} \right| \leqslant \Big(\max_R \Big| \sum_R c_{m,n} \Big|\Big)\Big(\sum_{R_0} \left| b^*_{m,n} - b^*_{m+1,n} - b^*_{m,n+1} + b^*_{m+1,n+1} \right|\Big)$$

由 ⑳，我们有

$$\max_R \Big| \sum_R c_{m,n} \Big| \leqslant \Big| \sum_{R_0} c_{m,n} \Big|$$

又由条件(i) 得

$$\begin{aligned} &\sum_{R_0} \left| b^*_{m,n} - b^*_{m+1,n} - b^*_{m,n+1} + b^*_{m+1,n+1} \right| = \\ &\sum_{R_0} \left| b^*_{m,n} - b^*_{m+1,n+1} - b^*_{m,n+1} + b^*_{m+1,n+1} \right| = \\ &b_{Y+1,Z+1} \leqslant B \end{aligned}$$

故得 ㉑.

引理2 命 $c_{m,u}$ 与 R_0 如前定义，及假定 $\eta > 0$. 则

$$\left| \sum_{R_0} c_{m,u} - (2\eta)^{-1} \sum_{R_0} c_{m,u} \int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta) \mathrm{d}\beta \right| \leqslant \Big(\frac{\sin hx}{x} - 1 \Big) \Big| \sum_{R_0} c_{m,n} \Big| \tag{22}$$

此处 $x = 4\pi\eta(Z - Y)$.

证明 我们有

$$\begin{aligned} (2\eta)^{-1} \sum_{R_0} c_{m,u} \int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta) \mathrm{d}\beta &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2\pi\eta)^{2k}}{(2k+1)!} \sum_{R_0} c_{m,n} (m-n)^{2k} = \\ &\sum_{R_0} c_{m,n} + T \end{aligned}$$

此处

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2\pi\eta)^{2k}}{(2k+1)!} \sum_{r=1}^{2k} (-1)^r \binom{2k}{r} \sum_{R_0} c_{m,n}(Z-m)^r(Z-n)^{2k-r}$$

数列 $b_{m,n} = (Z-m)^r(Z-n)^{2k-r}$ 适合引理 1 的条件(i) 及 $B \leqslant (Z-Y)^{2k}$. 因此由 ㉑ 得

$$\left| \sum_{R_0} c_{m,n}(Z-m)^r(Z-n)^{2k-r} \right| \leqslant (Z-Y)^{2k} \left| \sum_{R_0} c_{m,n} \right|$$

所以

$$|T| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\pi\eta)^{2k}}{(2k+1)!} \sum_{r=0}^{2k} \binom{2k}{r} (Z-Y)^{2k} \left| \sum_{R_0} c_{m,n} \right| = \left(\frac{\sin hx}{x} + 1 \right) \left| \sum_{R_0} c_{m,u} \right|$$

此处 $x = 4\pi\eta(Z-Y)$. 引理 2 证完.

定理 2 的证明 命

$$S_{m,q} = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e(am/q) \quad ㉓$$

为熟知的拉马努金和. 取

$$c_{m,n} = a_m \bar{a}_n \sum_{q \leqslant X} S_{m-n,q} \quad ㉔$$

此处$(m,n) \in R(Y,Z;Y,Z)$. 选取 η 满足

$$x = 4\pi\eta(Z-Y) = \min(1.316\,8, 2\pi(Z-Y)X^{-2}) \quad ㉕$$

则 $\sin hx < 2x$. 及由 ㉒ 推出

$$\left| \sum_{R_0} c_{m,n} \right| \leqslant \frac{2\pi(Z-Y)}{2x - \sin hx} \left| \sum_{R_0} c_{m,n} \int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta) \mathrm{d}\beta \right|$$

由于对于 $0 < x \leqslant 1.316\,8$ 时有

$$2x - \sin hx > \frac{x}{1.463\,2}$$

所以

$$\left| \sum_{R_0} c_{m,n} \right| \leqslant \max(7(Z-Y), 1.47X^2) \left| \sum_{R_0} c_{m,n} \int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta) \mathrm{d}\beta \right|$$

命 $M_{a,q}$ 表示区间 $|\alpha - a/q| < \eta$, 并置

$$S(\alpha; Y, Z) = \sum_{Y < n \leqslant Z} a_n e(n\alpha)$$

这与 ① 中的 $S(\alpha)$ 是一样的, 所以

$$\sum_{R_0} c_{m,n} \int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta) \mathrm{d}\beta = \sum_{Y < m \leqslant Z_0} \sum_{Y < n \leqslant Z_0} a_m \bar{a}_n \sum_{q \leqslant X} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int M_{a,q} e((m-n)\alpha) \mathrm{d}\alpha =$$

拉马努金(1887.12—1920.4), 印度数学家. 生于坦焦尔区的埃罗德, 卒于马德拉斯附近的切特普特.

$$\sum_{q\leqslant X}\sum_{\substack{a=1\\(q,q)=1}}^{q}\int M_{a,q}S(\alpha;Y,Z_0)\overline{S(\alpha;Y,Z_0')}\mathrm{d}\alpha$$

它有绝对值不大于

$$\frac{1}{2}\sum_{q\leqslant X}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\int M_{a,q}\{|S(\alpha;Y,Z_0)|^2+|S(\alpha;Y,Z'_0)|^2\}\mathrm{d}\alpha\leqslant$$

$$\max_{z}\sum_{q\leqslant X}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\int M_{a,q}|S(\alpha;Y,z)|^2\mathrm{d}\alpha\leqslant$$

$$\max_{z}\int_0^1|S(\alpha;Y,z)|^2\mathrm{d}\alpha=$$

$$\max_{z}\sum_{Y<n\leqslant z}|a_u|^2=\sum_{Y<i\leqslant Z}|a_n|^2$$

在此我们有这样的事实,即诸区间 $M_{a,q}$ 互不重复,这是由于 $q\leqslant X,(a,q)=1$ 及 $M_{a,q}$ 的长度 2η 满足 $2\eta\leqslant X^{-2}$,其中 X 满足 ㉕.

我们现在证明了

$$\left|\sum_{R_0}c_{m,n}\right|\leqslant\max(7(Z-Y),1.47X^2)\sum_{Y<n\leqslant Z}|a_n|^2$$

由于 ⑳ 有

$$\left|\sum_{R}c_{m,n}\right|\leqslant\left|\sum_{R_0}c_{m,n}\right|$$

及

$$\sum_{R(Y,Z;Y,Z)}c_{m,n}=\sum_{q\leqslant X}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\sum_{Y<m\leqslant Z}\sum_{Y<n\leqslant Z}a_m\bar{a}_ne(a(m-n)/q)=$$

$$\sum_{q\leqslant X}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}|S(a/q;Y,Z)|^2$$

故得 ②.

定理 3 的证明是类似的,但需要下面与拉马努金和有关的积性特征相关的引理.

引理 3 我们有

$$\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2\chi(m)\bar{\chi}(n)=\begin{cases}\phi(q)S_{m-n,q}, & (mn,q)=1\\0, & (mn,q)>1\end{cases}\qquad ㉖$$

此处 $\sum_{\chi}$ 表示过所有模 q 的特征 χ 求和.

证明 若 $(mn,q)>1$,因对于每个 χ 皆有 $\chi(m)\bar{\chi}(n)=0$,所以引理成立,现在假定 $(mn,q)=1$. 记 $\sum'$ 为过 mod q 的缩系的和,则因为 $am\equiv bn(\bmod q)$ 的所有值均由 $a\equiv hn,b\equiv hm$ 给出,所以

$$\sum_{\chi} |\tau(\chi)|^2 \chi(m)\bar{\chi}(n) = \sum_{a}{}' \sum_{b}{}' \sum_{\chi} \chi(am)\bar{\chi}(bn)e((a-b)/q) =$$
$$\phi(q) \sum_{\substack{a \\ am \equiv bn}}{}' \sum_{\substack{b \\ (\bmod q)}}{}' e((a-b)/q) =$$
$$\phi(q)\sum_{h}{}' e(h(n-m)/q) =$$
$$\phi(q)S_{n-m,q} = \phi(q)S_{n-m,q}$$

故得引理 3.

定理 3 的证明 取

$$c_{m,n} = a_m\bar{a}_n \sum_{q \in Q}{}^{*} S_{m-n,q} \quad ㉗$$

此处$\sum^{*}$表示一个和,其中 q 仅过适合于$(q,mn)=1$的整数.命

$$S_q(\alpha;Y,Z) = \sum_{\substack{Y<n\leqslant Z \\ (n,q)=1}} a_n e(n\alpha) \quad ㉘$$
$$S_{(d)}(\alpha;Y,Z) = \sum_{\substack{Y<n\leqslant Z \\ d|n}} a_n e(n\alpha) \quad ㉙$$

选取 η 满足

$$x = 4\pi\eta(Z-Y) = \min(1.316\,8, 2\pi(Z-Y)M^{-2})$$

则如前可得

$$\left|\sum_{R_0} c_{m,n}\right| \leqslant 7\max(Z-Y,M^2)\left|\sum_{R_0} c_{m,n}\int_{-\eta}^{\eta} e((m-n)\beta)\mathrm{d}\beta\right| =$$
$$7\max(Z-Y,M^2)\left|\sum_{q\in Q}\sum_{a}\int M_{a,q}S_q(\alpha;Y,Z_0)\overline{S_q(\alpha;Y,Z_0')}\mathrm{d}\alpha\right| \leqslant$$
$$7\max(Z-Y,M^2)\max_{z}\left(\sum_{q\in Q}\sum_{a}{}'\int M_{a,q}|S_q(\alpha;Y,z)|^2\mathrm{d}\alpha\right)$$

由一个熟知的恒等式及利用柯西不等式可知

$$|S_q(\alpha;Y,Z)|^2 = \left|\sum_{d|q}\mu(d)S^{(d)}(\alpha;Y,Z)\right|^2 \leqslant$$
$$d(q)\sum_{d|q}|S^{(d)}(\alpha;Y,Z)|^2 \leqslant$$
$$D\sum_{d=1}^{\infty}|S^{(d)}(\alpha;Y,Z)|^2 \quad ㉚$$

因此

$$\max_{z}\left(\sum_{q\in Q}\sum_{a}{}'\int M_{a,q}|S_q(\alpha;Y,z)|^2\mathrm{d}\alpha\right) \leqslant D\sum_{d=1}^{\infty}\max_{z}\int_0^1|S^{(d)}(\alpha;Y,z)|^2\mathrm{d}\alpha =$$
$$D\sum_{d=1}^{\infty}\max_{z}\sum_{\substack{Y<n\leqslant Z \\ d|n}}|a_n|^2 =$$
$$D\sum_{Y<n\leqslant Z}d(n)|a_n|^2$$

因由引理 3 得

$$\sum_{B(Y,Z;Y,Z)} c_{m,n} = \sum_{q\in Q}\sum_{\substack{Y<m\leqslant Z\\(m,q)=1}}\sum_{\substack{Y<n\leqslant Z\\(n,q)=1}} a_m\bar{a}_u S_{m-n,q} =$$

$$\sum_{q\in Q}\sum_{Y<m\leqslant Z}\sum_{Y<n\leqslant Z} a_m\bar{a}_n \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi} |\tau(\chi)|^2\chi(m)\bar{\chi}(n) =$$

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^2\Big|\sum_{Y<n\leqslant Z}\chi(n)a_n\Big|^2$$

由此易得定理 3.

下面我们将证明定理 4. 我们用下面的记号,对于任何特征 $\chi(\max q)$,我们用 χ^* 表示与 χ 关联的唯一的原特征,而用 q^* 表示 χ^* 的模,即 χ 的导引;我们用 $\sum_{\chi}{}^*$ 表示过 mod q 所有原特征的一个和;mod q 的主特征记为χ_0对于任意特征 χ,定义

$$\psi(z,\chi) = \sum_{n\leqslant z}\chi(n)\Lambda(n) \tag{31}$$

引理 4 命 N 为任意固定大数及 $X_0 = (\log z)^N$. 假定 $X \leqslant z^{1/2}$. 对于任意 $D \geqslant 2$ 及正整数 M,命 Q_M 为满足下面条件

$$1 < q \leqslant M,\quad d(q) \leqslant D \tag{32}$$

的整数 q 的集合,则对于每个任意的固定大数 A,我们有

$$\sum_{q\leqslant X}E^*(z,q) \ll z(\log z)^{-A} + zD - (\log z)^3 +$$

$$(\log z)^3 \max_{X_0<M\leqslant X} M^{-1}\sum_{QM}\sum_{\chi}{}^* \max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)| \tag{33}$$

证明 我们有

$$\sum_{q\leqslant X}E^*(z,q) = \sum_{q\in QX} + \sum_{q\notin QX} = \Sigma_1 + \Sigma_2 \tag{34}$$

易行估计 Σ_2. 显然

$$\psi(z;q,a) \ll (\log z)\sum_{\substack{n\leqslant z\\ n\equiv a(\mathrm{mod}\ q)}} 1 \ll (\log z)(1 + z/\phi(q))$$

由 ⑩ 中 $E^*(z,q)$ 的定义可知

$$E^*(z,q) \ll z(\log z)/\phi(q),\quad q \leqslant z$$

因此

$$\Sigma_z \ll E^*(z,1) + \sum_{\substack{q\leqslant X\\ d(q)>D}} z(\log z)\phi(q) \ll$$

$$z(\log z)^{-A} + z(\log z)D^{-1}\sum_{q\leqslant X}d(q)/\phi(q) \ll$$

$$z(\log z)^{-A} + zD^{-1}(\log z)^3$$

对于 Σ_1,我们用 $\psi(z,\chi)$ 来表示 $E^*(z,q)$,所以

$$\psi(z;q,a) = \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}\bar{\chi}(a)\psi(z,\chi)$$

由此可得

$$\phi(q)E(z,q) \leqslant |\psi(z,\chi_0) - z| + \sum_{\chi\neq\chi_0}|\psi(z,\chi)|$$

现在由经典形式的素数定理得

$$|\psi(z,\chi_0) - z| \ll z\exp(-C(\log)^{1/2}) \ll z(\log z)^{-A-1}$$

而当 $\chi\neq\chi_0$ 时

$$\psi(z,\chi) = \sum_{\substack{m\leqslant z\\(m,q)=1}}\chi^*(m)\Lambda(m) = \psi(z,\chi^*) - \sum_{\substack{m\leqslant z\\(m,q)>1}}\chi^*(m)\Lambda(m) =$$

$$\psi(z,\chi^*) + O(\sum_{\substack{p^k\leqslant z\\p|q}}\log p) =$$

$$\psi(z,\chi^*) + O((\log z)(\log q))$$

因此

$$\phi(q)E^*(z,q) \ll z(\log z)^{-A-1} + \phi(q)(\log z)^2 + \sum_{\chi\neq\chi_0}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi^*)|$$

从而

$$\Sigma_1 \ll z(\log z)^{-A-1}\sum_{q\leqslant X}\frac{1}{\phi(q)} + X(\log z)^2 + \sum_{q\in Q_X}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi^*)| \ll$$

$$z(\log z)^{-A} + \sum_{q\in Q_X}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi^*)|$$

因 $q^*\mid q$,所以 $d(q^*)\leqslant d(q)\leqslant D$,由于当 $\chi\neq\chi_0$时,$q^*>1$,所以 $q^*\in Q_X$,因此将属于同一模 q^* 的原特征放在一起则得

$$\sum_{q\in Q_X}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi^*)| = \sum_{q\in Q_X}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)| \sum_{\substack{q\in Q_X\\q\equiv 0(\mathrm{mod}\ q^*)}}\frac{1}{\phi(q)}$$

由于 $\phi(a^*r)\geqslant\varphi(q^*)\phi(r)\gg q^*\phi(r)(\log X)^{-1}$,及 $X<g$,则最后一个表达式远小于

$$(\log z)^2\sum_{q^*\in Q_X}(q^*)^{-1}\sum_{\chi}{}^*\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|$$

由西格尔 - 瓦尔菲茨定理(见帕拉哈①)可知对于 $\chi\neq\chi_0$

$$|\psi(z,\chi)| \ll z\exp(-c(\log z)^{\frac{1}{2}})$$

① K. Prachar, Primzahlverteilung (Springor, 1957).

对于适合 $q \leqslant (\log z)^N = X_0$ 的 q 一致成立，此处 $c = c(N)$. 易于证明对于 $\max\limits_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi)|$ 有同样的估计，其中仅可能是另一常数 c，因此

$$\sum_{q^* \in Q_{X_0}} (q^*)^{-1} \sum_{\chi}{}^* \max_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi)| \ll z(\log z)^{-A-2}$$

剩余的和，即过 $X_0 < q \leqslant X$ 的和，可以分成形如 $2^{m-1} < q \leqslant 2^m$ 的远小于 $\log X$ 个区间之和，从而

$$\sum_{\substack{q^* \in Q_X \\ q^* > X_0}} (q^*)^{-1} \sum_{\chi}{}^* \max_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi)| \ll$$

$$(\log z) \max_{X_0 < M \leqslant X} M^{-1} \sum_{QM} \sum_{\chi}{}^* \max_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi)|$$

所以

$$\Sigma_1 \ll z(\log z)^{-A} + (\log z)^3 \max_{X_0 < M \leqslant X} M^{-1} \sum_{QM} \sum_{\chi} \max_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi)|$$

代入 ㉞ 即得 ㉝，引理 4 证完.

定理4的证明 由素数论中一个熟知的显公式(例如帕拉哈①)可知，对于 $\chi \neq \chi_0$

$$|\psi(z,\chi)| \ll \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{z^\beta}{|\rho|} + \frac{z(\log z)^2}{T} + z^{\frac{1}{2}}$$

对于 $q \leqslant z, 2 \leqslant T \leqslant z$ 一致成立，其中 $\rho = \beta + i\gamma$ 过 $L(s,\chi)$ 满足 $0 < \beta < 1$ 的所有零点，重零点将计算其重数，由于 $|\psi(y,\chi)| \ll z^{\frac{1}{2}}$，此处 $y \leqslant z^{\frac{1}{2}}$，所以

$$\max_{y \leqslant z} |\psi(y,\chi)| \leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{z^\beta}{|\rho|} + \frac{z(\log z)^2}{T} + z^{\frac{1}{2}} \qquad ㉟$$

对于 $q \leqslant z^{\frac{1}{2}}, 2 \leqslant T \leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 一致成立.

首先考虑适合 $|\rho| < \frac{1}{4}$ 的零点的部分，这种零点个数远小于 $\log z$(帕拉哈①)，考虑到 $L(s,\bar{\chi})$ 的对应零点 $1-\rho$ 可知对于任何正数 ε 及 q 充分大时有

$$|q| > z^{-\varepsilon}$$

(见帕拉哈①)，因此与这种零点有关的和的一部分远小于

$$\sum_{\rho} z^{\beta+\varepsilon} \ll (\log z)^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \ll z^{\frac{1}{2}}$$

关于满足 $|\rho| \geqslant \frac{1}{4}$ 的零点，仅需考虑满足 $\beta \geqslant \frac{1}{2}$ 者. 我们将区域 $|\gamma| \leqslant T$ 分成 $|\gamma| < 1$ 与 $2^{m-1} \leqslant |\gamma| < 2^m$，此处 $m = 1,2,\cdots$，则

---

① K. Prachar, Primzahlverteilung (Springor, 1957).

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T\\|\rho|\geqslant\frac{1}{4}}}\frac{z^{\beta}}{|\rho|}\ll\sum_{2^{m-1}\leqslant T}2^{-m}\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant 2^{m}\\\beta\geqslant\frac{1}{2}}}z^{\beta}$$

进而言之

$$\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant 2^{m}\\\beta\geqslant\frac{1}{2}}}z^{\beta}=\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant 2^{m}\\\beta\geqslant\frac{1}{2}}}\left(z^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{\beta}z^{\sigma}\log z\,\mathrm{d}\sigma\right)=$$

$$z^{\frac{1}{2}}N\left(\frac{1}{2},2^{m};\chi\right)+(\log z)\int_{\frac{1}{2}}^{1}N(\alpha,2^{m};\chi)z^{\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

在 ㉟ 中应用这些结果得

$$\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|\ll z^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{2}T^{-1}+(\log z)\sum_{2^{m-1}\leqslant T}2^{m}\left(z^{\frac{1}{2}}N\left(\frac{1}{2},2^{m};\chi\right)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}N(\alpha,2^{m};\chi)z^{\alpha}\mathrm{d}\alpha\right)$$

所以

$$\begin{aligned}M^{-1}\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|&\ll M(z^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{2}T^{-1})+\\&M^{-1}(\log z)\sum_{2^{m-1}\leqslant T}2^{-m}\left\{z^{\frac{1}{2}}\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N\left(\frac{1}{2},2^{m};\chi\right)+\right.\\&\left.\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,2^{m};\chi)z^{\alpha}\mathrm{d}\alpha\right\}\ll\\&M(z^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{2}T^{-1})+\\&M^{-1}(\log z)\sum_{2^{m-1}\leqslant T}2^{-n}\max_{\alpha}\left\{\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,2^{m};\chi)z^{\alpha}\right\}\ll\\&M(z^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{2}T^{-1})+\\&M^{-1}(\log z)^{2}\max_{2\leqslant T'\leqslant T}(T')^{-1}\max_{\alpha}\left\{\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,T';\chi)z^{\alpha}\right\}\end{aligned}\qquad ㊱$$

应用定理 5,并注意对于一个原特征 $\chi(\mathrm{mod}\ q)$,我们有 $|\tau(\chi)|^{2}=q>\phi(q)$,所以

$$\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,T';\chi)\leqslant\sum_{Q_M}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}|\tau(\chi)|^{2}N(\alpha,T';\chi)\ll$$

$$DT'(M^{2}+MT')^{4(1-\alpha)/(3-2\alpha)}(\log z)^{10}$$

因此

$$\max_{2\leqslant T'\leqslant T}(T')^{-1}\max_{\alpha}\left|\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}N(\alpha,T';\chi)z^{\alpha}\right|\ll$$

$$D(\log z)^{10}\max_{\alpha}(M^{2}+MT)^{5(1-\alpha)/(3-2\alpha)}z^{\alpha}$$

我们加于 M 与 T 的条件为 $M\leqslant X\leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 与 $T\leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 度量 D 在我们布置中,并且

它关于 M 是独立的.

取 $D=(\log z)^{A+3}, T=M(\log z)^{A+5}, X\leqslant z^{\frac{1}{2}}(\log z)^{-A-5}$;由于 $M\leqslant X$,所以条件 $T\leqslant z^{\frac{1}{2}}$ 满足,将最后的不等式代入 ㊱ 则得到

$$M^{-1}\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|\ll Mz^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{-A-3}+$$
$$M^{-1}(\log z)^{2A+20}\max_{\alpha}M^{8(1-\alpha)/(3-2\alpha)}z^{\alpha} \tag{37}$$

$$\frac{8(1-\alpha)}{3-2\alpha}-1=2(1-\alpha)-\frac{(2\alpha-1)^2}{3-2\alpha}\leqslant 2(1-\alpha)-\frac{1}{2}(2\alpha-1)^2=\frac{3}{2}-2\alpha^2$$

当 $\alpha<\alpha_0$ 时,函数 $z^{\alpha}M^{\frac{3}{2}-2\alpha^2}$ 递增;而当 $\alpha>\alpha_0$ 时,函数 $z^{\alpha}M^{\frac{3}{2}-2\alpha^2}$ 递减,此处 $\alpha_0=(\log z)/(4\log M)$.若 $M<z^{\frac{1}{4}}$,则 $\alpha_0>1$;当 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$ 时,函数是 α 的递增函数,其最大值为

$$zM^{-\frac{1}{2}}\leqslant zX_0^{-\frac{1}{2}}=z(\log z)^{-\frac{1}{2}N}$$

若 $z^{\frac{1}{2}}\leqslant M\leqslant X(<z^{\frac{1}{2}})$,则函数的最大值为

$$\exp\left(\frac{3}{2}\log M+\frac{1}{8}(\log z)^2/(\log M)\right)$$

将它考虑为 $\log M$ 的一个函数,括弧中的表达式为凸的,对于

$$\frac{1}{4}\log z\leqslant\log M\leqslant\log X$$

中的极大值为

$$\max\left(\frac{7}{8}\log z,\frac{1}{8}\frac{(\log z)^2}{\log X}+\frac{3}{2}\log X\right)$$

我们按定理 4 的假定取 $X=z^{\frac{1}{2}}(\log z)^{-B}$,则最后的表达式不大于 $\log z-B\log\log z+0(1)$,所以

$$z^{\alpha}M^{\frac{3}{2}-2\alpha^2}\ll z(\log z)^{-\frac{1}{2}N}+z(\log z)^{-B}$$

我们取 $N=2B$,并假定 $B\geqslant A+5$,所以较早的条件 $X\leqslant z^{\frac{1}{2}}(\log z)^{-A-5}$ 满足.

应用 ㊲ 中证明的结果可知当 $X_0\leqslant M\leqslant X$ 时有

$$M^{-1}\sum_{Q_M}\sum_{\chi}{}^{*}\max_{y\leqslant z}|\psi(y,\chi)|\ll Mz^{\frac{1}{2}}+z(\log z)^{-A-3}+z(\log z)^{2A+20-B}$$

因 $D=(\log z)^{A+3}$,所以由引理 4 可知

$$\sum_{q\leqslant X}E^{*}(z,q)\ll z(\log z)^{-A}+z(\log z)^{2A+23+B}$$

取 $B=3A+23(>A+5)$,则得 ⑪,故得定理 4.

下面我们将在定理 3 的基础上证明定理 5.

命 Q 为一个正整数的有限集及命 M 与 D 由 ③ 与 ④ 定义,又命

$$z = M^2 \tag{38}$$

$$Q(s,\chi) = \sum_{n \leqslant z} \chi(n)\mu(n)n^{-s} \tag{39}$$

$$f(s,\chi) = L(s,\chi)Q(s,\chi)^{-1} \tag{40}$$

我们定义

$$F(s) = \prod_{q \in Q} \prod_{\chi \neq \chi_0} (1 - f^2(\varepsilon,\chi))^{e(\chi)} \tag{41}$$

此处

$$e(\chi) = \frac{M!}{\phi(q)} |\tau(\chi)|_\theta^2 \tag{42}$$

因当 $\chi \neq \chi_0$ 时，$L(s,\chi)$ 为一个整函数及 $e(\chi)$ 为一个正整数，所以 $F(s)$ 为 s 的整函数，又当 s 为实数时，$F(s)$ 亦是实的，这由于

$$\overline{f(s,\chi)} = f(s,\bar{\chi}), \quad |\tau(\bar{\chi})|^2 = |\tau(\chi)|^2$$

我们将于以后证明，当 M 充分大时，在 $\sigma = 2$ 时有 $F(s) \neq 0$. 我们用通常的方法来定义 $\arg F(\sigma + \mathrm{i}t)$(帕拉哈[1])；由 $\arg F(2) = 0$ 沿路径 $(2, 2+\mathrm{i}t, \sigma+\mathrm{i}t)$ 行走，当沿第二线段走时，若通过 $F(s)$ 一个 m 重零点，则 $\arg F(s)$ 增加 $-\pi m \operatorname{sgn} t$，即通过连续变分来定义 $\arg F(\sigma + \mathrm{i}t)$. 我们记

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x > 1 \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

引理 5 我们有

$$2\pi M! \int_\alpha^\beta \sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2 N(\sigma, T; \chi) \mathrm{d}\sigma \leqslant$$
$$\int_{-T}^{T} \{\log |F(\alpha + \mathrm{i}t)| - \log |F(\beta + \mathrm{i}t)|\} \mathrm{d}t +$$
$$\int_\alpha^\beta \{\arg F(\sigma + \mathrm{i}T) - \arg F(\sigma - \mathrm{i}T)\} \mathrm{d}\sigma \tag{43}$$

证明 若 ρ 为 $L(s,\chi)$ 的一个 m 次零点，则 ρ 为 $1 - f^2(s,\chi)$ 的一个零点，所以它是 $F(s)$ 的零点，其重数至少为 $me(\chi)$，因此由李特伍德的一条熟知定理(见帕拉哈[1])，即得引理 5.

引理 6 当 $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$ 时有

$$\int_\alpha^2 \{\arg F(\sigma + \mathrm{i}t) - \arg F(\sigma - \mathrm{i}t)\} \mathrm{d}\sigma \leqslant M! +$$
$$\int_0^{2\pi} \log^+ |F(2 + \mathrm{i}t + (2 - \alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \mathrm{d}\theta$$

---

① K. Prachar, Primzahlverteilung (Springor, 1957).

证明 若 $\sigma > 1$,则由 ㊴ 与 ㊵ 可知

$$f(s,\chi) = \sum_{n>z}\chi(n)A_z(n)n^{-s}$$

此处

$$A_z(n) = \sum_{\substack{d/n\\ d\leqslant z}}\mu(d),\ |A_z(n)|\leqslant \mathrm{d}(n)$$

因此当 M 充分大时

$$|f(2+\mathrm{i}t,\chi)|^2 \leqslant (\sum_{n>z}\mathrm{d}(n)n^{-2})^2 \ll (z^{-1}\log z)^2$$

从而 $|f(2+\mathrm{i}t,\chi)|$ 很小,这证明了较早的注记 $F(2+\mathrm{i}t)\neq 0$.

我们有

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)^2|\leqslant \sum_{q\leqslant M}q < M^2 = z$$

及

$$|\log(1-f^2(2+\mathrm{i}t,\chi))|\ll z^{-2}(\log z)^2$$

故由 ㊶ 可知

$$|\log F(2+\mathrm{i}t)|\leqslant \sum_{q\in Q}\frac{M!}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|\log(1-f^2(2+\mathrm{i}t,\chi))|\ll M!z^{-1}(\log z)^2\ll M! \tag{44}$$

我们按梯其玛奇①方法的一般做法,对于固定 t,命

$$g_t(s) = \frac{1}{2}\{F(s+\mathrm{i}t)+F(s-\mathrm{i}t)\} \tag{45}$$

则 $g_t(s)$ 为 s 的整函数及由反射原理得

$$g_t(\sigma) = RF(\sigma+\mathrm{i}t)$$

命 $n(r)$ 表示 $g_t(s)$ 在圆 $|s-2|\leqslant T$ 中的零点个数,零点重数亦算在内,则当 $\sigma\leqslant 2$ 时

$$|\arg F(\sigma+\mathrm{i}t)|\leqslant|\arg F(2+\mathrm{i}t)|+(N+1)\pi$$

此处 N 为 $g_t(s)$ 在线段 $\sigma\leqslant s\leqslant 2$ 上的零点个数,则由 ㊹ 可知

$$|\arg F(\sigma+\mathrm{i}t)|\ll M!+n(2-\sigma)$$

由此及引申公式可知当 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 2$ 及 $g_t(2)\neq 0$ 时有

$$\int_\alpha^2|\arg F(\sigma+\mathrm{i}t)|\,\mathrm{d}\sigma\ll M!+\int_0^{2-\alpha}n(r)\mathrm{d}r\ll M!+\int_0^{2-\alpha}r^{-1}n(r)\mathrm{d}r = M!+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2-\alpha}\log|g_t(2+(2-\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cdot|\,\mathrm{d}\theta-\log|g_t(2)|$$

① E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function (Oxford, 1951).

同时,由不等式

$$\log^+(a+b) \leqslant 2 + \log^+ a + \log^+ b$$

得

$$\int_0^{2\pi} \log^+ | g_t(2+(2-\alpha)e^{i\theta}) | d\theta \leqslant 4\pi + \int_0^{2\pi} \log^+ | F(2+it+(2-\alpha)e^{i\theta}) | d\theta + \int_0^{2\pi} \log^+ | F(2-it+(2-\alpha)e^{-i\theta}) | d\theta \ll 1 + \int_0^{2\pi} \log^+ | F(2+it+(2-\alpha)e^{i\theta}) | d\theta$$

在此用到 $F(\sigma - it)$ 与 $F(\sigma + it)$ 为共轭复数,代入前面的不等式,则得引理6的结果,在此需假定 $-\log | g_t(2) | \ll M!$.考虑函数

$$h_t(s) = \frac{1}{2i}\{F(s+it) - F(s-it)\}$$

则我们免去这个假定,从而 $| F(2+it) |^2 = | g_t(2) |^2 + | h(2) |^2$,由 ㊹ 得 $-\log | g_t(2) | \ll M!$ 或 $-\log | h_t(2) | \ll M!$.我们已处理了第一种情况,对于第二种情况,只要用 $h_t(s)$ 代替 $g_t(s)$,就可以用同法处理,引理6证毕.

引理7 若 χ 为非主特征(mod q),则对于 $\sigma \geqslant \frac{1}{2} x \geqslant 2q$ 与 $| t | \leqslant \frac{x}{q}$

$$L(s,\chi) = \sum_{n \leqslant t} \chi(n) n^{-s} + O(qx^{-\sigma}) \tag{46}$$

一致成立.

证明 如通常一样,记

$$\zeta(s,w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+w)^{-s}$$

此处 $0 < w \leqslant 1, \sigma > 1$,用熟知的方法(梯其玛奇①)可知逼近式

$$\zeta(s,w) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant y} (n+w)^{-s} - \frac{y^{1-s}}{1-s} + O(y^{-\sigma})$$

对于 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$,任意正整数 y 及 $| t | \leqslant \pi y$ 一致地成立.

我们有

$$L(s,\chi) = q^{-s} \sum_{a=1}^{q} \chi(a) \zeta(s, a/q)$$

将上面的逼近式代入并注意当 $\chi \neq \chi_0$ 时有 $\sum_{a=1}^{q} \chi(a) = 0$,所以

$$L(s,\chi) = \sum_{0 < n \leqslant qy+q} \chi(n) n^{-s} + O(q^{1-\sigma} y^{-\sigma})$$

取 $x = qy + q$,则得 $| t | \leqslant \pi y$,及当 x 为 q 的整数倍时有 ㊻,因小于 q 项之和可以吸收入 $O(qx^{-\sigma})$ 之中,所以后面的条件可以取消.

---

① E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function (Oxford, 1951).

引理 8 我们有

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2 f(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi)\ll D(M^2+M|t|)\log^2(M+|t|) \quad ㊼$$

证明 由 ㊵ 可知

$$|f(s,\chi)|\leqslant 1+|L(s,\chi)Q(s,\chi)|\leqslant 1+\frac{1}{2}|L(s,\chi)|^2+\frac{1}{2}|Q(s,\chi)|^2$$

因此 ㊼ 左端之和不大于 $\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$，此处

$$\Sigma_1=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\lambda\neq\lambda_0}|\tau(\chi)|^2$$

$$\Sigma_2=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|L(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi)|^2$$

$$\Sigma_3=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|Q(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi)|^2$$

因 $|\tau(\chi)|^2\leqslant q$，所以 $\Sigma_1\leqslant M^2$.

现在考虑 Σ_3，我们有

$$Q(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi)=\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\mu(n)n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}$$

运用定理 3 并置 $Y=0, Z=z, a_n=\mu(n)n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}$，则得

$$\Sigma_3\ll D\max(z,M^2)\sum_{n\leqslant z}d(n)n^{-1}\ll DM^2(\log M)^2$$

只剩下 Σ_2，我们首先用一个有限和来逼近 $L(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi)$；在引理 7 中取 $x=M^2+M|t|$ 及 $q\leqslant M$，由于 $x\geqslant 2q$ 及 $|t|\leqslant x/q$，所以这是可能的，故得

$$\left|L(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi)\right|^2\ll\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}\right|^2+1$$

再用定理 3，并取 $Y=0, Z=x, a_n=n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}$，则得

$$\begin{aligned}\Sigma_2&\ll\Sigma_1+\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\left|\sum_{n\leqslant x}\chi(n)n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}\right|^2\ll\\&M^2+D\max(x,M^2)\sum_{n\leqslant x}d(n)n^{-1}\ll\\&D(M^2+M|t|)\log^2(M+|t|)\end{aligned}$$

将 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 的估计加起来即得 ㊼.

引理 9 对于 $\sigma\geqslant 1$，下式一致成立

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|f(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|^2\ll D\log^9(M+|t|)$$

证明 如前面的证明一样，命 $x=M^2+M|t|$，则由引理 7 可知

$$f(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)=(\sum_{n\leqslant x}\chi(n)n^{-\sigma-\mathrm{i}t})(\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\mu(n)n^{-\sigma-\mathrm{i}t})^{-1}+$$

$$O(Mx^{-\sigma}|Q(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|)=\sum_{z<n\leqslant zx}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-\mathrm{i}t}+O(M^{1-2\sigma}|Q(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|)$$

此处 $a_n(x,z)=\sum\mu(d)$,其中 $d\mid n, nx^{-1}\leqslant d\leqslant z$.

将这个引理中的和记为 S,则得

$$S\ll S_1+M^{2-4\sigma}S_2$$

此处

$$S_1=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\Big|\sum_{z<n\leqslant zx}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-\mathrm{i}t}\Big|^2$$

$$S_2=\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|Q(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|^2$$

将定理 3 用于 S_2,并置 $Y=0, Z=z, a_n=\mu(n)n^{-\sigma-\mathrm{i}t}$,则得

$$S_2\ll D\max(z,M^2)\sum_{n\leqslant z}d(n)n^{-2\sigma}\ll DM^2$$

现在考虑 S_1,我们将区间 $z<n\leqslant zx$ 分成 $\ll\log x$ 个小区间$(2^{h-1}z,2^hz)$, $h=1,2,\cdots,h_0$,再加上一个部分区间$(2^{h_0}z,xz)$,由柯西不等式得

$$\Big|\sum_{z<n\leqslant zx}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-\mathrm{i}t}\Big|^2\ll(\log x)\sum_{h=0}^{h_0+1}\Big|\sum_{2^{h-1}z<n\leqslant 2^hz}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-\mathrm{i}t}\Big|^2$$

此处按惯例当 $h=h_0+1$ 时,内和中 n 的上界为 xz. 这给出有 h_0+1 个和的 S_1 的不等式,其中典型的一个为

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{z}|\tau(\chi)|^2\Big|\sum_{2^{h-1}z<n\leqslant 2^hz}\chi(n)a_n(x,z)n^{-\sigma-\mathrm{i}t}\Big|^2$$

对于每个这种和,我们用定理 3,其中 $Y=2^{h-1}z, Z=2^hz$(或 xz), $a_n=a_n(x,z)n^{-\sigma-\mathrm{i}t}$,注意 $|a_n(x,z)|\leqslant d(n)$ 及

$$\sum_{n=1}^{N}d^3(n)\ll N(\log N)^7$$

与 $\log(2^hz)\ll\log x$,所以上面最后一个和有估计

$$D\max(2^{h-1}z,M^2)\sum_{2^{h-1}z<n\leqslant 2^hz}d(n)a_n^2(x,z)n^{-2\sigma}\ll$$

$$D2^hz\sum_{2^{h-1}z<n\leqslant 2^hz}d^3(n)n^{-2\sigma}\ll D(2^hz)^{1-2\sigma}\sum_{k=1}^{2^hz}d^3(n)\ll$$

$$D(2^hz)^{2-2\sigma}(\log x)^7\ll Dz^{2-2\sigma}(\log x)^7$$

代入 S_1,则得

$$S_1\ll(\log x)\sum_{z=1}^{0}Dz^{2-2\sigma}(\log x)^7\ll D(\log x)^9$$

结合所有这些结果即得引理 9.

引理 10 命 $f_1(s),\cdots,f_K(s)$ 为带状区域 $\alpha<\sigma<\beta$ 中的正则函数,在其边界上,它们是连续的,假定当 $|t|\to\infty$ 时,它们对于 σ 皆一致 $\to 0$. 命 $c_1,\cdots,c_K$ 为正整并定义

$$J(\sigma;\lambda)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{K}c_k\,|f_k(\sigma+\mathrm{i}t)|^{1-\sigma}\mathrm{d}t\right\}^{\lambda} \tag{48}$$

则

$$J(\sigma;\lambda u+\mu v)\leqslant J(\alpha;\lambda)^{u}J(\beta;\mu)^{v} \tag{49}$$

此处

$$u=(\beta-\sigma)/(\beta-\alpha),\quad v=(\sigma-\alpha)/(\beta-\alpha)$$

证明 当 $K=1$ 时,这是茄布利尔(Gabriel)①定理,他的证明推广到一般情况是不困难的,在证明茄布利尔的定理 1 时,我们用 $\int_{AB}\sum_{k=1}^{K}c_k\phi_k(z)\phi_k(z)\mathrm{d}z$ 代替他的 $\int\phi(z)\bar{\phi}(z)\mathrm{d}z$,除增加利用赫德尔(Hölder)不等式外,均按原来同样的证明方法,这是仅需作的稍本质的改动.

为简单计,我们记

$$\Phi(\alpha,T)=\int_{-T}^{T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\,|\log^{+}|1-f^2(\alpha+\mathrm{i}t,\chi)|\,\mathrm{d}t \tag{50}$$

引理 11 关系式

$$\Phi(\alpha,T)\ll DT(M^2+MT)^{4(1-\alpha)/(3-2\alpha)}\log^{9}(M+T) \tag{51}$$

对于 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1, T\geqslant 2$ 一致成立,而

$$\Phi(\alpha,T)D\ll T\log^{9}(M+T) \tag{52}$$

对于 $\alpha\geqslant 1, T\geqslant 2$ 一致成立.

证明 对于 $T\geqslant 4$,置

$$f_T(s,\chi)=f(s,\chi)/\cos(s/T)$$

$$J_T(\sigma;\lambda)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2\,|f_T(\sigma+\mathrm{i}t,\lambda)|^{1/\lambda}\mathrm{d}t\right\}^{\lambda}$$

对于 $T\geqslant 4, \frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$,我们有

$$\frac{1}{2}\exp(|t|/T)\leqslant|\cos(s/T)|\leqslant\exp(|t|/T)$$

所以 $f_T(s,\chi)$ 为 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$ 中 s 的正则函数及当 $|t|\to\infty$ 时,于区域 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$

① R. M. Gabriel, "Some results concerning the integrals of moduli of regular functions along certain curves", Journal London Math. Soc, 1927, 2: 112-117.

中一致地 $\to 0$.

由 ⑬ 及引理 8 可知

$$J_T(\frac{1}{2};1) \ll \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|f(\frac{1}{2}+it,\chi)|\,dt \ll$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/T}D(M^2+M|t|)\log^2(M+|t|)dt \ll$$

$$DT(M^2+MT)\log^2(M+T)$$

同理,由引理 9 得

$$J_T(I;\frac{1}{2}) \ll \{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|f(1+it,\chi)|^2dt\}^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\{DT\log^9(M+T)\}^{\frac{1}{2}}$$

用引理 10 两个变元的凸定理,并置

$$a=\frac{1}{2},\beta=1,\lambda=1,\mu=\frac{1}{2},u=2(1-\sigma)$$

$$v=2\sigma-1$$

$$c_k=\frac{1}{\phi(q)}|\tau(\chi)|^2,f_k(s)=f_T(s,\chi)$$

则得

$$J_T(\sigma;\frac{3}{2}-\sigma) \ll \{DT(M^2+MT)\log^2(M+T)\}^{2-2\sigma}\{DT\log^9(M+T)\}^{\sigma-\frac{1}{2}} \ll$$

$$\{DT\log^9(M+T)\}^{\frac{3}{2}-\sigma}(M^2+MT)^{2-2\sigma} \qquad ⑭$$

对于$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1, T\geqslant 4$一致成立.

对于每个复数 w 及$\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$中每个 λ 皆有

$$\log^+|1-w^2| \ll |w|^{1/\lambda} \qquad ⑮$$

因此由 ⑩ 中 $\Phi(\alpha,T)$ 的定义可知

$$\Phi(\sigma,T) \ll \int_{-T}^{T}\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^2|f(\sigma+it,\chi)|^{1/(\frac{3}{2}-\sigma)}dt$$

对于$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1$成立,由 ⑬ 我们可以引进一个因子

$$|\cos((\sigma+it)/T)|^{-1/(\frac{3}{2}-\sigma)}$$

于积分之中,这相当于将 $f(\sigma+it,\chi)$ 换成 $f_T(\sigma+it,\chi)$. 所以

$$\Phi(\sigma,T) \ll \{J_T(\sigma;\frac{3}{2}-\sigma)\}^{1/(\frac{3}{2}-\sigma)}$$

现在引理 11 的第一个结论,即 ⑪ 可以由 ⑭ 推出.

为了得到第二个结论，即 ㊷，我们再用不等式 ㊺，由它推出

$$\Phi(\alpha, T) \ll \int_{-T}^{T} \sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2 |f(\alpha + it, \chi)|^2 dt$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 时，㊷ 由引理 9 立刻推出，引理 11 证完.

定理 5 的证明 为简单计，我们记

$$N_Q(\sigma, T) = \sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2 N(\sigma, T; \chi)$$

由引理 5 并取 $\beta = 2$，由引理 6 及 ㊹ 得

$$\begin{aligned}
2\pi M! \int_{\alpha}^{2} N_Q(\sigma, T) d\sigma \leqslant & \int_{-T}^{T} \{\log |F(\alpha + it)| - \log |F(2 + it)|\} dt + \\
& \int_{\alpha}^{2} \{\arg F(\sigma + it) - \arg F(\sigma - it)\} d\sigma \ll \\
& \int_{-T}^{T} \log^{+} |F(\sigma + it)| dt + \\
& \int_{0}^{2\pi} \log^{+} |F(2 + iT + (2 - \alpha)e^{i\theta})| d\theta + M!T \qquad ㊻
\end{aligned}$$

固定 σ，函数 $N_Q(\sigma, T)$ 为 T 的非递减函数，关于 T，从 0 至 $2T$ 积分 ㊻ 得

$$\begin{aligned}
2\pi M! T \int_{\alpha}^{2} N_Q(\sigma, T) d\sigma \leqslant & 2\pi M! \int_{0}^{2T} \int_{\alpha}^{2} N_Q(\sigma, U) d\sigma dU \ll \\
& \int_{0}^{2T} \int_{-U}^{U} \log^{+} |F(\alpha + it)| dt dU + \\
& \int_{0}^{2T} \int_{0}^{2\pi} \log^{+} |F(2 + iU + (2 - \alpha)e^{i\theta})| d\theta dU + M! T^2 \qquad ㊼
\end{aligned}$$

显然

$$\int_{0}^{2T} \int_{-U}^{U} \log^{+} |F(\alpha + it)| dt dU \leqslant 2T \int_{-2}^{2T} \log^{+} |F(\alpha + it)| dt$$

及

$$\begin{aligned}
& \int_{0}^{2T} \int_{0}^{2\pi} \log^{+} |F(2 + iU + (2 - \alpha)e^{i\theta})| d\theta dU \leqslant \\
& 2\pi \max_{\theta} \int_{0}^{2T} \log^{+} |F(2 + iU + (2 - \alpha)e^{i\theta})| dU \ll \\
& \max_{\alpha \leqslant \sigma \leqslant 4} \int_{0}^{2T+2} \log^{+} |F(\sigma + it)| dt
\end{aligned}$$

将这些结果用于 ㊼，我们得

$$M! \int_{\alpha}^{2} N_Q(\sigma, T) d\sigma \ll M! T + \max_{\alpha \leqslant \sigma \leqslant 4} \int_{-2T-2}^{2T+2} \log^{+} |F(\sigma + it)| dt \qquad ㊽$$

由于

$$\log^+ |F(s)| = \log^+ \prod_{q\in Q}\prod_{\chi\neq\chi_0} |1 - f^2(s,\chi)|^{e(\chi)} \leqslant$$
$$M! \sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0} |\tau(\chi)|^2 \log^+ |1 - f^2(s,\chi)|$$

所以由 ㊿ 关于 $\Phi(\alpha, T)$ 的定义可知

$$\int_{-2T-2}^{2T+2} \log^+ |F(\sigma + \mathrm{i}t)| \,\mathrm{d}t \leqslant M!\Phi(\sigma, 2T+2)$$

因此由 ㊽ 与引理 11 可知当 $T \geqslant 2$ 及 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时有

$$\int_\alpha^2 N_Q(\sigma, T)\mathrm{d}\sigma \ll DT(M^2 + MT)^{4(1-\alpha)/(3-2\alpha)}\log^9(M+T) \tag{59}$$

固定 T，$N_Q(\sigma, T)$ 是 σ 的非递增函数，所以若 $0 < \delta < 1$，则当 $T \geqslant 2$ 及 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时有

$$N_Q(\alpha + \delta, T) \leqslant \delta^{-1}\int_\alpha^{\alpha+\delta} N_Q(\sigma, T)\mathrm{d}\sigma \ll$$
$$\delta^{-1}DT(M^2 + MT)^{4(1-\alpha)/(3-2\alpha)}\log^9(M+T)$$

取

$$\delta = \frac{1}{\log}(M+T)$$

并注意

$$4(1-\alpha)/(3-2\alpha) = 4(1-\alpha-\delta)/(3-2\alpha-2\delta) + O(\delta)$$

及

$$(M^2 + MT)^\delta = O(1)$$

即可知

$$N_Q(\alpha, T) \leqslant DT(M^2 + MT)^{4(1-\alpha)/(3-2\alpha)}\log^{10}(M+T) \tag{60}$$

对于 $\frac{1}{2} + \delta \leqslant \alpha \leqslant 1$ 一致成立.

我们还有

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{\phi(q)} |\tau(\chi_0)|^2 N(\alpha, T; \chi_0) = N(\alpha, T)\sum_{q\in Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi(q)} \ll$$
$$T(\log T)(\log M) \tag{61}$$

此处如通常一样，$N(\alpha, T)$ 表示 $\zeta(s)$ 在矩形 $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1$，$|t| \leqslant T$ 中的零点个数，将 ⑥⓪ 与 ⑥① 相加，即得定理 5 的结论，即 ⑭ 对于 $\frac{1}{2} + \delta \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时成立.

最后,假定$\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2} + \delta$,由一个熟知结果(帕拉哈①)得

$$\sum_{\chi} N(\alpha, T; \chi) \ll \phi(q) T\log(M + T)$$

因此

$$\sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} |\tau(\chi)|^2 N(\alpha, T; \chi) \ll \sum_{q \in Q} qT\log(M + T) \ll M^2 T\log(M + T)$$

当$\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2} + \delta$时,这个不等式比 ⑭ 为优,注意到 δ 的定义即得定理 5.

我们来推导 ⑰ 与 ⑱ 每个特征 $\chi(\bmod q)$ 都是由原特征 $\chi^*(\bmod q^*)$ 引起的,此处 $q^* \mid q$ 及

$$N(\alpha, T; \chi) = N(\alpha, T; \chi^*)$$

对于给定 q^*,q 的值最多为 X/q^*,所以

$$\sum_{q \leqslant X} \sum_{\chi} N(\alpha, T; \chi) \leqslant \sum_{q^* \leqslant X} X/q^* \sum_{\chi^*} N(\alpha, T; \chi^*)$$

将过 q^* 的和分成诸区间$(2^h, 2^{h+1})$,则得估计

$$(\log X) \max_{M \leqslant X} XM^{-1} \sum_{q^* \leqslant M} \sum_{\chi^*} N(\alpha, T; \chi^*) \ll \max_{M \leqslant X} XM^{-1} T(M^2 + MT)^{\beta} (XT)^{\varepsilon}$$

此处 $\beta = 4(1 - \alpha)/(3 - 2\alpha)$,这个式子远小于 $\max(X^{1+\varepsilon}T^{1+\beta+\varepsilon}, X^{2\beta+\varepsilon}T^{1+\varepsilon})$,因 $T \leqslant X^{\frac{1}{2}}$,所以

$$T^{\beta} \leqslant X^{2(1-\alpha)/(3-2\alpha)} \leqslant X^{2(1-\alpha)}$$

还有 $2\beta \leqslant 1 + 2(1 - \alpha)$,故得 ⑰. 当$\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$时,我们注意到 $\beta \leqslant 1/2$,故得 ⑱.

本文结束之际,我们关于定理 5 作两点注记,我们可证很多其他类似的不等式,例如

$$\sum_{q \in Q} \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} |\tau(\chi)|^2 N(\alpha, T; \chi) \ll DT^2 M^{5(1-\alpha)} \log^{10}(M + T)$$

当 $\alpha > \frac{7}{11}$ 及 T 不太大时,它比定理 5 更优. 定理 5 的不等式类似于英格姆(Ingham)的另一个结果(梯其玛奇②),在理想的状态下,它给出整个区间 $T \ll M^{1+\varepsilon}$ 一个有用的界;这似乎在定理 4 的证明中是很本质的.

---

① K. Prachar, Primzahlverteilung (Springor, 1957).
② E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function (Oxford, 1951).

2 大偶数表为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和[①②]

——陈景润

本文的目的在于用筛法证明了每一充分大的偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和.

关于孪生素数问题亦得到类似的结果.

2.1 引言

把命题"每一个充分大的偶数都能表示为一个素数及一个不超过 a 个素数的乘积之和"简记为$(1,a)$.

不少数学工作者改进了筛法及素数分布的某些结果,并用以改善$(1,a)$.现在我们将$(1,a)$发展历史简述如下:

$(1,c)$——Renyi[③].

$(1,5)$——潘承洞[④]、Барбан[⑤].

$(1,4)$——王元[⑥]、潘承洞[⑦]、Барбан[⑧].

$(1,3)$——Бухштаб[⑨]、Виноградов[⑩]、Bombieri[⑪].

在注释[⑫]中我们给出$(1,2)$的证明提要.

命 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的素数 p 的个数

$$x-p=p_1 \quad 或 \quad x-p=p_2p_3$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

用 x 表一充分大的偶数.命

$$C_x=\prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

对于任意给定的偶数 h 及充分大的 x,用 $x_h(1,2)$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数

$$p\leqslant x, p+h=p_1 \quad 或 \quad p+h=p_2p_3$$

---

① 1973年3月13日收到.
② 原载中国科学,16(1973),no.2.111-128.
③ Renyi A. Изв. АН СССР, серия матем, 1948,2:57-78.
④ 潘承洞.数学学报,1962,12:95-106.
⑤ Барбан М Б. Доклбы Акабемии Наук Уз СССР, 1961,8:9-11.
⑥ 王元.中国科学,1962,11:1033-1054.
⑦ 潘承洞.中国科学,1963,12:455-473.
⑧ Барбан М Б. Матем. сб.,1963,61:418-425.
⑨ Бухштаб А А. Доклабы АН СССР,1965,162:739-742.
⑩ Виноградов А И. Изв. АН СССР, серия матем., 1965,29:903-934.
⑪ Bombieri E. Mathematika, 1965, 12:201-225.
⑫ 陈景润.科学通报,1966,17:385-386.

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

本文的目的在于证明并改进作者在注释①内所提及的全部结果,现在详述如下.

定理1 (1,2) 及 $P_x(1,2)\geqslant\frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$.

定理2 对于任意偶数 h,都存在无限多个素数 p,使得 $p+h$ 的素因子的个数不超过2个及 $x_h(1,2)\geqslant\frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$.

在证明定理1时,主要用到本文中的引理8和引理9.在证明引理8时,我们使用较为简单的数字计算方法;而证明引理9时,我们使用了 Bombieri 定理②及 Richert① 中的一个结果.

2.2 几个引理

引理1 假设 $y\geqslant 0$,而$[\log x]$表示 $\log x$ 的整数部分,$x>1$

$$\Phi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{y^w\mathrm{d}w}{w\left(1+\frac{w}{(\log x)^{1.1}}\right)^{[\log x]+1}}$$

显见,当$0\leqslant y\leqslant 1$时,有 $\Phi(y)=0$.对于所有 $y\geqslant 0$,则 $\Phi(y)$ 是一个非减函数.当 $\log x\geqslant 10^4$ 及 $y\geqslant e^{2(\log x)^{-0.1}}$ 时,则有

$$1-x^{-0.1}\leqslant\Phi(y)\leqslant 1$$

证明 我们先来证明

$$\frac{\partial^r}{\partial w^r}\left(\frac{y^w}{w}\right)=\left(\frac{y^w}{w}\right)\left\{(\log y)^r+\sum_{i=1}^{r}\frac{(-1)^i r\cdots(r-i+1)(\log y)^{r-i}}{w^i}\right\}\qquad①$$

成立.显见,式①当 $r=1$ 和 $r=2$ 时都成立.现假定式①对于 $r=2,\cdots,S$ 时都成立,而证明对于 $S+1$ 也成立.由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{S+1}}{\partial w^{S+1}}\left(\frac{y^w}{w}\right)&=\frac{\partial}{\partial w}\left\{y^w\left(\frac{(\log y)^S}{w}+\sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^iS\cdots(S-i+1)(\log y)^{S-i}}{w^{i+1}}\right)\right\}=\\&y^w\left\{\frac{(\log y)^{S+1}}{w}+\sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^iS\cdots(S-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{w^{i+1}}\right)-\\&\frac{(\log y)^S}{w^2}+\sum_{i=1}^{S}\frac{(-1)^{i+1}S\cdots(S-i+1)(i+1)(\log y)^{S-i}}{w^{i+2}}\Big)\Big\}=\\&\left(\frac{y^w}{w}\right)\left\{(\log y)^{S+1}-\frac{(S+1)(\log y)^S}{w}+\frac{(-1)^{S+1}(S+1)!}{w^{S+1}}+\right.\\&\sum_{i=2}^{S}\left(\frac{(-1)^iS\cdots(S-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{w^i}+\right.\end{aligned}$$

① Richert H E. Mathematika, 1969, 16:1-22.
② Bombieri E. Mathematika, 1965, 12:201-225.

$$\frac{(-1)^i S\cdots(S+2-i)i(\log y)^{S+1-i}}{w^i})\Big\} =$$

$$(\frac{y^w}{w})\Big\{(\log y)^{S+1}+\sum_{i=1}^{S+1}\frac{(-1)^i(S+1)\cdots(S+1-i+1)(\log y)^{S+1-i}}{w^i}\Big\}$$

故式①得证.

又当 $y \geqslant 1$ 时,我们有

$$\Phi(y) = 1+\Big\{\frac{(\log x)^{1.1+1.1[\log x]}}{[\log x]!}\Big\}\Big\{\frac{\partial^{[\log x]}}{\partial w^{[\log x]}}(\frac{y^w}{w})\Big\}_{w=-(\log x)^{1.1}} =$$

$$1-\mathrm{e}^{-(\log x)^{1.1}(\log y)}\sum_{\nu=0}^{[\log x]}\frac{\{(\log x)^{1.1}(\log y)\}^{\nu}}{\nu!} =$$

$$\Big\{\frac{1}{[\log x]!}\Big\}\int_0^{(\log x)^{1.1}(\log y)}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\lambda$$

因为 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时,$\Phi(y)=0$. 故由上式得到:当 $y\geqslant 0$ 时,则 $\Phi(y)$ 是一个非减函数. 又当 $y \geqslant \mathrm{e}^{2(\log x)^{-1.0}}$ 时,有

$$0 < 1-\Phi(y) = \Big\{\frac{1}{[\log x]!}\Big\}\int_{(\log x)^{1.1}(\log y)}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\lambda \leqslant$$

$$\Big\{\frac{1}{[\log x]!}\Big\}\int_{2[\log x]}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\lambda =$$

$$\Big\{\frac{([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\Big\}\int_2^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda[\log x]}\lambda^{[\log x]}\mathrm{d}\lambda =$$

$$\Big\{\frac{\mathrm{e}^{-[\log x]}([\log x])^{1+[\log x]}}{[\log x]!}\Big\}.$$

$$\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda[\log x]}(1+\lambda)^{[\log x]}\mathrm{d}\lambda \leqslant x^{-0.1}$$

其中用到 $\log x \geqslant 10^4$ 及当 $\lambda \geqslant 1$ 时,有 $\mathrm{e}^{\log(1+\lambda)} \leqslant \mathrm{e}^{\lambda\log 2}$.

引理 2 令 $e(\alpha)=\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}$, $S(\alpha)=\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e(n\alpha)$, $Z=\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$,其中 a_n 是任意的实数. 我们用令 $\sum_{\chi_q}{}^{*}$ 来表示和式之中经过且只经过模 q 的所有原特征,则有

$$\sum_{q\leqslant X}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\Big|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\Big|^2 \leqslant (X^2+\pi N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2 \qquad ②$$

$$\sum_{D<q\leqslant X}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\Big|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\Big|^2 \ll (Q+\frac{N}{D})\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2 \qquad ③$$

证明 令 F 是一个周期为 1 的复数值可微函数,则有

$$|F(\frac{a}{q})| = |F(\alpha)-\int_{\frac{a}{q}}^{\alpha}\mathrm{d}F(\beta)| \leqslant |F(\alpha)|+\int_{\frac{a}{q}}^{\alpha}|F'(\beta)||\mathrm{d}\beta|$$

我们用 $I(a,q)$ 来表示以 $\frac{a}{q}$ 为中心，而长度 $\frac{1}{Q^2}$ 的区间，显见，当 $1 \leqslant a < q$，$(a,q)=1, q \leqslant Q$ 时，所有的区间 $I(a,q)$ 都没有共同部分，故得

$$\sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a < q}} \left| F\left(\frac{a}{q}\right) \right| \leqslant \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a < q}} \left\{ Q^2 \int_{I(a,q)} |F(\alpha)| \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2} \int_{I(a,q)} |F'(\beta)| \mathrm{d}\beta \right\} \leqslant$$

$$Q^2 \int_0^1 |F(\alpha)| \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2} \int_0^1 |F'(\beta)| \mathrm{d}\beta$$

我们取 $F(\alpha) = |S(\alpha)|^2$，则得

$$\int_0^1 |F(\alpha)| \mathrm{d}\alpha = Z$$

及

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |F'(\beta)| \mathrm{d}\beta = \int_0^1 |S(\alpha)| |S'(\alpha)| \mathrm{d}\alpha \leqslant$$

$$\left\{ \left(\int_0^1 |S(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha\right)\left(\int_0^1 |S'(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha\right) \right\}^{1/2} =$$

$$Z^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |S'(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha\right)^{1/2}$$

故有

$$\sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a < q}} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a < q}} \left\{ \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right| \left| e\left(-\frac{a(M+[\frac{N}{2}])}{q} \right) \right| \right\}^2 =$$

$$\sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a < q}} \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\left\{ n - (M + [\frac{N}{2}]) \right\} \frac{a}{q} \right) \right|^2 =$$

$$\sum_{q \leqslant Q} \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leqslant a < q}} \left| \sum_{-[\frac{N}{2}]+1 \leqslant n \leqslant N-[\frac{N}{2}]} a_{n+M+[\frac{N}{2}]} e\left(\frac{na}{q}\right) \right|^2 \leqslant$$

$$ZQ^2 + Z^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]} \left((2\pi n) a_{n+M+[\frac{N}{2}]} \right)^2 \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$ZQ^2 + \pi N Z^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-[\frac{N}{2}]+1}^{N-[\frac{N}{2}]} |a_{n+M+[\frac{N}{2}]}|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$(Q^2 + \pi N) Z \tag{④}$$

令 χ^* 表示原特征

$$\tau(\chi_q^*) = \sum_{1 \leqslant a < q} \chi_q^*(a) e\left(\frac{a}{q}\right), \quad \tau(\overline{\chi_q^*}) \chi_q^*(n) = \sum_{a=1}^{q} \overline{\chi_q^*}(a) e\left(\frac{na}{q}\right)$$

由于 $|\tau(\overline{\chi_q^*})|^2 = q$，故得到

$$\left(\frac{1}{\varphi(q)}\right)\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2 \leqslant \left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right)\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\tau(\bar{\chi}_q)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2 =$$

$$\left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right)\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{a=1}^{q}\bar{\chi}_q(a)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2 \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{q\varphi(q)}\right)\sum_{\chi_q}\left|\sum_{a=1}^{q}\bar{\chi}_q(a)\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2 \leqslant$$

$$\frac{1}{q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n e\left(\frac{na}{q}\right)\right|^2$$

由上式及式④即得到式②. 我们定义 h 是一个正整数,它使得 $2^hD < Q \leqslant 2^{h+1}D$,则我们有

$$\sum_{D<q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2 \leqslant$$

$$\sum_{i=0}^{h}\left(\sum_{2^iD<q\leqslant 2^{i+1}D}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2\right) \leqslant$$

$$\sum_{i=0}^{h}\left(\frac{1}{2^iD}\right)\left(\sum_{2^iD<q\leqslant 2^{i+1}D}\frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi_q(n)\right|^2\right) \leqslant$$

$$\sum_{i=0}^{h}\left(2^{i+2}D+\frac{\pi N}{2^iD}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2 \ll$$

$$\left(Q+\frac{N}{D}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

故引理 2 得证.

引理 3 当 $S=\sigma+\mathrm{i}t$ 和 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ 时,则有

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}|L(S,\chi_q)|^4 \ll Q^2|S|^2(\log Q)^4$$

证明 我们有

$$L(S,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^S}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^S}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\sum_{i\leqslant n}\chi(i)-\sum_{i\leqslant n-1}\chi(i)}{n^S}=$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^S}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{i\leqslant n}\chi(i)\right)\left(\frac{1}{n^S}-\frac{1}{(n+1)^S}\right)-\frac{\sum_{i\leqslant N}\chi(i)}{(N+1)^S}=$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n^S}+O\left(\frac{|S|q^{1/2}\log q}{N^{\sigma}}\right)$$

故由引理 2 及 $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$,我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}|L(S,\chi_q)|^4\ll\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left(\left|\sum_{n=1}^{[Q|S|]}\frac{\chi_q(n)}{n^S}\right|^4+Q^{-2}|S|^2q^2(\log q)^4\right)\ll$$

$$|S|^2Q^2(\log Q)^4+(Q^2+Q^2|S|^2)\sum_{n=1}^{[Q|S|]^2}\frac{d^2(n)}{n}\ll$$

$$Q^2|S|^2(\log Q)^4$$

故本引理得证.

引理 4 当 k 是无平方因子的奇数,而 $m\neq 1$ 时,则我们有

$$\left|\sum_{\chi_k}{}^{*}\chi_k(m)\right|\leqslant|(m-1,k)|$$

证明 令 $k=p_1\cdot\cdots\cdot p_l$,而 $p_1<\cdots<p_l$.令 g_j 是 mod p_j 的原根,则有 $m\equiv g_j^{\xi_j}(\bmod p_j)$,$0\leqslant\xi_j\leqslant p_j-2$,$j=1,\cdots,l$,则关于模 k 的所有原特征可表示为

$$\chi_k^*(m)=e^{2\pi i\left(\frac{v_1\xi_1}{p_1-1}+\cdots+\frac{v_l\xi_l}{p_l-1}\right)}$$

其中 $1\leqslant v_j\leqslant p_j-2$,而 $j=1,\cdots,l$.

令 $Z(m,k)=\left|\sum_{\chi_k}{}^{*}\chi_k(m)\right|$,则有

$$Z(m,k)=\prod_{j=1}^{l}Z(m,p_j)=\prod_{j=1}^{l}\left|\sum_{v_j=1}^{p_j-2}e^{2\pi i\frac{v_j\xi_j}{p_j-1}}\right|=\prod_{\substack{j=1\\ \xi_j=0}}^{l}(p_j-2)<$$

$$\prod_{p_j|(m-1)}p_j=|(m-1,k)|$$

故本引理得证.

设 x 是偶数,令 $\lambda_1=1$;当 $d>x^{1/4-\varepsilon/2}$ 时,令 $\lambda_d=0$;而当 $1<d\leqslant x^{1/4-\varepsilon/2}$ 时,令

$$\lambda_d=\frac{\mu(d)}{f(d)g(d)}\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/d\\ (k,xd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\ (k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}^{-1}$$

其中 $g(k)=\frac{1}{\varphi(k)}$,$f(k)=\varphi(k)\prod_{p|k}\frac{p-2}{p-1}$.又当 d 为奇数,$\mu(d)\neq 0$ 时,有

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\ (k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}=\sum_{t|d}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\ (k,x)=1,(k,d)=t}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}=$$

$$\sum_{t|t}\left\{\frac{1}{\prod_{p|t}(p-2)}\right\}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/t\\ (k,xd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\geqslant$$

$$\left\{\prod_{p|d}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\right\}\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}/d\\ (k,xd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}$$

故对于所有正整数 d,都有 $|\lambda_d| \leqslant 1$. 设 x 是偶数,$\log x > 10^4$,又令

$$Q = \prod_{2 \leqslant p \leqslant x^{1/4}} p, \quad \Omega = \sum_{\substack{x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 \leqslant (x/p_1)^{1/2} \\ p_3 \leqslant x/(p_1 p_2) \\ (x - p_1 p_2 p_3, Q) = 1}} 1$$

$$M = \sum_{x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 \leqslant (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right) \Big(\sum_{\substack{n \leqslant x/(p_1 p_2) \\ (x - p_1 p_2 n, Q) = 1}} \Lambda(n) \Big)$$

则有 $\Omega \leqslant \frac{M}{1 - \varepsilon} + N$,其中

$$N \ll \sum_{x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 \leqslant (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{x}{p_1 p_2} \right)^{1-\epsilon} \ll x^{1-\epsilon} \int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\mathrm{d}S}{S^{1-\epsilon}} \int_{x^{\frac{1}{3}}}^{(\frac{x}{S})^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\epsilon}} \ll$$

$$x^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\mathrm{d}S}{S^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \ll x^{1-\frac{\varepsilon}{3}}$$

由引理 1,我们有

$$M \leqslant \sum_{x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 \leqslant (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right) \sum_{\substack{n \leqslant x/(p_1 p_2) \\ (x - p_1 p_2 n, Q) = 1}} \Lambda(n) \Phi(\frac{x}{p_1 p_2 n}) +$$

$$O(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}) \leqslant$$

$$\sum_{x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 \leqslant (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right) \sum_{n \leqslant x/(p_1 p_2)} \Lambda(n) \Phi(\frac{x}{p_1 p_2 n}) \Big(\sum_{\substack{d | (x - p_1 p_2 n, Q) \\ (d, x) = 1}} \lambda_d \Big)^2 +$$

$$O(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}) =$$

$$\sum_{\substack{(d_1, x) = 1 \\ d_1 | Q}} \sum_{\substack{(d_2, x) = 1 \\ d_2 | Q}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} N_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}} + O(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}) \qquad ⑤$$

其中

$$N_{\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}} = \sum_{x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 \leqslant (x/p_1)^{1/2}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right) \sum_{\substack{n \leqslant x/(p_1 p_2) \\ x - p_1 p_2 n \equiv 0 (\mathrm{mod} \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)})}} \Lambda(n) \Phi(\frac{x}{p_1 p_2 n}) =$$

$$\left\{ \frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)} \right)} \right\} \left\{ \sum_{\substack{x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 \leqslant (x/p_1)^{1/2} \\ n \leqslant x/(p_1 p_2) \\ (p_1 p_2 n, d_1 d_2) = 1}} \left(\frac{1}{\log \frac{x}{p_1 p_2}} \right) \Lambda(n) \Phi(\frac{x}{p_1 p_2 n}) + \right.$$

$$\sum_{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\neq\chi_0}\overline{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(x)}\cdot$$

$$\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\ n\leqslant x/(p_1p_2)}}\left(\frac{\Lambda(n)}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1p_2n)\Bigg\}=$$

$$\left\{\frac{1}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right\}\Bigg\{\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\ n\leqslant x/(p_1p_2)\\ (p_1p_2n,d_1d_2)=1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)\Bigg\}-$$

$$\left\{\frac{1}{2\pi i\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\right\}\Bigg\{\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\cdot$$

$$\left(\frac{x^{\omega}}{\omega}\right)\sum_{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\neq\chi_0}\overline{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(x)}\,\frac{L'}{L}\left(\omega,\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\right)\cdot$$

$$\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1p_2)\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\left(\frac{d\omega}{(p_1p_2)^{\omega}}\right)\Bigg\}\qquad⑥$$

令

$$M_1=\sum_{(d_1,x)=1}\sum_{(d_2,x)=1}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_1}}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\ n\leqslant x/(p_1p_2)}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Lambda(n)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)$$

$$M_2=\sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2}-\varepsilon\\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\Bigg|\sum_{\chi_d\neq\chi_0}\overline{\chi_{d^*}^*(x)}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^{\omega}}{\omega}\right)\cdot$$

$$\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\frac{L'}{L}(\omega,\chi_{d^*}^*)\cdot$$

$$\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\ (p_1p_2,d)=1}}\chi_{d^*}^*(p_1p_2)\left((p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}\right)^{-1}d\omega\Bigg|$$

其中 d^* 是 χ_d 的 conductor，而 $\chi_{d^*}^*$ 是等价于 χ_d 的 mod d^* 的原特征. $\nu(d)$ 是 d 的素数因子的个数.

引理 5 设 x 是偶数，则有

$$\Omega\leqslant\frac{M_1+M_2}{1-\varepsilon}+O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right)$$

证明 由式⑤和式⑥，我们有

$$M\leqslant M_1+|M_3|+M_4+O\left(\frac{x}{(\log x)^{2.01}}\right)\qquad⑦$$

其中 $$M_3=\sum_{(d_1,x)=1}\sum_{(d_2,x)=1}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)})}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\ n\leqslant x/p_1p_2\\ (d_1,d_2,p_1p_2n)>1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\cdot$$

$$\Lambda(n)\Phi(\frac{x}{p_1p_2n})$$

$$M_4=\sum_{(d_1,x)=1}\sum_{(d_2,x)=1}\left(-\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{2\pi\mathrm{i}\varphi(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)})}\right)\int_{2-\mathrm{i}\infty}^{2+\mathrm{i}\infty}(\frac{x^\omega}{\omega})\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\cdot$$

$$\sum_{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}\neq\chi_0}\overline{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(x)}\frac{L'}{L}(\omega,\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}})\cdot$$

$$\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\frac{\chi_{\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}}(p_1p_2)}{(p_1p_2)^\omega\log\frac{x}{p_1p_2}}\mathrm{d}\omega$$

首先估计 M_3

$$M_3\leqslant x^\varepsilon\sum_{d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}\frac{1}{d}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\ n\leqslant x/(p_1p_2)\\ (d,p_1p_2n)>1}}\Lambda(n)\ll$$

$$\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{p_1p_2}\right)\left(\sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\ p_1\mid d}}\frac{1}{d}+\sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\ p_2\mid d}}\frac{1}{d}\right)+$$

$$\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\sum_{p\leqslant\frac{x}{p_1p_2}}(\log p)\sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\ p\mid d}}\frac{x^\varepsilon}{d}+x^{1-\varepsilon}\ll x^{1-\varepsilon}\qquad ⑧$$

再估计 M_4,设 $\mu(d)\neq0,d=p_1\cdot\cdots\cdot p_k$,则正整数 d_1 和 d_2 满足 $\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}=d$ 的充分和必要的条件是 $d_1=p_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k},d_2=p_1^{\beta_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{\beta_k}$,其中 $0\leqslant\alpha_i\leqslant1$,$0\leqslant\beta_i\leqslant1,\alpha_i+\beta_i\geqslant1(1\leqslant i\leqslant k)$. 故当 $d>0,\mu(d)\neq0$ 时,则满足 $\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}=d$ 的正整数 d_1,d_2 的组数为 $3^{\nu(d)}$.由于 $|\lambda_d|\leqslant1$,故有

$$M_4\leqslant\sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\ (d,x)=1}}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{\varphi(d)}\left|\sum_{\chi_d\neq\chi_0}\int_{2-\mathrm{i}\infty}^{2+\mathrm{i}\infty}(\frac{x^\omega}{\omega})\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\cdot\right.$$

$$\left.\bar{\chi}_d(x)\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\left(\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1,p_2)^\omega}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\right|$$

由于$\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d) = \frac{L'}{L}(\omega,\chi_{d^*}^*) + \sum_{p\mid\frac{d}{d^*}}\frac{\chi_{d^*}^*(p)\log p}{p^w - \chi_{d^*}^*(p)}$,故有

$$M_4 \leqslant M_2 + M_5 \tag{⑨}$$

其中

$$M_5 = \sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2-\epsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\left|\sum_{\chi_d\neq\chi_0}\bar{\chi}_{d^*}^*(x)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{x^w}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\cdot\right.$$

$$\left.\left(\sum_{p\mid\frac{d}{d^*}}\frac{\chi_{d^*}^*(p)\log p}{p^w-\chi_{d^*}^*(p)}\right)\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}}\frac{\chi_{d^*}^*(p_1p_2)}{(p_1p_2)^w\log\frac{x}{p_1p_2}}\mathrm{d}\omega\right|$$

又当 $\mathrm{Re}\ w = 2$ 时,有$\frac{\chi_{d^*}^*(p)}{p^w-\chi_{d^*}^*(p)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{\chi_{d^*}^*(p)}{p^w}\right)^\lambda$.又当 $\lambda\geqslant 1,\mu(d^*)\neq 0$,$(d^*,xp_1p_2p^\lambda) = 1$ 时,则使用引理 4,我们有

$$\begin{aligned}|\sum_{\chi d^*}{}^*\overline{\chi d^*}(x)\chi d^*(p_1p_2p^\lambda)| &= |\sum_{\chi d^*}{}^*\chi^{d^*}(p_1p_2p^\lambda y)|\leqslant\\ &|p_1p_2p^\lambda y-1,d^*)| =\\ &|(x-p_1p_2p^\lambda,d^*)|\end{aligned}\tag{⑩}$$

其中 y 是满足 $xy\equiv 1(\bmod d^*)$ 的解.又由式 ⑩ 及引理 1 得到

$$M_5 \ll \sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2-\epsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\left|\sum_{\substack{d^*\mid d\\d^*>1}}\sum_{p\mid\frac{d}{d^*}}(\log p)\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}}\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{\chi d^*}{}^*\overline{\chi d^*}(x)\chi d^*(p_1p_2p^\lambda)\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2p^\lambda}\right)\right| \ll$$

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^{1/2-\epsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\left|\sum_{\substack{d^*\mid d\\d^*>1}}\sum_{p\mid\frac{d}{d^*}}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}}\cdot\right.$$

$$\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant(\log\frac{x}{p_1p_2})(\log p)^{-1}}\left(\frac{\log p}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)(x-p_1p_2p^\lambda,d^*) \ll$$

$$\sum_{\substack{k_1k_2\leqslant x^{1/2-\epsilon}\\(k_1k_2,x)=1}}\frac{|\mu(k_1)||\mu(k_2)|x^{\frac{\epsilon}{4}}}{\varphi(k_1)\varphi(k_2)}\sum_{p\mid k_2}\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\cdot$$

$$\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant(\log\frac{x}{p_1p_2})(\log p)^{-1}}(x-p_1p_2p^\lambda,k_1) \ll$$

$$x^{\varepsilon/3}\sum_{\substack{k_1\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\(k_1,x)=1}}\frac{1}{k_1}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\p^\lambda\leqslant x/(p_1p_2)}}(x-p_1p_2p^\lambda,k_1)\sum_{\substack{k_2\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\k_2\equiv0(\bmod p)}}\frac{1}{k_2}\ll$$

$$x^{\varepsilon/2}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\p^\lambda\leqslant x/(p_1p_2)}}\frac{1}{p}\sum_{d\mid(x-p_1p_2p^\lambda)}d\sum_{\substack{k_1\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\d\mid k_1}}\frac{1}{k_1}\ll x^{1-\varepsilon} \qquad ⑪$$

由式 ⑦,式 ⑧,式 ⑨ 及式 ⑪,本引理得证.

引理 6 我们有

$$M_2\ll\frac{x}{(\log x)^{2.01}}$$

证明 令

$$\Phi(y,\chi)=\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\frac{L'}{L}(\omega,\chi)\mathrm{d}\omega=$$

$$\int_{1+\frac{1}{\log x}-i\infty}^{1+\frac{1}{\log x}+i\infty}\left(\frac{y^\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\frac{L'}{L}(\omega,\chi)\mathrm{d}\omega$$

则有

$$M_2\leqslant\sum_{\substack{1<l\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\(l,x)=1}}\left\{\sum_{\substack{1<d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\l\mid d,(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\right\}\cdot$$

$$\left|\sum_{\chi_l}{}^*\bar{\chi}_l(x)\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\(p_1p_2,d)=1}}\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\right|\leqslant$$

$$\sum_{\substack{1<d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{\varphi(d)}\left\{\sum_{\substack{1<l\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\(l,xd)=1}}\frac{|\mu(l)|3^{\nu(l)}}{\varphi(l)}\left|\sum_{\chi_l}{}^*\bar{\chi}_l(x)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\(p_1,p_2,d)=1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)\right|\right\}$$

令 $\tau(l)=\sum_{d\mid l}1$,则有

$$\sum_{1<d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{\varphi(d)}\ll(\log x)\sum_{d\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}\frac{(\tau(d))^2}{d}\ll(\log x)^5$$

故有

$$M_2\ll(\log x)^6\max_{1<m\leqslant x^{1/2}}N_m \qquad ⑫$$

其中

$$N_m=\sum_{\substack{1<l\leqslant x^{1/2-\varepsilon}\\(l,x)=1}}\frac{|\mu(l)|3^{\nu(l)}}{l}\sum_{\chi_l}{}^*\bar{\chi}_l(x)\cdot$$

$$\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\(p_1,p_2,M)=1}}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_l\right)\chi_l(p_1p_2)$$

我们用 $\sum\limits_{(k,m)}$ 来表示一个和式，其中的 p_1 和 p_2 经过且只经过 $x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(\frac{x}{p_1})^{1/2}$，$x^{\frac{13}{30}}2^k<p_1p_2\leqslant x^{\frac{13}{30}}2^{k+1}$，$(p_1p_2,m)=1$. 令 I_1 是一个正整数，满足 $2^{I_1-1}(\log x)^{100}<x^{1/2-\varepsilon}<2^{I_1}(\log x)^{100}$，$I_2=[\frac{7\log x}{30\log 2}]$，则有

$$N_m\leqslant\sum_{l=0}^{I_1}\sum_{k=0}^{I_2}N_m^{(l,k)} \tag{13}$$

其中

$$N_m^{(0,k)}=\sum_{\substack{1<d\leqslant(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}\left|\sum_{\chi_d}{}^{*}\overline{\chi_d}(x)\cdot\right.$$
$$\left.\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|$$

而当 $l\geqslant1$ 时

$$N_m^{(l,k)}=\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leqslant2^l(\log x)^{100}\\(d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d}\left|\sum_{\chi_d}{}^{*}\overline{\chi_d}(x)\cdot\right.$$
$$\left.\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2},\chi_d\right)\chi_d(p_1p_2)\right|$$

令 $S(H,\omega,\chi_d)=\sum\limits_{n=1}^{H}\frac{\mu(n)\chi_d(n)}{n^\omega}$，其中 $H\ll x$. 我们知道当 $\mathrm{Re}\ \omega\geqslant1$ 时，有

$$S(H,\omega,\chi_d)\ll\log x,\quad L(\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{H}\frac{\chi_d(n)}{n^\omega}+O\left(\frac{|\omega|d^{\frac12}\log d}{H}\right)$$

故得到当 $\mathrm{Re}\ \omega\geqslant1$ 时，有

$$1-L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^\omega}+O\left(\frac{|\omega|d^{\frac12}(\log x)^2}{H}\right)$$

其中 $C_H(1)=0$，当 $n>H^2$ 时，$C_H(n)=0$；而当 $n>1$，$C_H(n)=-\sum\limits_{d}\mu(d)$，其中 d 经过 n 的因子，它使得 $1\leqslant d\leqslant H$ 及 $\frac{n}{d}\leqslant H$；当 $1\leqslant n\leqslant H$ 时，有 $C_H(n)=0$；而当 $n>H$ 时，$C_H(n)\leqslant\tau(n)$. 故 $H\ll x$ 时，由 Schwarz 不等式得到

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2 \ll (\log x)\sum_{l=0}^{3l_1}\left|\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\omega}}\right|^2$$

令 $\alpha = 1+\dfrac{1}{\log x}$，由上式、$\sum\limits_{n\leqslant x}\tau^2(n)\ll x(\log x)^3$ 及式③我们得到：当 $Q\ll x$ 时，有

$$\sum_{D<d\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2 \ll \left(Q+\frac{2^lH}{D}\right)\sum_{n=2^lH+1}^{2^{l+1}H}\frac{(\tau(n))^2}{n^2}\ll$$

$$\left(\frac{Q}{2^lH}+\frac{1}{D}\right)(\log x)^3$$

及

$$\sum_{D<d\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\;|1-L(\alpha+i\nu,\chi_d)S(H,\alpha+i\nu,\chi_d)|^2\ll$$

$$\sum_{D<d\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_H(n)\chi_d(n)}{n^{\alpha+i\nu}}\right|^2+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2(\log x)^4}{H^2}\ll$$

$$\left(\frac{Q}{H}+\frac{1}{D}+\frac{|\alpha+i\nu|^2Q^2}{H^2}\right)(\log x)^5 \qquad ⑭$$

令 $\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\log x}$，由于 $|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^2=\sum\limits_{n=1}^{H^2}\dfrac{j(n)\chi_d(n)}{n^{\beta+i\nu}}$，其中 $|j(n)|\leqslant\tau(n)$，故由式 ③ 可知，当 $l\geqslant 1, H\ll x$ 时，有

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leqslant 2^l(\log x)^{100}}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d}{}^{*}\;|S(H,\beta+i\nu,\chi_d)|^4\ll$$

$$\left(2^l(\log x)^{100}+\frac{H^2}{2^l(\log x)^{100}}\right)\sum_{n=1}^{H^2}\frac{(\tau(n))^2}{n}\ll$$

$$2^l(\log x)^{104}+\frac{H^2}{2^l(\log x)^{96}} \qquad ⑮$$

由于 $L'(\omega,\chi_d)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{r}\frac{L(\xi,\chi_d)}{(\xi-\omega)^2}d\xi$，其中 r 是以 ω 为中心，$(\log x)^{-1}$ 为半径的圆，故有

$$|L'(\omega,\chi_d)|\ll(\log x)^2\int_r|L(\xi,\chi_d)|\,d\xi$$

利用 Hölder 不等式，得到

$$|L'(\omega,\chi_d)|^4\ll(\log x)^5\int_r|L(\xi,\chi_d)|^4\,|d\xi|$$

又由引理 3，我们有

$$\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leqslant 2^l(\log x)^{100}}\left(\frac{1}{\varphi(d)}\right)\sum_{\chi_d}{}^{*}\;|L'(\beta+i\nu,\chi_d)|^4\ll$$

$$2^l(\log x)^{109}(|\beta + i\nu|)^2$$

当 $\mathrm{Re}\,\omega \geqslant \alpha = 1 + \frac{1}{\log x}$ 时,我们得到

$$\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d) = \left\{\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\right\}\{1 - L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)\} + L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d) \qquad ⑯$$

令

$$A(l,k,\omega,m,H) = \sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d} \cdot \sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)} \frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right| |1 - L(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|$$

$$B(l,k,\omega,m,H) = \sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|3^{\nu(d)}}{d} \cdot \sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)} \frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\omega}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right| |L'(\omega,\chi_d)S(H,\omega,\chi_d)|$$

当 $l \geqslant 1$ 时,由式 ⑯ 我们有

$$N_m^{(l,k)} \ll x(\log x)^2\int_0^{\infty} \frac{A(l,k,\alpha + i\nu,m,H)}{|\alpha + i\nu|\left(1 + \frac{|\alpha + i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{[\log x]+1}}d\nu + x^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} \frac{B(l,k,\beta + i\nu,m,H)}{|\beta + i\nu|\left(1 + \frac{|\beta + i\nu|}{(\log x)^{1.1}}\right)^{[\log x]+1}}d\nu \qquad ⑰$$

显见,当 $|\mu(d)| \neq 0$ 及 d 很大时,有

$$3^{\nu(d)} \geqslant e^{\frac{3\log d}{\log\log d}} \qquad ⑱$$

现在我们首先对 $l \geqslant 1$ 时,$2^k x^{\frac{13}{30}} > x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 及 $x^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \geqslant 2^k x^{\frac{13}{30}} > 2^l(\log x)^{100}$ 这两种情形的 $N_m^{(l,k)}$ 进行估计,此时我们取 $H = 2^l(\log x)^{200} I_{l,x}$,其中 $I_{l,x} = \exp\left\{\frac{6\log\{2^l(\log x)^{100}\}}{\log\log\{2^l(\log x)^{100}\}}\right\}$.则根据式 ⑭ ~ ⑱,我们有

$$N_m^{(l,k)} \ll x(\log x)^4\int_0^{\infty}\left[\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d} \cdot \sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)} \frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\alpha+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|^2\right\}\left\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100}\\ (d,x)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d} \cdot\right.\right.$$

$$\sum_{\chi_d}{}^{*}\ |1 - L(\alpha + i\nu, \chi_d)S(H, \alpha + i\nu, \chi_d)|^2\Big\}I_{l,x}\Big]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2.1}}\right) +$$

$$x^{\frac{1}{2}}(\log x)^4\int_0^{\infty}\Big\{(I_{l,x})\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100} \\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\cdot$$

$$\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\beta+i\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\Big\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100} \\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}{}^{*}\ |S(H, \beta + i\nu, \chi_d)|^4\Big\}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2.1}}\right)\cdot$$

$$\Big\{\sum_{\substack{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100} \\ (d,x)=1}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}{}^{*}\ |L'(\beta + i\nu, \chi_d)|^4\Big\}^{\frac{1}{4}} \ll$$

$$x(\log x)^8\int_0^{\infty}\Big\{\Big(2^l(\log x)^{100} + \frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l(\log x)^{100}}\Big)\Big(\sum_{2^k x^{\frac{13}{30}} < n \leqslant 2^{k+1}x^{\frac{13}{30}}}\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$

$$\Big(\frac{2^l(\log x)^{100}}{H} + \frac{1}{2^l(\log x)^{100}} + \frac{(1+\nu^2)2^{2l}(\log x)^{200}}{H^2}\Big)(I_{l,x})\Big\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2.1}}\right) + x^{\frac{1}{2}}(\log x)^8\int_0^{\infty}\Big\{\Big(2^l(\log x)^{100} + \frac{2kx^{\frac{13}{30}}}{2^l(\log x)^{100}}\Big)(I_{l,x})\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\{2^{2l}(\log x)^{213} + H^2(\log x)^{13}\}^{\frac{1}{4}}(1+\nu^2)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{d\nu}{1+\nu^4}\right) \ll$$

$$\frac{x}{(\log x)^{20}}$$

现在我们再对 $2^k x^{\frac{13}{30}} \leqslant 2^l(\log x)^{100} \leqslant 2x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 时的 $N_m^{(l,k)}$ 进行估计，此时我们取

$$H = \max(2^{2l-k}x^{-\frac{13}{30}}(\log x)^{400}I_{l,x}x^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$$

则有

$$N_m^{(l,k)} \ll x(\log x)^8\int_0^{\infty}\Big\{\Big(2^l(\log x)^{100}\frac{2^k x^{\frac{13}{30}}}{2^l(\log x)^{100}}\Big)\Big(\sum_{2^k x^{\frac{13}{30}} < n \leqslant 2^{k+1}x^{\frac{13}{30}}}\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$

$$\Big(\frac{2^l(\log x)^{100}}{H} + \frac{1}{2^l(\log x)^{100}} + \frac{(1+\nu^2)2^{2l}(\log x)^{200}}{H^2}\Big)(I_{l,x})\Big\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left(\frac{d\nu}{1+\nu^{2.1}}\right) + x^{\frac{1}{2}}(\log x)^4\int_0^{\infty}\Big\{\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100} < d \leqslant 2^l(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|}{d}\cdot$$

$$\sum_{\chi_d}{}^{*}\ |S(H, \beta + i\nu, \chi_d)|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}(I_{l,x})^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left\{\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leqslant 2^{l}(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}{}^{*}|L'(\beta+\mathrm{i}\nu,\chi_d)|^{4}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left\{\sum_{2^{l-1}(\log x)^{100}<d\leqslant 2^{l}(\log x)^{100}}\frac{|\mu(d)|}{d}\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\left(\sum_{(k,m)}\frac{\chi_d(p_1p_2)}{(p_1p_2)^{\beta+\mathrm{i}\nu}\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)^{2}\right|^{2}\right\}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{1+\nu^{4}}\right)\ll$$

$$\frac{x}{(\log x)^{20}}+x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{20}\left\{2^{l}(\log x)^{100}+\frac{H}{2^{l}(\log x)^{100}}\right\}^{\frac{1}{2}}(I_{l,x})^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$(2^{l}(\log x)^{109})^{\frac{1}{4}}\left(2^{l}(\log x)^{100}+\frac{2^{2k}x^{\frac{13}{15}}}{2^{l}(\log x)^{100}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{(1+\nu^{2})^{\frac{1}{4}}}{1+\nu^{4}}\mathrm{d}\nu\ll\frac{x}{(\log x)^{20}}$$

现在来估计 $N_m^{(0,k)}$,其中 $0\leqslant k\leqslant I_2$. 当 χ_d 是原特征及 $\mathrm{Re}\ S\geqslant 1-\frac{c}{d^{\frac{1}{300}}}$ 时, $L(S,\chi_d)\neq 0$. 其中 c 是一个常数,故有

$$N_m^{(0,k)}\ll\sum_{1<d\leqslant(\log x)^{100}}\frac{3^{\nu(d)}|\mu(d)|}{d}\sum_{\chi_d}{}^{*}\left|\int_{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}-\mathrm{i}\infty}^{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}+\mathrm{i}\infty}\sum_{(k,m)}\left(\frac{1}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\chi_d(p_1p_2)\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{\omega}\left(1+\frac{\omega}{(\log x)^{1.1}}\right)^{-[\log x]-1}\frac{L'}{L}(\omega,\chi_d)\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\right|\ll$$

$$(\log x)^{200}\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\left(\frac{x}{p_1p_2}\right)^{1-\frac{1}{(\log x)^{1/2}}}\ll$$

$$\frac{x}{(\log x)^{20}} \qquad ㉑$$

由式 ⑫,⑬ 及式 ⑲ ~ ㉑,本引理得证.

引理 7 对于大偶数 x,我们有

$$M_1\leqslant\left\{\frac{(8+24\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\}$$

其中
$$C_x=\prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^{2}}\right)$$

证明 令 $S=\sum\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant(x^{1/2-\varepsilon})^{1/2}\\(k,x)=1}}\frac{\mu^{2}(k)}{f(k)}$,则有

$$\lambda_d g(d) = (\frac{1}{S}) \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2}/d \\ (k, xd)=1}} \frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}$$

当$(m, x) = 1$时,我们有

$$\sum_{\substack{d \leqslant (x^{1/2}-\epsilon)^{1/2} \\ (d,x)=1, m|d}} \lambda_d g(d) = (\frac{1}{S})\left(\sum_{\substack{d \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (d,x)=1, m|d}} \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2}/d \\ (k,xd)=1}} \frac{\mu(kd)\mu(k)}{f(kd)}\right) =$$

$$(\frac{1}{S}) \sum_{\substack{1 \leqslant r \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (r,x)=1}} \frac{\mu(r)}{f(r)} \sum_{m|d|r} \mu(\frac{r}{d}) = \frac{\mu(m)}{Sf(m)}$$

由于$\dfrac{1}{\varphi(\dfrac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)})} = g(d_1)g(d_2) \sum_{d|(d_1,d_2)} f(d)$.故有

$$\sum_{d_1 \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2}} \sum_{\substack{d_2 \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (d_1 d_2, x)=1}} \frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi(\dfrac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)})} =$$

$$\sum_{d_1 \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2}} \sum_{\substack{d_2 \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (d_1 d_2, x)=1}} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} g(d_1) g(d_2) \sum_{k|(d_1,d_2)} f(k) =$$

$$\sum_{\substack{k \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} f(k)\Big(\sum_{\substack{d \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ k|d, (d,x)=1}} \lambda_d g(d)\Big)^2 = \frac{1}{S} \qquad ㉒$$

令 $V_k(x) = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ (n,k)=1}} \dfrac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$,则有

$$\log x \leqslant \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{\mu^2(n)}{n} \prod_{p|n} (\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p^l}) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{\mu^2(n)}{n} \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})^{-1} =$$

$$V_1(x) = \sum_{d|k} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ (n,k)=d}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \sum_{d|k} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{1 \leqslant m \leqslant x/d \\ (m,k)=1}} \frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)} \leqslant$$

$$\sum_{d|k} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} V_k(x) = \frac{kV_k(x)}{\varphi(k)}$$

故有 $V_k(x) \geqslant \dfrac{\varphi(k)\log x}{k}$.令 $\psi(1) = 1$,而当 $q > 2$时,令 $\psi(q) = \prod_{p|q}(p-2)$,则有

$$S = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \prod_{p|k} (1 + \frac{1}{p-2}) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (k,x)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \sum_{q|k} \frac{1}{\varphi(q)} =$$

$$\sum_{\substack{q \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (q,x)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)} \sum_{\substack{r \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2}/q \\ (r,qx)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \geqslant$$

$$\sum_{\substack{q \leqslant (x^{1/2-\epsilon})^{1/2} \\ (q,x)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\psi(q)\varphi(q)} \left\{\frac{\varphi(qx)}{qx} \log \frac{x^{1/4-\epsilon/2}}{q}\right\} =$$

$$\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)(\log x^{1/4-\varepsilon/2})\prod_{p\nmid x}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)+O(1)=$$

$$\frac{(\frac{1}{8}-\frac{\varepsilon}{4})(\log x)}{C_x}+O(1)$$

由式 ㉒ 及上式，当 x 很大时，有

$$M_1\leqslant(8+24\varepsilon)C_x(\log x)^{-1}\sum_{\substack{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}\\ n\leqslant x/(p_1p_2)}}\left(\frac{\Lambda(n)}{\log\frac{x}{p_1p_2}}\right)\Phi\left(\frac{x}{p_1p_2n}\right)$$

由引理 1，本引理得证.

引理 8　设 x 是大偶数，则有

$$\Omega\leqslant\frac{3.940\,4xC_x}{(\log x)^2}$$

证明　当 x 很大时，由引理 5 到引理 7，我们有

$$\Omega\leqslant\left\{\frac{8(1+5\varepsilon)xC_x}{\log x}\right\}\left\{\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\right\}\qquad ㉓$$

又有

$$\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}<p_2\leqslant(x/p_1)^{1/2}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{x^{1/10}<p_1\leqslant x^{1/3}}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{(\frac{x}{p_1})^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}t}{p_1t(\log t)\log\frac{x}{p_1t}}\leqslant$$

$$(1+2\varepsilon)\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{\mathrm{d}S}{S\log S}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{(\frac{x}{S})^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)(\log\frac{x}{St})}=$$

$$(1+2\varepsilon)\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\alpha}{2}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)\log x}$$

及

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{1-\alpha-\beta}\right)\mathrm{d}\beta=$$

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\log\frac{1-\alpha}{2}-\log\frac{1}{3}-\log\frac{1-\alpha}{2}+\log(\frac{2}{3}-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{\log(2-3\alpha)}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha=$$

$$\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{\log(1.6-\frac{i}{10})}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha+\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{\log\frac{2-3\alpha}{1.6-0.1i}}{\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha\leqslant$$

$$\sum_{i=0}^{6}\left\{\log(1.6-\frac{i}{10})\right\}\left\{\log\frac{\frac{9}{10}-\frac{i}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}-\log\frac{\frac{9}{10}-\frac{1}{30}-\frac{i}{30}}{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\right\}+$$

$$\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{(0.4+0.1i-3\alpha)}{(1.6-0.1i)\alpha(1-\alpha)}\mathrm{d}\alpha\leqslant$$

$$\sum_{i=0}^{6}\left\{\log(1.6-0.1i)+\frac{4+i}{16-i}\right\}\left\{\log\frac{27-i}{3+i}-\log\frac{26-i}{4+i}\right\}-$$

$$3\sum_{i=0}^{6}\int_{\frac{1}{10}+\frac{i}{30}}^{\frac{1}{10}+\frac{i+1}{30}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{(1.6-0.1i)(1-\alpha)}=$$

$$\sum_{i=0}^{6}\left\{\log(1.6-0.1i)+\frac{4+i}{16-i}\right\}\left\{\log\frac{108+23i-i^2}{78+23i-i^2}\right\}-$$

$$3\sum_{i=0}^{6}\left(\frac{1}{1.6-0.1i}\right)\left(\log\frac{27-i}{26-i}\right)\leqslant$$

$$(0.47+0.25)(0.325\,42)+(0.405\,47+0.333\,34)(0.262\,36)+$$
$$(0.336\,47+0.428\,58)(0.223\,15)+(0.262\,36+0.538\,47)(0.196\,71)+$$
$$(0.182\,32+0.666\,67)(0.177\,99)+(0.095\,31+0.818\,19)(0.164\,31)+$$
$$0.154\,15-3(\frac{0.037\,74}{1.6}+\frac{0.039\,22}{1.5}+\frac{0.040\,82}{1.4}+\frac{0.042\,56}{1.3}+$$
$$\frac{0.044\,45}{1.2}+\frac{0.046\,52}{1.1}+0.048\,79)\leqslant$$
$$0.234\,303+0.193\,837+0.170\,73+0.157\,54+0.151\,115+0.150\,1+$$
$$0.154\,15-3(0.023\,587+0.026\,146+0.029\,157+0.032\,738+$$
$$0.037\,041+0.042\,29+0.048\,79)\leqslant 1.211\,78-0.719\,24=0.492\,54 \quad ㉔$$

由式㉓和㉔,引理 8 得证.

设 x 是一大偶数,令 $P_x(x,x^{1/10})$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数:$p\leqslant x$,$p\not\equiv x(\bmod p_i)(1\leqslant i\leqslant j)$,其中 $3=p_1<p_2<\cdots<p_j\leqslant x^{1/10}$.对于一个素数 p',则令 $P_x(x,p',x^{1/10})$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数:$p\leqslant x$,$p\equiv x(\bmod p')$,$p\not\equiv x(\bmod p_i)(1\leqslant i\leqslant j)$.其中 $3=p_1<p_2<\cdots<p_j\leqslant x^{1/10}$.

引理 9 设 x 是大偶数,则有

$$P_x(x,x^{1/10})-(\frac{1}{2})\sum_{x^{1/10}<p\leqslant x^{1/3}}P_x(x,p,x^{1/10})\geqslant\frac{2.640\,8xC_x}{(\log x)^2}$$

其中 $$C_x=\prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

证明　在注释①取 $r(p)=\frac{p}{p-1}, K=x, Z=x^{1/10}$，则显见注释①中的条件$(A_1)$和$(A_2)$都满足，由注释①中的式(2.11)，我们有

$$\Gamma_x(x^{1/10})=\frac{x}{\varphi(x)}\prod_{p\nmid x}\frac{1-\frac{1}{p-1}}{1-\frac{1}{p}}\frac{e^{-\gamma}}{\log x^{1/10}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}=$$

$$\frac{x}{\varphi(x)}\prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{e^{-\gamma}}{\log x^{1/10}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}=$$

$$\frac{20e^{-\gamma}C_x}{\log x}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\} \tag{25}$$

其中 γ 是 Euler 常数．又当 $0<u\leqslant 2$ 时，令 $F(u)=\frac{2e^{\gamma}}{u}, f(u)=0$．而当 $u\geqslant 2$ 时，令 $(uF(u))'=f(u-1), (uf(u))'=f(u-1)$，当 $2<u\leqslant 3$ 时，有 $uF(u)=2F(2), F(u)=\frac{2e^{\gamma}}{u}$．又当 $2<u\leqslant 4$ 时，则有

$$uf(u)=\int_2^u F(t-1)dt=2e^{\gamma}\log(u-1), f(u)=\frac{2e^{\gamma}\log(u-1)}{u}$$

当 $3\leqslant u\leqslant 4$ 时，我们有

$$uF(u)=2e^{\gamma}+\int_3^u f(t-1)dt=2e^{\gamma}\left(1+\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right)$$

又有

$$5f(5)=2e^{\gamma}\log 3+\int_4^5 F(u-1)du=$$

$$2e^{\gamma}\left(\log 4+\int_3^4\frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right)$$

在注释①的定理 A 中，取 $\xi^2=x^{1/2-\varepsilon}, q=1, z=x^{1/10}$，则由式㉕及注释①中的式(2.19)，(4.18)及(3.24)，我们知道当 x 很大时，有

$$P_x(x,x^{\frac{1}{10}})\geqslant\frac{2(1-\sqrt{\varepsilon})e^{-\gamma}xC_xf(5)}{(\log x)(\log x^{1/10})}\geqslant\left\{\frac{8(1-\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\cdot$$

$$\left\{\log 4+\int_3^4\frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right\} \tag{26}$$

又在注释①的定理 A 中取 $\xi^2=\frac{x^{1/2-\varepsilon}}{p}, q=p, z=x^{1/10}$，则由式㉕及注释①中的式(2.18)，(3.24)及(4.18)，我们有

---

① Richert H E. Mathematika, 1969, 16:1-22.

$$\sum_{x^{1/10}<p\leqslant x^{1/3}} P_x(x,p,x^{1/10}) \leqslant \left\{\frac{20(1+\sqrt{\varepsilon})e^{-\gamma}xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\sum_{x^{1/10}<p\leqslant x^{1/3}}\left(\frac{2e^{\gamma}}{p}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\left(1+\int_2^{4-\frac{10\log p}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right)\left(\frac{\log x^{\frac{1}{10}}}{\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{p}}\right)+\sum_{x^{1/5}<p\leqslant x^{1/3}}\frac{2e^{\gamma}\log x^{\frac{1}{10}}}{p\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{p}}\right\}\leqslant$$

$$\left\{\frac{(4+5\sqrt{\varepsilon})xC_x}{\log x}\right\}\left\{\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{5}}}\frac{dS}{S(\log S)(\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{S})}\int_2^{4-\frac{10\log S}{\log x}}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\right.$$

$$\left.\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dS}{S(\log S)(\log\frac{x^{\frac{1}{2}}}{S})}\right\}=$$

$$\left\{\frac{(4+5\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\int_{x^{\frac{1}{10}}}^{x^{\frac{1}{5}}}\frac{d\alpha}{\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)}\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\right.$$

$$\left.\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)}\right\}=$$

$$\left\{\frac{(8+10\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right\}\left\{\log 8+\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{2\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)}\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt\right\}$$

令 $4-10\alpha=u-1,\alpha=\frac{5-u}{10},\frac{d\alpha}{\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)}=-\frac{10du}{u(5-u)}$，又当 $\alpha=\frac{1}{10}$ 时，有 $u=4$；而当 $\alpha=\frac{1}{5}$ 时，$u=3$，故有

$$\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)}\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt=\int_3^4\frac{10du}{u(5-u)}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt$$

显见，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，有 $\log x\leqslant\frac{x-1}{2}+\frac{x-1}{1+x}$，故有

$$\int_3^4\frac{du}{u}\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\left(\frac{1}{4}\right)\int_{\frac{1}{10}}^{\frac{1}{5}}\frac{d\alpha}{\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)}\int_2^{4-10\alpha}\frac{\log(t-1)}{t}dt=$$

$$\int_3^4\left(\frac{1}{u}-\frac{2.5}{u(5-u)}\right)du\int_2^{u-1}\frac{\log(t-1)}{t}dt\geqslant$$

$$\int_3^4\left\{\frac{2.5-u}{u(5-u)}\right\}du\int_2^{u-1}\left(\frac{t-2}{2}+\frac{t-2}{t}\right)\left(\frac{dt}{t}\right)=$$

$$\int_3^4\left\{\frac{2.5-u}{2u(5-u)}\right\}\left(u-3+\frac{4}{u-1}-2\right)\mathrm{d}u=$$

$$\int_3^4\left(\frac{1}{2}-\frac{2.25}{u}-\frac{1}{4(5-u)}+\frac{0.75}{u-1}\right)\mathrm{d}u=$$

$$\frac{1}{2}-2.25\log\frac{4}{3}-\frac{\log 2}{4}+0.75\log\frac{3}{2}=$$

$$\frac{1}{2}+0.75\log\frac{9}{8}-1.5\log\frac{4}{3}-\frac{\log 2}{4}\geqslant$$

$$0.588\,335-0.604\,807\,5=-0.016\,472\,5 \qquad ㉗$$

由式㉖和㉗,我们有

$$P_x(x,x^{1/10})-(\frac{1}{2})\sum_{x^{1/10}<p\leqslant x^{1/3}}P_x(x,p,x^{1/10})\geqslant$$

$$\left(\frac{(8-50\sqrt{\varepsilon})xC_x}{(\log x)^2}\right)\left(\log 4-\frac{\log 8}{2}-0.016\,472\,5\right)\geqslant$$

$$\frac{(8xC_x)(0.330\,1)}{(\log x)^2}$$

故引理9得证.

2.3 结果

显见,我们有

$$P_x(1,2)\geqslant P_x(x,x^{1/10})-(\frac{1}{2})\sum_{x^{1/10}<p\leqslant x^{1/3}}P_x(x,p,x^{1/10})-\frac{\Omega}{2}-x^{0.91} \qquad ㉘$$

由式㉘、引理8和引理9,即得到定理1

$$(1,2)\text{ 及 }P_x(1,2)\geqslant\frac{0.67xC_x}{(\log x)^2}$$

的证明.

完全类似的方法可得到定理2的证明.

3 表大偶数为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和[①]

——陈景润

3.1 引 言

把命题"当一个充分大的偶数都能够表示为一个素数及一个不超过 a 个素

① 原载科学通报,1966,17:385-386.

数的乘积之和"简记为(1,a).

不少数学工作者改进了 Selberg 方法及 Dirichlet L - 函数的某些结果并用之改善(1,a).现在我们将(1,a)发展历史简述如下:

(1,5)——(潘承洞①、Барбан②).

(1,4)——(王元③、潘承洞④、Барбан⑤).

(1,3)——(Бухштаб⑥、Виноградов⑦).

本文的目的是要给出(1,2)的证明的提要.详细的证明将另文发表.

3.2 若干引理

命 x 是一个大偶数.命 $P_x(x,x^{1/10})$ 为适合下列条件的素数 p 的个数

$$p \leqslant x, \quad p \not\equiv x(\bmod p_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant j$$

此处 $3 = p_1 < p_2 < \cdots < p_j \leqslant x^{1/10}$ 为不超过 $x^{1/10}$ 的全部奇素数.

给定一个素数 p'.命 $P_x(x,p',x^{1/10})$ 为适合下列条件的素数 p 的个数

$$p \leqslant x, \quad p \equiv x(\bmod p'), \quad p \not\equiv x(\bmod p_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant j$$

此处 $p_1,p_2,\cdots,p_j$ 的意义同上.

命 $Q(x,x^{1/10},x^{1/3})$ 为适合下列条件的素数 p 的个数

$$x - p = p_1p_2p_3, \quad p \leqslant x, \quad x^{1/10} < p_1 \leqslant x^{1/3} < p_2 < p_3$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

命 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的素数 p 的个数

$$x - p = p_1 \quad 或 \quad x - p = p_2p_3$$

其中 p_1,p_2,p_3 都是素数.

我们已经证明下面三个引理恒成立.

引理 1 我们有

$$P_x(x,x^{1/10}) \geqslant \frac{9.976xC_x}{\log^2 x}$$

此处

$$C_x = 2e^{-\gamma}\prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

其中 γ 为 Euler 常数.

引理 2 我们有

---

① 潘承洞.中国科学,1963,12:873-888.
② Барбан М Б. Доклабы Акабемии Уз СССР, 8:9-11.
③ 王元.中国科学,1962,11:1033-1054.
④ 潘承洞.中国科学,1963,12:455-474.
⑤ Барбан М Б. Математический Сборник, 1963:419-425.
⑥ Бухштаб А А. Доклабы АН СССР, 1965:739-742.
⑦ Виноградов А И. Изв. Акаб. Наук, 1965,29:903-934.

$$\sum_{x^{1/10}<p'\leqslant x^{1/3}} P_x(x,p',x^{1/10}) \leqslant \frac{15.355xC_x}{\log^2 x}$$

引理 3　我们有

$$Q(x,x^{1/10},x^{1/3}) \leqslant \frac{4.4xC_x}{\log^2 x}$$

3.3　定理的证明

定理　每一个充分大的偶数 x 都能够表示为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和.

证明　显然有

$$P_x(1,2) \geqslant P_x(x,x^{1/10}) - \frac{1}{2}\sum_{x^{1/10}<p'\leqslant x^{1/3}} P_x(x,p',x^{1/10}) - \frac{1}{2}Q(x,x^{1/10},x^{1/3}) - x^{0.91} \qquad ①$$

由式 ① 及引理 1,2,3 即得到

$$P_x(1,2) \geqslant \frac{0.098xC_x}{\log^2 x}$$

故定理得证.

4　关于哥德巴赫问题和筛法[①②]

——陈景润

设 $P_x(1,1)$ 表示满足条件 $x-p=p_1$ 的素数 p 的个数,其中 x 是一大偶数,p_1 是一素数.本文将证明

$$P_x(1,1) \leqslant \frac{7.834\,2xC_x}{(\log x)^2}$$

其中
$$C_x = \prod_{p\mid x}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

4.1　引　言

设 x 是一大偶数.h 是任一偶数,$C_{xq} = \prod_{\substack{p\mid xq\\ p\geqslant 2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$.设 $P_x(1,1)$ 表示满足 $x-p=p_1$ 的素数 p 的个数,p_1 是素数.$x_h(1,1)$ 表示满足

① 1978 年 2 月 15 日收到.
② 原载 Sci. Sin., 21(1978), no. 6,707-739.

$p \leqslant x, p + h = p_1$ 的素数 p 的个数. 本文将证明

$$P_x(1,1) \leqslant \frac{7.834\,2xC_x}{(\log x)^2}$$

对正整数 q, 设 $P(x,q,z)$ 表示满足下列条件的素数 p 的个数: $p \leqslant x, p \equiv x(\mathrm{mod}\ q), p \not\equiv x(\mathrm{mod}\ p_i)(1 \leqslant i \leqslant j)$, 其中 $p_i \nmid q, 3 = p_1 < p_2 < \cdots < p_j \leqslant z$ 是不超过 z 的奇素数. 设 $\underline{q} = \frac{x^{1/2-\epsilon}}{q}, 1 \leqslant q \leqslant x^{1/2-\epsilon}$. 令 $z \geqslant x^{\epsilon}, P_{y,z} = \prod_{\substack{2 \leqslant p \leqslant z \\ p \nmid y}} p$.

令

$$A(s) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant s \leqslant 3 \\ \int_2^{s-1} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}t, & 3 \leqslant s \leqslant 5 \end{cases}$$

当 $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2} - \epsilon$ 时, 设 U_α 表示由一些满足下列条件的不同正整数 q 组成的集合: $q \leqslant x^{\frac{1}{2}-\alpha}, |\mu(q)| = 1, (q,x) = 1$, 若 $p \mid q$, 则 $p \geqslant x^{\epsilon}$.

对 $1 \leqslant s \leqslant 5$, 令 $H(s)$ 为满足下列条件的最大实数

$$\sum_{q \in U_{2\epsilon}} P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{s}}) \leqslant \sum_{q \in U_{2\epsilon}} \left\{\frac{4xC_x}{(\varphi(q))(\log x)(\log \underline{q})}\right\}\left\{1 + A(s) - H(s) + \left|O\left(\frac{(\log\log x)^7}{(\log \underline{q})^{\frac{1}{14}}}\right)\right|\right\} + \left|O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}}\right)\right|$$

对 $2 \leqslant s \leqslant 4$. 令 $G(s)$ 为满足下列条件的最大实数

$$\sum_{q \in U_{2\epsilon}} P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{s}}) \leqslant \sum_{q \in U_{2\epsilon}} \left\{\frac{4xC_x}{(\varphi(q))(\log x)(\log \underline{q})}\right\}\left\{\log(s-1) + G(s) - \left|O\left(\frac{(\log\log x)^7}{(\log \underline{q})^{\frac{1}{14}}}\right)\right|\right\} - \left|O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}}\right)\right|$$

我们的结果叙述如下:

定理 1 $H(2,2) \geqslant 0.020\,73$.

定理 2 $P_x(1,1) \leqslant \frac{7.834\,2xC_x}{(\log x)^2}$.

定理 3 $x_h(1,1) \leqslant \frac{7.834\,2xC_x}{(\log x)^2}$.

设 $U_{2\epsilon}$ 为只含 1 的一个整数集合. 由 x 为一大偶数及定理 1 我们得到

$$P_x(1,1) \leqslant P(x,1,(x^{\frac{1}{2}-\epsilon})^{\frac{1}{2.2}}) + x^{1-\epsilon} \leqslant \left\{\frac{4xC_x}{(\frac{1}{2}-\epsilon)(\log x)^2}\right\}.$$

$$(1 - H(2.2) + \epsilon) + 2x^{1-\epsilon} \leqslant \frac{7.834\,2xC_x}{(\log x)^2}$$

由此得定理 2.

用类似于估计 $P_x(1,1) \leqslant \frac{7.834\,2xC_x}{(\log x)^2}$ 的方法.容易得到

$$x_h(1,1) \leqslant \frac{7.834\,2xC_x}{(\log x)^2}$$

于是得定理 3.

下面我们将给出定理 1 的证明.

4.2 一些引理

当 $0 < \alpha_1 < \alpha \leqslant 1 - \epsilon$ 时,设 S_α 表示由一些满足下面条件的不同正整数 m 组成集合:$m \leqslant x^{1-\alpha}$,若 $p \mid m$,那么 $p > x^{\epsilon}$.设 $\tau(a)$ 为方程 $a = mn$ 的解 (m,n) 的个数,其中 $m \in S_\alpha, 1 \leqslant n \leqslant x^{1-\alpha}m^{-1}, (n, P_{1,z}) = 1$,若对于满足条件的 (m,n) 的方程 $a = mn$ 不存在,则令 $\tau(a) = 0$.

设 $\omega(a)$ 为方程 $a = mn$ 的解 (m,n) 的个数.其中 $m \in S_\alpha, x^{1-\alpha}m^{-1} < n \leqslant x^{1-\alpha_1}m^{-1}, (n, P_{1,z}) = 1$,若对于满足条件的 (m,n) 方程 $a = mn$ 不存在,则令 $\omega(a) = 0$.

设

$$D_1 = (\log x)^{1\,000}, \quad D = x^{\frac{1}{4}-\frac{\epsilon}{2}}, \quad H_j = 2^{2j}D_1^2$$

$$T = \mathrm{e}^{(\log x)^2}, \quad \sigma = 1 + \frac{1}{\log x}$$

及

$$\tau_d(a) = \omega_d(a) = 0, \mu(d) = 0$$

$$\tau_d(a) = \omega_d(a) = 0, (a,d) > 1$$

$$\tau_d(a) = \tau(a), \omega_d(a) = \omega(a), (a,d) = 1, \mu(d) \neq 0$$

$$I_1 = \sum_{\substack{d \leqslant D^2 \\ (d,x)=1}} \left| \sum_{1 \leqslant a \leqslant x^{1-\alpha}} \tau_d(a) \left(\sum_{\substack{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant x^{\alpha} \\ ap \equiv x (\bmod d)}} 1 - \frac{\int_{x^{\alpha_1}}^{x^{\alpha}} \frac{\mathrm{d}t}{\log t}}{\varphi(d)} \right) \right|$$

$$I_2 = \sum_{\substack{d \leqslant D^2 \\ (d,x)=1}} \left| \sum_{x^{1-\alpha} < a \leqslant x^{1-\alpha_1}} \omega_d(a) \left(\sum_{\substack{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant xa^{-1} \\ ap \equiv x (\bmod d)}} 1 - \frac{\int_{x^{\alpha_1}}^{xa^{-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\log t}}{\varphi(d)} \right) \right|$$

引理 1 我们有

$$I_1 \ll \frac{x}{(\log x)^{980}}, \quad I_2 \ll \frac{x}{(\log x)^{980}}$$

证明 可用相关注释①②中同样的证明方法.

设 $\lambda_1 = 1, \lambda_d = 0, d > D$. 令 $g(k) = \frac{1}{\varphi(k)}, f(k) = \varphi(k)\prod_{p|k}\frac{p-2}{p-1}, \lambda_d = \frac{\mu(d)}{f(d)g(d)}\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant D/d\\(k,xd)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}\left\{\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant D\\(k,x)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\right\}^{-1}, 1 < d \leqslant D, (d,x) = 1$. 如果 $5\epsilon < \alpha_1 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, 则

$$\sum_{m\in S_\alpha}\sum_{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant x^\alpha} P(x, mp, z) \leqslant \sum_{m\in S_\alpha}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(k,P_{1,z})=1}}\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant \min(x^\alpha, x/mn)\\(x-mnp,P_{1,D})=1}} 1 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{400}}\right) \leqslant$$

$$M_1 + M_2 + O\left(\frac{x}{(\log x)^{400}}\right) \qquad ①$$

其中

$$M_1 = \sum_{m\in S_\alpha}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant x^\alpha}\left|\sum_{d|(x-mnp,P_{x,D})}\lambda_d\right|^2$$

$$M_2 = \sum_{m\in S_\alpha}\sum_{\substack{x^{1-\alpha}m^{-1}<n\leqslant x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant x/mn}\left|\sum_{d|(x-mnp,P_{x,D})}\lambda_d\right|^2$$

我们有

$$M_1 + M_2 = \sum_{d_1|P_{x,D}}\sum_{d_2|P_{x,D}}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{m\in S_\alpha}\Bigg\{\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x^{1-\alpha}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant x^\alpha\\x\equiv mnp\left(\bmod\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}} 1 +$$

$$\sum_{\substack{x^{1-\alpha}m^{-1}<n\leqslant x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{\substack{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant x/mn\\x\equiv mnp\left(\bmod\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}} 1\Bigg\} \qquad ②$$

设 $\nu(d)$ 表示 d 的素因子个数. 由 ② 及 $|\lambda_d| \leqslant \log x, d \leqslant x$, 我们有

$$|M_1 + M_2 - M_3M_4| \ll (M_1^* + M_2^*)(\log x)^2 \qquad ③$$

其中

$$M_3 = \sum_{d_1|P_{x,D}}\sum_{d_2|P_{x,D}}\frac{\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}}{\varphi\left(\frac{d_1d_2}{(d_1,d_2)}\right)}$$

$$M_4 = \sum_{m\in S_\alpha}\Bigg\{\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x^{1-\alpha}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant x^\alpha} 1 + \sum_{\substack{x^{1-\alpha}m^{-1}<n\leqslant x^{1-\alpha_1}m^{-1}\\(n,P_{1,z})=1}}\sum_{x^{\alpha_1}\leqslant p\leqslant x/mn} 1\Bigg\}$$

① Chen Jingrun. Sci. Sin., 1973, 16:157-176.
② Pan Cheng Dong, Ding Xiaxi, Wang Yuan. Sci. Sin., 1975, 18:599-610.

$$M_1^* = \sum_{d \leqslant D^2, (d,x)=1} 3^{\nu(d)} \left\{ \left| \sum_{1 \leqslant a \leqslant x^{1-\alpha}} \tau_d(a) \left(\sum_{\substack{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant x^{\alpha} \\ x \equiv ap \pmod d}} 1 - \frac{\sum_{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant x^{\alpha}} 1}{\varphi(d)} \right) \right| + \right.$$

$$\left. \left| \sum_{x^{1-\alpha} < a \leqslant x^{1-\alpha_1}} \omega_d(a) \left(\sum_{\substack{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant xa^{-1} \\ x \equiv ap \pmod d}} 1 - \frac{\sum_{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant xa^{-1}} 1}{\varphi(d)} \right) \right| \right\}$$

$$M_2^* = \sum_{d \leqslant D^2, (d,x)=1} \frac{3^{\nu(d)}}{\varphi(d)} \left\{ \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant x^{1-\alpha} \\ (a,d)>1}} \tau(a) x^{\alpha} + \sum_{\substack{x^{1-\alpha} < a \leqslant x^{1-\alpha_1} \\ (a,d)>1}} \frac{\omega(a)x}{a} \right\}$$

若 x 是一大整数，由相关注释①得

$$M_3 \leqslant \frac{(8 + 24\epsilon) C_x}{\log x} \qquad ④$$

我们有

$$M_4 = \sum_{m \in S_a} \left\{ \sum_{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant x^{\alpha}} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x^{1-\alpha} m^{-1} \\ (n, P_{1,z})=1}} 1 + \sum_{\substack{x^{1-\alpha} m^{-1} < n \leqslant x/pm \\ (n, P_{1,z})=1}} 1 \right) \right\} =$$

$$\sum_{m \in S_a} \sum_{x^{\alpha_1} \leqslant p \leqslant x^{\alpha}} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x/pm \\ (n, P_{1,z})=1}} 1 \qquad ⑤$$

当 $1 \leqslant a \leqslant x^{1-\alpha}$ 时，$\tau(a) \ll \log x$；当 $x^{1-\alpha} < a \leqslant x^{1-\alpha_1}$ 时，$\omega(a) \ll \log x$. 设 $\sum_d{}'$ 表示对满足不等式 $3^{\nu(d)} \geqslant (\log x)^{580}$，$\mu(d) \neq 0$ 的所有正整数 d 求和. 由相关注释②中引理 3 及引理 1，得

$$M_1^* \ll (\log x)^{580} (I_1 + I_2) + (\log x)^{-570} \sum_{d \leqslant D^2}{}' 3^{2\nu(d)} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ n \equiv x \pmod d}} 1 + \frac{x}{\varphi(d)} \right) \ll$$

$$\frac{x}{(\log x)^{400}} \qquad ⑥$$

我们有

$$M_2^* \ll (\log x)^{580} \sum_{d \leqslant D^2} \frac{1}{\varphi(d)} \left\{ \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant x^{1-\alpha} \\ (a,d)>1}} \tau(a) x^{\alpha} + \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant x^{1-\alpha_1} \\ (a,d)>1}} \frac{x\omega(a)}{a} \right\} +$$

$$(\log x)^{-570} \left(\sum_{d \leqslant D^2}{}' \frac{3^{2\nu(d)} x}{\varphi(d)} \right) \ll$$

$$(\log x)^{595} \sum_{x' \leqslant d_1 \leqslant D^2} \frac{x}{d_1^2} + \frac{x}{(\log x)^{400}} \ll \frac{x}{(\log x)^{400}} \qquad ⑦$$

由式③～⑦，得

---

① Chen Jingrun. Sci. Sin., 1973, 16: 157-176.
② Richert H E. Mathematika, 1969, 16: 1-22.

$$\sum_{m\in S_a x^{a_1}\leqslant p\leqslant x^a}\sum P(x,mp,z)\leqslant\left(\frac{(8+30\epsilon)C_x}{\log x}\right)\sum_{m\in S_a}\sum_{x^{a_1}\leqslant p\leqslant x^a}\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x/mp\\(n,P_{1,z})=1}}1+O\left(\frac{x}{(\log x)^{398}}\right) \tag{8}$$

令

$$Z_1(t)=1/t,\quad 1\leqslant t\leqslant 2$$
$$(tZ_1(t))'=Z_1(t-1),\quad t>2$$

当 $2\leqslant t\leqslant 3$ 时,由 $tZ_1(t)=1+\int_2^t Z_1(s-1)\mathrm{d}s$ 得

$$Z_1(t)=\frac{1+\log(t-1)}{t},\quad Z'_1(t)=\frac{1-(t-1)\log(t-1)}{t^2(t-1)}$$

设 s 为满足 $\log(s-1)=\frac{1}{s-1}$ 的正实数.由于 $\log 1.77>\frac{1}{1.77}$,$\log 1.763<\frac{1}{1.763}$,故 $2.763<s<2.77$.因而 $Z_1(s)=\frac{1}{s-1}<\frac{1}{1.763}$.当 $2\leqslant t\leqslant s$ 时 $Z'_1(t)\geqslant 0$;当 $s\leqslant t\leqslant 3$ 时 $Z'_1(t)\leqslant 0$.因此

$$Z_1(t)\leqslant\frac{1}{1.763},2\leqslant t\leqslant 3$$

设 $n\geqslant 3$.假定 $Z_1(t)\leqslant\frac{1}{1.763}$,$1.763\leqslant t\leqslant n$,则容易证明

$$Z_1(t)\leqslant\frac{1}{1.763},n<t\leqslant n+1$$

因此

$$Z_1(t)\leqslant\frac{1}{1.763},t\geqslant 1.763$$

设 $\epsilon<\delta<\frac{2}{5}$.令 Q_1 表示只含整数1的集合.令 Q_2 表示由满足下面条件的一些不同正整数 q 构成的集合

$$\mu(q)\neq 0,\quad (q,x)=1,\quad x^\delta<q\leqslant x^\delta+\frac{x^\delta}{(\log x)^3}$$

若 $p\mid q$,则 $p>x^\epsilon$,Q_2 中 q 的个数 F 远大于 $x^\delta(\log x)^{-4}$.令 $a_1=0,a_2=\delta$,$s\geqslant 1,1\leqslant m\leqslant 15$.令 $l_{2j+1}>l_{2j+2},j=0,1,\cdots,m$.

引理2 当 $s\left(\frac{1-a_i}{1/2-a_i-\epsilon}-\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{l_{2j+2}}\right)\geqslant 1+\epsilon$ 时,有

$$\sum_{q\in Q_i}\prod_{j=0}^{m}\Big(\sum_{q^{1/l_{2j+1}}<p_{j+1}\leqslant q^{1/l_{2j+2}}}P(x,qp_1\cdots p_{m+1},\underline{q}^{\frac{1}{s}})\Big)\leqslant$$
$$\left(\frac{(8+95\epsilon)C_x}{\log x}\right)\Big(\sum_{q\in Q_i}1\Big)\left(\frac{sx^{1-a_i}}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)\int_{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_1}}^{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_2}}\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1\log t_1}\cdots$$

$$\int_{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2m+1}}}^{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2m+2}}} \frac{\mathrm{d}t_{m+1}}{t_{m+1}\log t_{m+1}} \cdot Z_1\left(\frac{s\log\frac{x^{1-a_i}}{t_1\cdots t_{m+1}}}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)$$

成立.

证明 由相关注释①可得

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant x\\ p\mid n\to p>y}} 1 = \left(\frac{x}{\log y}\right)Z_1\left(\frac{\log x}{\log y}\right) + O\left(\frac{x}{(\log y)^2}\right) \tag{9}$$

其中 $x \leqslant y \leqslant x^{\epsilon}$. 由式⑧,⑨得

$$\sum_{q\in Q_i}\prod_{j=0}^{m}\left(\sum_{q^{1/l_{2j+1}}<p_{j+1}\leqslant q^{1/l_{2j+2}}} P(x, qp_1\cdots p_{m+1}, \underline{q}^{\frac{1}{s}})\right) \leqslant$$

$$\left(\frac{(8+90\epsilon)C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}1\right)\prod_{j=0}^{m}\left(\sum_{(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2j+1}}<p_{j+1}\leqslant(x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon})^{1/l_{2j+2}}}\left(\frac{x^{1-a_i}}{p_1\cdots p_{m+1}}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\left(\frac{s}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)Z_1\left(\frac{s\log\frac{x^{1-a_i}}{p_1\cdots p_{m+1}}}{\log x^{\frac{1}{2}-a_i-\epsilon}}\right)\right)$$

于是引理得证.

我们有

$$\sum_{q\in U_{2\epsilon}} P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{s}}) \geqslant \sum_{q\in U_{2\epsilon}}\left\{P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{4}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p<\underline{q}^{\frac{1}{s}}} P(x, qp, p\right\} - \left|O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}}\right)\right| \tag{10}$$

其中 $2 \leqslant s \leqslant 4$. 当 $q \in U_{2\epsilon}, p \leqslant \underline{q}^{\frac{1}{2}}$ 时, $pq \leqslant \left(\frac{x^{\frac{1}{2}-\epsilon}}{q}\right)^{\frac{1}{2}} q \leqslant q^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}-\frac{\epsilon}{2}} \leqslant x^{\frac{1}{2}-1.5\epsilon}$.

取 $\epsilon_1 = \frac{3\epsilon}{4}$, 则

$$\sum_{q\in U_{2\epsilon}} P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{s}}) \geqslant \sum_{q\in U_{2\epsilon}}\left\{\frac{4xC_x}{\varphi(q)\log x}\right\}\left\{\frac{\log 3 + G(4) - \epsilon}{\log \underline{q}} - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leqslant\underline{q}^{\frac{1}{s}}}\left(\frac{1}{p\log \underline{q}/p}\right)\left(1 - H\frac{\log \underline{q}/p}{\log p}\right) + O\left|\left(\frac{(\log\log x)^7}{(\log \underline{q})^{\frac{1}{14}}}\right)\right|\right\} - \left|O\left(\frac{x}{(\log x)^{100}}\right)\right|$$

其中 $2 \leqslant s \leqslant 4$. 由

---

① Левин Б Б Файнлеев А С. Усиехи Математических Hayk, 1967, 22:119-196.

$$\int_{q^{\frac{1}{4}}}^{q^{\frac{1}{s}}} \frac{H\left(\frac{\log q}{\log t}-1\right)}{t(\log t)(\log q/t)}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{s}} \frac{H(\frac{1}{\alpha}-1)\mathrm{d}\alpha}{\alpha(1-\alpha)\log q} = \int_{s-1}^{3} \frac{H(t)\mathrm{d}t}{t\log q}$$

及

$$\int_{q^{\frac{1}{4}}}^{q^{\frac{1}{s}}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)(\log q/t)} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{s}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha(1-\alpha)\log q} = \frac{\log 3-\log(s-1)}{\log q}$$

我们有

$$G(s) \geqslant G(4) + \int_{s-1}^{3} \frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t - \epsilon \tag{11}$$

其中 $2 \leqslant s \leqslant 4$. 类似可以证得

$$G(4) \geqslant \int_{3}^{4} \frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t - \epsilon \tag{12}$$

$$H(s) \geqslant \int_{s-1}^{4} \frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t - \epsilon \tag{13}$$

其中 $3 \leqslant s \leqslant 5$.

引理 3

$$\begin{aligned}H(2.5) \geqslant\ & 0.010\,18 + (0.204\,4)(H(2.2)) + (0.036\,37)(H(\tfrac{7}{3})) + \\ & (0.057\,24)(H(2.7)) + (0.058\,12)(H(2.9)) + \\ & (0.029\,25)(H(3))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(2.7) \geqslant\ & 0.005\,41 + (0.202)(H(2.2)) + (0.035\,26)(H(\tfrac{7}{3})) + \\ & (0.045\,37)(H(2.5)) + (0.056\,82)(H(2.9)) + \\ & (0.028\,65)(H(3))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(2.9) \geqslant\ & 0.000\,786 + (0.200\,29)(H(2.2)) + (0.034\,58)(H(\tfrac{7}{3})) + \\ & (0.044\,56)(H(2.5)) + (0.054\,9)(H(2.7)) + \\ & (0.028\,23)(H(3))\end{aligned}$$

证明 我们有

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{\mathrm{d}t}{t\log t}\int_{t}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{\mathrm{d}s}{s(\log s)^2}\int_{s}^{y^{\frac{1}{\beta}}} \frac{\mathrm{d}r}{r\log r} = \frac{2(\beta-\alpha)+(\alpha+\beta)\log(\alpha/\beta)}{\log y} \tag{14}$$

$$\int_{2}^{2.1} \frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t \leqslant (\frac{1}{2.05})(1.1\log 1.1 - 0.1 + \Delta) \leqslant 0.002\,343\,2 \tag{15}$$

其中

$$\Delta = 2\int_{1}^{1.1} \frac{(1.05-t)(t-1)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \leqslant -0.000\,037\,7$$

$$\int_{2.1}^{2.3}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t\leqslant(\frac{1}{2.2})(1.3\log 1.3-1.1\log 1.1-0.2+\Delta)\leqslant 0.016\ 366\ 6$$

其中

$$\Delta=2\int_{1.1}^{1.3}\frac{(1.2-t)(t-1)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\leqslant-0.000\ 226$$

$$\int_{2.3}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t\leqslant(\frac{1}{2.4})(1.5\log 1.5-1.3\log 1.3-0.2+\Delta)\leqslant 0.027\ 903\ 9$$

其中

$$\Delta=2\int_{1.3}^{1.5}\frac{(1.4-t)(t-1)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\leqslant-0.000\ 154\ 8$$

于是可得

$$\int_{2}^{2.3}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t\leqslant 0.018\ 71 \quad ⑯$$

$$\int_{2}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t\leqslant 0.046\ 614 \quad ⑰$$

我们有

$$\int_{1.5}^{2.5}\frac{\log(2.5-\frac{3.5}{t+1})}{t}\mathrm{d}t\geqslant 0.027\ 419+\Delta_1+0.064\ 194+\Delta_2\geqslant 0.134\ 054 \quad ⑱$$

其中

$$\Delta_1=2\int_{1.5}^{2}\frac{14t-21}{t(36t+1)}\mathrm{d}t\geqslant 0.028\ 865$$

$$\Delta_2=2\int_{2}^{2.5}\frac{3.5t-7}{t(11.5t+1)}\mathrm{d}t\geqslant 0.013\ 577$$

$$\int_{1.7}^{2.3}\frac{\log(2.3-\frac{3.3}{t+1})}{t}\mathrm{d}t\leqslant 0.022\ 641+\Delta\geqslant 0.052\ 279 \quad ⑲$$

其中

$$\Delta=2\int_{1.7}^{2.5}\frac{110t-187}{t(304t+7)}\mathrm{d}t\geqslant 0.029\ 638$$

$$\int_{1.9}^{2.1}\frac{\log(2.1-\frac{3.1}{t+1})}{t}\mathrm{d}t\geqslant 0.006\ 349 \quad ⑳$$

令 $s=6-r-\frac{6-r}{t+1}$,由 $t+1=\frac{6-r}{6-r-s},\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{d}s}{s(1-\frac{s}{6-r})}$ 可得

$$\int_{r-1}^{5-r}\frac{G(6-r-\frac{6-r}{t+1})}{t}\mathrm{d}t=\int_{7-r-\frac{6}{r}}^{5-r}\frac{G(s)\mathrm{d}s}{s(1-\frac{s}{6-r})} \quad ㉑$$

其中 $2 \leqslant r \leqslant 3$.

由式 ⑪ 可得

$$\int_{2.1}^{2.5} \frac{G(t)}{2t(1-\frac{t}{3.5})}dt \geqslant (0.255\,412)(G(4)) + (0.097\,82)(H(2.2)) + (0.015\,02)(H(\frac{7}{3})) + (0.017\,62)(H(2.5)) + (0.019\,655)(H(2.7)) + (0.018\,25)(H(2.9)) + (0.008\,65)(H(3)) + \Delta \qquad ㉒$$

其中

$$\Delta = |H(2)| \int_{2.1}^{2.5} \frac{2.5-t}{t(1-\frac{t}{3.5})(t+\frac{1}{2})}dt \geqslant 0.036\,365H(2.2)$$

若 $2.5 \leqslant r \leqslant 3$,则有

$$2\sum_{q\in Q_i} P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{r}}) \leqslant \sum_{q\in Q_i}(M_{q,1}+M_{q,2}) \qquad ㉓$$

其中 $i=1$ 或 $i=2$

$$M_{q,1} = 2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{6-r}}) - \sum_{q^{\frac{1}{6-r}}<p\leqslant q^{\frac{1}{r}}} P(x,qp,\underline{q}^{\frac{1}{6-r}})$$

$$M_{q,2} = \sum_{q^{\frac{1}{6-r}}<p_1<p_2<q^{\frac{1}{r}}} P(x,p_1p_2q,p_1) - \sum_{q^{\frac{1}{6-r}}<p<q^{\frac{1}{r}}} P(x,pq,p)$$

我们有

$$M_{q,2} = \sum_{q^{\frac{1}{6-r}}<p_1<p_2<p_3<q^{\frac{1}{r}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_2)$$

由 $r \geqslant 2.5$ 得 $(\frac{1}{2r})^{-1}(1-\frac{3}{2r}) \geqslant 2$. 于是由式 ⑭ 及引理 2 可得

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,2} \leqslant (\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x})\sum_{q\in Q_i}(\frac{1}{\log \underline{q}})(\frac{2}{1.763})(4r-12+6\log\frac{6-r}{r}) \qquad ㉔$$

又

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,1} \leqslant (\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x})\sum_{q\in Q_i}\Big\{(\frac{1}{\log \underline{q}})\Big(2+2\int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}dt + \epsilon - 2H(6-r)\Big) - \sum_{q^{\frac{1}{6-r}}<p\leqslant q^{\frac{1}{r}}}(\frac{1}{p\log \underline{q}/p})(\log(5-r-\frac{(6-r)\log p}{\log \underline{q}}) + G(6-r\frac{(6-r)\log p}{\log \underline{q}}))\Big\}$$

由 $$\sum_{q^{\frac{1}{6-r}} < p \leq q^{\frac{1}{r}}} \frac{\log(5 - r - \frac{(6-r)\log p}{\log q}) + G(6 - r\frac{(6-r)\log p}{\log q})}{p\log q/p} \geq$$

$$\left(\frac{1-\epsilon}{\log q}\right)\left(\int_{r-1}^{5-r} \frac{\log\left(5 - r - \frac{6-r}{t+1}\right) + G\left(6 - r - \frac{6-r}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t\right)$$

知,成立

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,1} \leq \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log q}\right)\left\{2 + 2\int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t + 2\epsilon - 2H(6-r) - \int_{r-1}^{5-r}\frac{\log\left(5 - r - \frac{6-r}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t - \int_{r-1}^{5-r}\frac{G\left(6 - r - \frac{6-r}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t\right\} \quad ㉕$$

由㉓～㉕得

$$\sum_{q\in Q_i} P(x,q,q^{\frac{1}{r}}) \leq \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log q}\right)\left\{1 + \int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{1.763}\right)\left(4r - 12 + 6\log\frac{6-r}{r}\right) - \int_{r-1}^{5-r}\frac{\log\left(5 - r - \frac{6-r}{t+1}\right) + G\left(6 - r - \frac{6-r}{t+1}\right)}{2t}\mathrm{d}t - H(6-r) + \epsilon\right\}$$

因而我们得到

$$H(r) \geq H(6-r) + \sum(r) + \int_{r-1}^{5-r}\frac{G\left(6 - r - \frac{6-r}{t+1}\right)}{2t}\mathrm{d}t - 2\epsilon \quad ㉖$$

其中 $2.5 \leq r \leq 3$

$$\sum(r) = \int_{r-1}^{5-r}\frac{\log\left(5 - r - \frac{6-r}{t+1}\right)}{2t}\mathrm{d}t - \int_2^{5-r}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t - \frac{4r - 12 + 6\log\frac{6-r}{r}}{1.763}$$

由式⑰,⑱注意到

$$\sum(2.5) \geq \int_{1.5}^{2.5}\frac{\log\left(2.5 - \frac{3.5}{t+1}\right)}{2t}\mathrm{d}t - \int_2^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t - \frac{6\log\frac{3.5}{2.5} - 2}{1.763} \geq 0.009\ 73 \quad ㉗$$

由式 ⑯,⑲ 注意到

$$\sum(2.7) \geqslant \int_{1.7}^{2.3} \frac{\log\left(2.3 - \frac{3.3}{t+1}\right)}{2t} \mathrm{d}t - \int_{2}^{2.3} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}t - \frac{6\log\frac{3.3}{2.7} - 1.2}{1.763} \geqslant 0.005\ 13 \quad ㉘$$

由式 ⑮,⑳,我们得

$$\sum(2.9) \geqslant \int_{1.9}^{2.1} \frac{\log\left(2.1 - \frac{3.1}{t+1}\right)}{2t} \mathrm{d}t - \int_{2}^{2.1} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}t - \frac{6\log\frac{3.1}{2.9} - 0.4}{1.763} \geqslant 0.000\ 745 \quad ㉙$$

由式 ⑫ 及 ⑬,得

$$G(4) \geqslant \int_3^4 \frac{H(t)}{t} \mathrm{d}t - \epsilon \geqslant \int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{t-1}^4 \frac{G(s)}{s} \mathrm{d}s - 2\epsilon \geqslant (G(4)) M_1 + M_2 - 3\epsilon$$

其中

$$M_1 = \int_3^4 \frac{\log \frac{4}{t-1}}{t} \mathrm{d}t \geqslant \left(\log \frac{4}{3}\right)^2 + 2\int_3^4 \frac{4-t}{t(2+t)} \mathrm{d}t \geqslant 0.139\ 55$$

$$M_2 = \int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{t-1}^4 \frac{\mathrm{d}s}{s} \int_{s-1}^3 \frac{H(r)}{r} \mathrm{d}r = \int_1^2 \frac{H(r)}{r} \mathrm{d}r \int_3^{r+2} \frac{\log \frac{r+1}{t-1}}{t} \mathrm{d}t + \int_2^3 \frac{H(r)}{r} \mathrm{d}r \int_3^4 \frac{\log \frac{r+1}{t-1}}{t} \mathrm{d}t = M_3 + M_4$$

$$M_3 \geqslant (H(2)) \int_1^2 \frac{\mathrm{d}r}{r} \int_3^{r+2} \frac{2(r-t+2)}{t(r+t)} \mathrm{d}t \geqslant \left(\frac{H(2)}{3}\right) \int_1^2 \left\{\frac{(r-1)^2}{r(r+3)}\right\} \left(1 - \frac{r-1}{9} - \frac{r-1}{9+3r}\right) \mathrm{d}r$$

由

$$\int_1^2 \frac{(r-1)^2}{r(r+3)} \mathrm{d}r = \frac{1}{30} + \left(\frac{1}{3}\right) \int_1^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+3}\left\{\frac{(r-1)^3}{r(r+3)}\right\}\right) \mathrm{d}r$$

得到

$$M_3 \geqslant \left(\frac{H(2)}{3}\right)\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{720}\right) \geqslant 0.011\ 57 H(2)$$

$$M_4 = \int_2^3 \frac{H(r)}{r} \mathrm{d}r \int_3^4 \frac{\log \frac{r+1}{3}}{t} \mathrm{d}t + \int_2^3 \frac{H(r)}{r} \mathrm{d}r \int_3^4 \frac{\log \frac{3}{t-1}}{t} \mathrm{d}t \geqslant$$

$$\left(\log\frac{4}{3}\right)\int_2^3\frac{2(r-2)H(r)}{r(r+4)}\mathrm{d}r+2\int_2^3\frac{H(r)}{r}\mathrm{d}r\int_3^4\frac{4-t}{t(2+t)}\mathrm{d}t\geqslant$$

$$0.006\,29H(2.2)+0.004\,77H(\frac{7}{3})+0.006\,48H(2.5)+$$

$$0.008\,38H(2.7)+0.008\,88H(2.9)+0.004\,59H(3)$$

因此我们得到

$$G(4)\geqslant(\frac{1}{0.860\,5})\{0.017\,86H(2.2)+0.004\,77H(\frac{7}{3})+0.006\,48H(2.5)+$$

$$0.008\,38H(2.7)+0.008\,88H(2.9)+0.004\,59H(3)\} \quad ㉚$$

由式 ⑪ 得

$$\int_3^4\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t\geqslant(\log\frac{4}{3})(G(4))+\int_3^4\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{t-1}^3\frac{H(s)}{s}\mathrm{d}s-\epsilon=$$

$$(\log\frac{4}{3})(G(4))+\int_2^3\frac{H(s)}{s}\mathrm{d}s\int_3^{s+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}-\epsilon\geqslant$$

$$(\log\frac{4}{3})(G(4))+(0.003\,059)(H(2.2))+(0.004\,991)(H(\frac{7}{3}))+$$

$$(0.008\,93)(H(2.5))+(0.013\,95)(H(2.7))+$$

$$(0.016\,78)(H(2.9))+(0.009\,26)(H(3)) \quad ㉛$$

$$\int_{2.5}^3\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t\geqslant(\log\frac{3}{2.5})(G(4))+\int_{2.5}^3\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{t-1}^3\frac{H(s)}{s}\mathrm{d}s-\epsilon\geqslant$$

$$(\log\frac{3}{2.5})(G(4))+\int_{2.5}^3\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_2^3\frac{H(s)}{s}\mathrm{d}s+(H(2))\int_{2.5}^3\frac{\log\frac{2}{t-1}}{t}\mathrm{d}t-\epsilon\geqslant$$

$$(\log 1.2)(G(4))+(0.017\,37)(H(2.2))+(0.010\,72)(H(\frac{7}{3}))+$$

$$(0.012\,57)(H(2.5))+(0.014\,03)(H(2.7))+$$

$$(0.013\,02)(H(2.9))+(0.006\,18)(H(3))+\Delta \quad ㉜$$

其中

$$\Delta=(H(2))\left(-2\log\frac{4}{3.5}+6\log 1.2-6\log\frac{4}{3.5}\right)\geqslant(0.025\,671)(H(2))$$

当 $3.1\leqslant r\leqslant 3.5$ 时,我们有

$$H(r)\geqslant\int_{2.5}^4\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{r-1}^{2.5}\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t-\epsilon \quad ㉝$$

我们有

$$\int_{2.3}^{2.5}\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{\frac{187}{90}}^{2.3}\frac{G(t)}{2t\left(1-\frac{t}{3.3}\right)}\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\left\{\log\frac{2.5}{2.3}+\int_{\frac{187}{90}}^{2.3}\frac{\mathrm{d}t}{2t\left(1-\frac{t}{3.3}\right)}\right\}\left\{G(4)+\int_{1.5}^3\frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t\right\}+$$

$$|H(2)|\left\{\int_{2.3}^{2.5}\frac{2(2.5-t)}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)}dt+\int_{\frac{187}{90}}^{2.3}\frac{(5-2t)dt}{2t\left(1-\frac{t}{3.3}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)}\right\}-\epsilon\geqslant$$

$$(0.234\ 52)(G(4))+(0.089\ 82)(H(2.2))+(0.013\ 79)(H(\tfrac{7}{3}))+$$
$$(0.016\ 18)(H(2.5))+(0.018\ 04)(H(2.7))+(0.016\ 75)(H(2.9))+$$
$$(0.007\ 95)(H(3))+\Delta \qquad ㉞$$

其中

$$\Delta=|H(2)|\left\{10\log\frac{2.5}{2.3}-12\log\frac{3}{2.8}+5\log\frac{(23)(9)}{187}-\left(\frac{4}{19}\right)\left(\log\frac{11}{9}\right)-\left(\frac{99}{19}\right)\left(\log\frac{63}{58}\right)\right\}\geqslant 0.040\ 83H(2)$$

我们有

$$\int_{2.1}^{2.5}\frac{G(t)}{t}dt+\int_{2\frac{9}{290}}^{2.1}\frac{G(t)}{2t\left(1-\frac{t}{3.1}\right)}dt\geqslant$$

$$\left(\log\frac{2.5}{2.1}+\frac{\log\frac{2.1}{1.9}}{2}\right)\left(G(4)+\int_{1.5}^{3}\frac{H(t)}{t}dt\right)+$$

$$|H(2)|\left\{\int_{2.1}^{2.5}\frac{5-2t}{t\left(t+\frac{1}{2}\right)}dt+\int_{2\frac{9}{290}}^{2.1}\frac{2.5-t}{t\left(1-\frac{t}{3.1}\right)\left(t+\frac{1}{2}\right)}dt\right\}-\epsilon\geqslant$$

$$(0.224\ 39)(G(4))+(0.085\ 94)(H(2.2))+(0.013\ 2)(H(\tfrac{7}{3}))+$$
$$(0.015\ 48)(H(2.5))+(0.017\ 26)(H(2.7))+(0.016\ 03)(H(2.9))+$$
$$(0.007\ 6)(H(3))+\Delta \qquad ㉟$$

其中

$$\Delta=|H(2)|\left\{10\log\frac{2.5}{2.1}-12\log\frac{3}{2.6}+\int_{2\frac{9}{290}}^{2.1}\left(\frac{5}{t}-\frac{1}{18.6\left(1-\frac{t}{3.1}\right)}-\frac{31}{6\left(t+\frac{1}{2}\right)}\right)dt\right\}\geqslant 0.043\ 27H(2)$$

由于㉛及㉜,有

$$\int_{2.5}^{4}\frac{G(t)}{t}dt\geqslant(\log 1.6)(G(4))+(0.046\ 09)(H(2.2))+$$
$$(0.015\ 71)(H(\tfrac{7}{3}))+(0.021\ 5)(H(2.5))+$$
$$(0.027\ 98)(H(2.7))+(0.029\ 8)(H(2.9))+$$
$$(0.015\ 44)(H(3)) \qquad ㊱$$

由㉖,㉗,㉑,㉒,㊱,㉝及㉚,我们得到

$$H(2.5)\geqslant 0.009\,73+\int_{2.5}^{4}\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{2.1}^{2.5}\frac{G(t)}{2t\left(1-\frac{t}{3.5}\right)}\mathrm{d}t-3\epsilon\geqslant$$

$$0.009\,73+(0.195\,29)(H(2.2))+(0.034\,75)(H(\frac{7}{3}))+$$
$$(0.044\,58)(H(2.5))+(0.054\,69)(H(2.7))+$$
$$(0.055\,53)(H(2.9))+(0.027\,95)(H(3))$$

于是引理3第一式得证.

由㉖,㉘,㉑,㉝,㊱,㉞及㉚得

$$H(2.7)\geqslant 0.005\,13+(0.191\,32)(H(2.2))+(0.033\,4)(H(\frac{7}{3}))+$$
$$(0.042\,98)(H(2.5))+(0.052\,88)(H(2.7))+$$
$$(0.053\,82)(H(2.9))+(0.027\,14)(H(3))$$

于是第二式得证.

由㉖,㉙,㉑,㉝,㉟,㊱及㉚得

$$H(2.9)\geqslant 0.000\,745+(0.189\,68)(H(2.2))+(0.032\,75)(H(\frac{7}{3}))+$$
$$(0.042\,2)(H(2.5))+(0.052)(H(2.7))+$$
$$(0.052\,99)(H(2.9))+(0.026\,74)(H(3))$$

于是第三式得证.

引理4

$$H(\frac{7}{3})\geqslant 0.014\,11+(0.158\,47)(H(2.2))+(0.043\,53)(H(2.5))+$$
$$(0.053\,65)(H(2.7))+(0.054\,68)(H(2.9))+$$
$$(0.027\,59)(H(3))$$

证明 有

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^2}\int_t^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}s}{s\log s}=(\log y)^{-1}\left(\beta-\alpha+\alpha\log\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad ㊲$$

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}t}{t\log t}\int_t^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}s}{s(\log s)^2}=\frac{\alpha-\beta-\beta\log\frac{\alpha}{\beta}}{\log y} \quad ㊳$$

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}t}{t\log t}\int_t^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}s}{s\log s}\int_s^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}r}{r(\log r)^2}\int_r^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}u}{u\log u}=$$
$$\left(\frac{1}{\log y}\right)\left\{3(\beta-\alpha)+(\alpha+2\beta)\left(\log\frac{\alpha}{\beta}\right)+\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\log\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\} \quad ㊴$$

若 $m>n$,则

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{du}{u} \int_{u}^{\frac{1}{n}} \frac{dv}{v(1-u-v)} = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{dv}{v} \int_{\frac{1}{m}}^{v} \frac{du}{u(1-u-v)} =$$

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{\log(m-1-mv) - \log \frac{1-2v}{v}}{v(1-v)} dv$$

其中 m, n 是正整数. 令 $v = \frac{1}{s+1}$, 则 $\frac{dv}{v(1-v)} = -\frac{ds}{s}, \frac{1-2v}{v} = s-1$. 因而

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{dv}{v} \int_{v}^{\frac{1}{n}} \frac{du}{u(1-u-v)} = \int_{n-1}^{m-1} \frac{\log\left(m-1-\frac{m}{s+1}-\log(s-1)\right)}{s} ds \tag{40}$$

若 $5 \geqslant \omega > u, m > n > 2$, 则

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{dr}{r} \int_{\frac{1}{\omega}}^{\frac{1}{u}} \frac{ds}{s(1-r-s)} = \int_{n-1}^{m-1} \frac{\log\left(m-1-\frac{\omega}{t+1}\right) - \log\left(u-1-\frac{u}{t+1}\right)}{t} dt \tag{41}$$

我们有

$$\int_{2.5}^{2.75} \frac{\log(t-1)}{t} dt = \left(\frac{1}{2.625}\right)\left\{\int_{1.5}^{1.75} \log t dt + \right.$$

$$\left.\int_{1.5}^{1.75} \frac{(1.625-t)\left(\log 1.5 + \log \frac{t}{1.5}\right)}{1+t} dt\right\} \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{2.625}\right)\left\{1.75 \log \frac{1.75}{1.5} - 0.75 + 11.25 \log \frac{3.25}{3} - \right.$$

$$\left.26.25\left(\log \frac{2.75}{2.5} - \log \frac{3.25}{3}\right)\right\} + (\log 1.5)(\log 1.1) \leqslant$$

$$0.046\,063\,4 \tag{42}$$

$$\int_{2.75}^{3} \frac{\log(t-1)}{t} dt = \left(\frac{1}{2.875}\right)\left\{\int_{1.75}^{2} \log t dt + \int_{1.75}^{2} \frac{(1.875-t)(\log x) dt}{1+t}\right\} \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{2.875}\right)\left\{2 \log \frac{2}{1.75} - 0.75 + 12.75 \log \frac{3.75}{3.5} - \right.$$

$$\left.\left(\frac{15.812\,5}{0.75}\right)\left(\log \frac{3}{2.75} - \log \frac{3.75}{3.5}\right)\right\} +$$

$$(\log 1.75)\left(\log \frac{3}{2.75}\right) \leqslant 0.054\,547\,7 \tag{43}$$

由 ⑰, ㊷, ㊸ 我们有

$$\int_{2}^{3} \frac{\log(t-1)}{t} dt \leqslant 0.147\,225\,1 \tag{44}$$

$$\int_{2}^{3} \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t} dt \geqslant 0.207\,121\,9 + \Delta \geqslant 0.246\,191 \tag{45}$$

其中

$$\Delta = 2\int_2^3 \frac{4t-8}{t(14t+2)}\mathrm{d}t \geqslant 0.0390691$$

我们有

$$\int_{1.6}^{2} \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t = \left(\log\frac{19}{13}\right)\left(\log\frac{5}{4}\right) + \int_{1.6}^{2}\frac{\log\frac{39t-13}{19t+19}}{t}\mathrm{d}t \geqslant$$

$$0.0846806 + \Delta \geqslant 0.099797 \qquad ㊻$$

其中

$$\Delta = 2\int_{1.6}^{2}\frac{20t-32}{t(58t+6)}\mathrm{d}t \geqslant 0.1454644 - 0.130348$$

当 $i=1$ 或 2 时我们有

$$3\sum_{q\in Q_i} P(x,q,\underline{q}^{\frac{3}{7}}) \leqslant \sum_{q\in Q_i}(M_{q,3}+M_{q,4}) \qquad ㊼$$

其中

$$M_{q,3} = 3P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4}}) \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leqslant\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4}}) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4}})$$

$$M_{q,4} = \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,p_1p_2q,p_1) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,pq,p) -$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\leqslant\underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_1) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,pq,p)$$

我们有

$$M_{q,4} \leqslant \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_2) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\leqslant\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2<p_3\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,p_1p_2p_3q,p_2) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2<p_3<p_4\leqslant\underline{q}^{\frac{3}{7}}} P(x,p_1p_2p_3p_4q,p_3)$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_{q,3} \leqslant \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log\underline{q}}\right)\left\{3+3\int_2^3\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t + 2\epsilon -\right.$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t - \int_2^3\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t +$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{1-H(2)}{\beta(1-\alpha-\beta)}d\beta-3H(4)-$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\Bigg\}$$

由式㊵我们有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}=\int_{2}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)-\log(t-1)}{t}dt$$

因而有

$$\sum_{q\in Q_i}M_{q,3}\leqslant\left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\log \underline{q}}\right)\Bigg\{3+2\int_{2}^{3}\frac{\log(t-1)}{t}dt+2\epsilon-$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-(H(2))\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}-$$

$$3H(4)-\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\Bigg\}$$

由$\left(\frac{14}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}-\frac{3}{7}\right)=\frac{17}{9}$,引理2及式㊲～㊴,得

$$\sum_{q\in Q_i}M_{q,4}\leqslant\left(\frac{8x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\Bigg\{\left(\frac{1}{1.763}\right)\Bigg(\int_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}}^{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{du}{u\log u}\int_{u}^{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{dv}{v(\log v)^2}\cdot$$

$$\int_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{d\omega}{\omega\log\omega}+\int_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}}^{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}\frac{du}{u\log u}\int_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dv}{v(\log v)^2}\int_{v}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{d\omega}{\omega\log\omega}\Bigg)+$$

$$\int_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{du}{u\log u}\int_{u}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dv}{v\log v}\int_{v}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{d\omega}{\omega(\log\omega)^2}\int_{\omega}^{\underline{q}^{\frac{3}{7}}}\frac{dt}{t\log t}\Bigg\}\leqslant$$

$$\left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\frac{0.068\,39}{\log \underline{q}}$$

又有

$$\int_{\frac{4}{3}}^{1.6}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt\geqslant0.045\,82+\Delta\geqslant0.057\,811 \qquad ㊽$$

其中

$$\Delta=2\int_{\frac{4}{3}}^{1.6}\frac{12t-16}{t(30t+2)}dt\geqslant0.011\,991$$

由式㊼,㊹,㊺,㊻及㊽,得

$$\sum_{q\in Q_i}P(x,q,\underline{q}^{\frac{3}{7}})\leqslant\left(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\right)\sum_{q\in Q_i}\left(\frac{1}{\underline{q}}\right)\left\{1-0.013\,652-H(4)-\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}\mathrm{d}t-\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}\mathrm{d}t-(H(2))\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\beta}{3\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}$$

因此我们有

$$H(\frac{7}{3})\geqslant 0.013\,652+H(4)+(H(2))\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\beta}{3\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{4}{3}}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}\mathrm{d}t-\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{3t}\mathrm{d}t$$

令 $y=4-\frac{4}{t+1}$,则 $\mathrm{d}y=\frac{y(4-y)}{4t}\mathrm{d}t$,由式 ⑪ 我们有

$$\int_{\frac{4}{3}}^{2}\frac{G\left(4-\frac{4}{t-1}\right)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{16}{7}}^{\frac{8}{3}}\frac{G(y)\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{4}\right)}\geqslant$$

$$\left(\log\frac{3}{2}\right)\left\{G(4)+\int_{2}^{3}\frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t+(H(2))\left(\log\frac{6}{5}\right)\right\}+\Delta\geqslant$$

$$\left(\log\frac{3}{2}\right)G(4)+(0.023\,85)(H(\frac{7}{3}))+(0.027\,97)(H(2.5))+$$

$$(0.031\,2)(H(2.7))+(0.028\,97)(H(2.9))+(0.013\,74)(H(3))+$$

$$(0.161\,93)(H(2.2))\qquad ㊾$$

其中

$$\Delta=2\{H(2)\}\int_{\frac{16}{7}}^{\frac{8}{3}}\frac{8-3t}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)(3t+2)}\mathrm{d}t\geqslant(0.049\,361)(H(2))$$

我们有

$$\int_{2}^{3}\frac{G\left(4-\frac{4}{t-1}\right)}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{8}{3}}^{3}\frac{G(y)}{y\left(1-\frac{y}{4}\right)}\mathrm{d}y\geqslant$$

$$\left(\log\frac{3}{2}\right)\{G(4)\}+\int_{\frac{8}{3}}^{3}\frac{H(2)\log\frac{2}{t-1}}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)}\mathrm{d}t+\int_{\frac{8}{3}}^{3}\frac{\mathrm{d}y}{y\left(1-\frac{y}{4}\right)}\cdot$$

$$\left\{(\log 1.1)(H(2.2))+\left(\log\frac{7}{6.6}\right)(H(\frac{7}{3}))+\left(\log\frac{7.5}{7}\right)(H(2.5))+\right.$$

$$\left(\log\frac{2.7}{2.5}\right)(H(2.7)) + \left(\log\frac{2.9}{2.7}\right)(H(2.9)) + \left(\log\frac{3}{2.9}\right)(H(3))\right\} - \epsilon$$

$$\int_{\frac{8}{3}}^{3}\frac{\log\frac{2}{t-1}}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)}\mathrm{d}t \geqslant 2\int_{\frac{8}{3}}^{3}\frac{3-t}{t\left(1-\frac{t}{4}\right)(t+1)}\mathrm{d}t \geqslant 0.034\,751$$

因而

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{G\left(4-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t \geqslant &\left(\log\frac{3}{2}\right)(G(4)) + (0.073\,39)(H(2.2)) +\\ &(0.023\,85)(H(\tfrac{7}{3})) + (0.027\,97)(H(2.5)) +\\ &(0.031\,2)(H(2.7)) + (0.028\,97)(H(2.9)) +\\ &(0.013\,74)(H(3))\end{aligned} \quad ㊿$$

由式㊵,㊹及㊺有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} = \int_2^3\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)-\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t \geqslant 0.098\,965\,9 \quad ㉛$$

由式㊾～㉛,⑬,㉛及㉚有

$$\begin{aligned}H(\tfrac{7}{3}) \geqslant\ &0.013\,652 + (0.153\,3)(H(2.2)) + (0.032\,68)(H(\tfrac{7}{3})) +\\ &(0.042\,11)(H(2.5)) + (0.051\,9)(H(2.7)) +\\ &(0.052\,9)(H(2.9)) + (0.026\,69)(H(3))\end{aligned}$$

于是引理4得证.

4.3 定理1的证明

我们有

$$\int_{y^{\frac{1}{\alpha}}}^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}t}{t\log t}\int_t^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}s}{s\log s}\int_s^{y^{\frac{1}{\beta}}}\frac{\mathrm{d}r}{r(\log r)^2} = \frac{\alpha-\beta-\beta\log\frac{\alpha}{\beta}-(\frac{\beta}{2})\left(\log\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}{\log y} \quad ㉜$$

$$\int_{1.2}^{1.6}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t \geqslant 0.048\,058\,4 + \Delta \geqslant 0.079\,869\,6 \quad ㉝$$

其中

$$\Delta = 2\int_{1.2}^{1.6}\frac{20t-24}{t(46t+2)}\mathrm{d}t \geqslant 0.031\,811\,2$$

由式㊻和㉝,我们有

$$\int_{1.2}^{2}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t \geqslant 0.179\,666\,5 + \Delta \geqslant 0.278\,441\,5 \quad ㉞$$

其中

$$\Delta=\int_{1.2}^{2}\frac{\log\dfrac{3.5t-1}{3t-1}}{t}\mathrm{d}t\geqslant 0.093\ 134\ 5+2\int_{1.2}^{2}\frac{2-t}{t(71t-22)}\mathrm{d}t\geqslant 0.098\ 775$$

我们有

$$\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(2.5-\dfrac{3.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t\geqslant 0.038\ 77+\Delta\geqslant 0.046\ 314 \qquad ⑮$$

其中

$$\Delta=2\int_{\frac{13}{8}}^{\frac{14}{8}}\frac{8t-13}{t(22t+1)}\mathrm{d}t+2\int_{\frac{14}{8}}^{2}\frac{28t-49}{t(82t+5)}\mathrm{d}t\geqslant 0.007\ 544$$

若 $m\geqslant 2,l\geqslant 4$,则

$$\int_{2}^{m}\frac{(t-2)^{l-1}}{t^{l}}\mathrm{d}t=\sum_{i=l}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^{i} \qquad ⑯$$

由式⑯得

$$\int_{2}^{2.5}\frac{(t-2)^{3}}{t^{4}}\mathrm{d}t\leqslant\frac{48}{10^{5}},\quad \int_{2}^{2.5}\frac{(t-2)^{5}}{t^{6}}\mathrm{d}t\leqslant\frac{4}{(3)(10^{5})}$$

因此

$$\int_{2}^{2.5}\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{t}\mathrm{d}t\leqslant 2\int_{2}^{2.5}\left\{\frac{t-2}{3t^{2}}+\frac{(t-2)^{3}}{81t^{4}}+\frac{(t-2)^{5}}{243t^{6}}\right\}\mathrm{d}t\leqslant 0.015\ 442 \qquad ⑰$$

由⑯有

$$\int_{2}^{3}\frac{(t-2)^{3}\mathrm{d}t}{t^{4}}\leqslant\sum_{i=4}^{7}\frac{1}{3^{i}i}+\frac{1}{(8)(3^{8})\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}\leqslant 0.004\ 24$$

$$\int_{2}^{3}\frac{(t-2)^{5}}{t^{6}}\mathrm{d}t\leqslant 0.000\ 33$$

因而

$$\int_{2}^{3}\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{t}\mathrm{d}t\leqslant 2\int_{2}^{3}\left\{\frac{t-2}{3t^{2}}+\frac{(t-2)^{3}}{81t^{4}}+\frac{(t-2)^{5}}{243t^{6}}\right\}\mathrm{d}t\leqslant 0.048\ 196 \qquad ⑱$$

我们有

$$\int_{3}^{3.5}\frac{t-3}{t(13t+1)}\mathrm{d}t\leqslant 0.000\ 849\ 1$$

由

$$\int_{3}^{3.5}\frac{(t-3)^{3}}{t(13t+1)^{3}}\mathrm{d}t\leqslant\left(\frac{1}{28}\right)\left(\frac{1}{93}\right)^{3}+\int_{3}^{3.5}\frac{(t-3)^{3}\mathrm{d}t}{7t(13t+1)^{3}}$$

得

$$\int_3^{3.5}\frac{(t-3)^3}{t(13t+1)^3}dt \leqslant \left(\frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{93}\right)^3$$

进而

$$\int_3^{3.5}\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{t}dt \leqslant 0.034\,398+2\int_3^{3.5}\left\{\frac{3(t-3)}{t(13t+1)}+\frac{28(t-3)^3}{3(13t+1)^3t}\right\}dt \leqslant 0.039\,496 \quad ⑲$$

令

$$f(n)=\int_2^n\frac{\log(t-1)}{t}dt-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{\log\left(n-\dfrac{n+1}{t+1}\right)}{t}dt-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{t}dt$$

当 $n\geqslant 2$ 时,我们有

$$f'(n)=\frac{\log(n-1)}{n}-\frac{\log(n-1)}{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{t}{t(nt-1)}dt-\left(\frac{1}{2n}\right)\left(\log\frac{2n-1}{n+1}\right)=0$$

当 $n\geqslant 2$ 时,由 $f(2)=0$,得

$$\int_2^n\frac{\log(t-1)}{t}dt-\left(\frac{1}{2}\right)\int_2^n\frac{\log\left(n-\dfrac{n+1}{t+1}\right)}{t}dt=\int_2^n\frac{\log\dfrac{2t-1}{t+1}}{2t}dt \quad ⑳$$

设 $q\in Q_i(i=1$ 或 $2)$,则

$$\begin{aligned}3P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}) \leqslant{}& 2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4}})-\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p\leqslant q^{\frac{1}{3}}}P(x,pq,p)-\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p\leqslant q^{\frac{1}{3}}}P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4}})+\\&\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant q^{\frac{1}{3}}}P(x,p_1p_2q,p_1)+P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{3.5}})-\\&\sum_{q^{\frac{1}{3.5}}<p\leqslant q^{\frac{1}{3}}}P(x,pq,p)-3\sum_{q^{\frac{1}{3}}<p\leqslant q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,pq,p)\end{aligned} \quad ㉑$$

$$\begin{aligned}P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}) \leqslant{}& P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})-\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p<q^{\frac{1}{4}}}P(x,pq,p)-\\&\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p<q^{\frac{1}{4}}}P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+\\&\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<q^{\frac{1}{4}}}P(x,qp_1p_2,p_1)-\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p<q^{\frac{1}{3}}}P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4}})+\\&\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<q^{\frac{1}{3.5}}}P\left(x,qp_1p_2,\left(\frac{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{qp_1p_2}\right)^{\frac{1}{2.2}}\right)-\\&\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant q^{\frac{1}{3.5}}>q^{\frac{1}{4}}>p_3\geqslant\left(\frac{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{qp_1p_2}\right)^{\frac{1}{2.2}}}P(x,qp_1p_2p_3,p_3)-\end{aligned}$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_1) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x, qp_1p_2, \underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) -$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_1) -$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_1) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3}}} P(x, qp_1p_2, p_1) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1\leqslant \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp, \underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{4}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2, p_1) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2, \underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) -$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_3\leqslant \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_1) -$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_3\leqslant \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_1) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3.5}}<p_1<\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2, p_1) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2, p_1) - \sum_{\underline{q}^{\frac{8}{21}}<p\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp, p) \qquad (62)$$

我们有

$$P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}) \leqslant P(x, q, \underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) - \sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p<\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp, \underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) +$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2, p_1)$$

$$\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{2.2}}} P(x, p_1p_2q, p_1) = \frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\leqslant \underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x, p_1p_2q, p_1) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x, p_1p_2q, \underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\underline{q}^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<p_3<\underline{q}^{\frac{1}{4}}} P(x, p_1p_2p_3q, p_1) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le q^{\frac{1}{4}}<p_2\le q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,p_1p_2q,p_1)+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le q^{\frac{1}{4}}<p_2\le q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})-$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le q^{\frac{1}{4}}<p_3\le q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,p_1p_2p_3q,p_1)+$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le q^{\frac{1}{3}}}P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})-$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le q^{\frac{1}{4}}<p_2<p_3\le q^{\frac{1}{3}}}P(x,p_1p_2p_3q,p_1)-$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2<p_3\le q^{\frac{1}{3}}}P(x,qp_1p_2p_3,p_1)+$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1\le q^{\frac{1}{3}}<p_2\le q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,p_1p_2q,p_1)+$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3}}<p_1<p_2\le q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,qp_1p_2,p_1) \qquad ⑥③$$

对 $i=1$ 或 $i=2$,由式 ⑥① ~ ⑥③ 式有

$$5\sum_{q\in Q_i}P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{2.2}})\le\sum_{q\in Q_i}(S_q^{(1)}+S_q^{(2)}+S_q^{(3)}+S_q^{(4)}) \qquad ⑥④$$

其中

$$S_q^{(1)}=2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})-\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p\le q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})-\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p\le q^{\frac{1}{4}}}P(x,qp,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})-$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3}}<p<q^{\frac{8}{21}}}P(x,qp,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2<q^{\frac{1}{4}}}P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le q^{\frac{1}{4}}<p_2\le q^{\frac{1}{2.2}}}P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\le q^{\frac{1}{3}}}P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1\le q^{\frac{1}{3.5}}<q^{\frac{1}{3}}<p_2\le q^{\frac{8}{21}}}P(x,p_1p_2q,\underline{q}^{\frac{1}{4.5}})+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\le q^{\frac{1}{4}}}P(x,p_1p_2q,p_1)+\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\le q^{\frac{1}{4}}<q^{\frac{1}{3}}<p_2\le q^{\frac{8}{21}}}P(x,p_1p_2q,p_1)$$

$$S_q^{(2)}=2P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{4}})+P(x,q,\underline{q}^{\frac{1}{3.5}})-2\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p<q^{\frac{1}{3}}}P(x,pq,\underline{q}^{\frac{1}{4}})+$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3}}} P(x, p_1 p_2 q, \underline{q}^{\frac{1}{4.5}}) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}}} P(x, p_1 p_2 q, (\underline{q}/p_1 p_2)^{\frac{1}{2.2}})$$

$$S_q^{(3)} = \frac{1}{2} \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{4}}} P(x, p_1 p_2 q, p_1) + \frac{1}{2} \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, p_1 p_2 q, p_1) -$$

$$\frac{1}{2} \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p \leqslant q^{\frac{1}{4}}} P(x, qp, p) - \frac{1}{2} \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, p_1 p_2 p_3 q, p_1) -$$

$$\frac{1}{2} \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{4}}} P(x, p_1 p_2 p_3 q, p_1) -$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{3}}} P(x, p_1 p_2 p_3 q, p_1) -$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < p_3 \leqslant q^{\frac{8}{21}}} P(x, p_1 p_2 p_3 q, p_1) -$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} > q^{\frac{1}{4}} > p_3 \geqslant (q/p_1 p_2)^{\frac{1}{2.2}}} P(x, q p_1 p_2 p_3, p_3)$$

$$S_q^{(4)} = \sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{3}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, p_1 p_2 q, p_1) + \sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3}}} P(x, p_1 p_2 q, p_1) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{8}{21}}} P(x, p_1 p_2 q, p_1) + \sum_{q^{\frac{1}{3}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, p_1 p_2 q, p_1) -$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p \leqslant q^{\frac{1}{3}}} P(x, pq, p) - \sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p \leqslant q^{\frac{1}{3}}} P(x, pq, p) -$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{3}}} P(x, p_1 p_2 p_3 q, p_1) - \sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}}} P(x, p_1 p_2 p_3 q, p_1) -$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < p_3 \leqslant q^{\frac{8}{21}}} P(x, p_1 p_2 p_3 q, p_1) - 3 \sum_{q^{\frac{1}{3}} < p \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, pq, p) -$$

$$\sum_{q^{\frac{8}{21}} < p \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, pq, p)$$

对 $i = 1$ 或 $i = 2$,由式⑭有

$$\sum_{q \in Q_i} S_q^{(1)} \leqslant \left(\frac{4x^{1-a_i} C_x}{\log x}\right) \sum_{q \in Q_i} \left\{ \left(\frac{2}{\log \underline{q}}\right) \left(1 + \int_2^{3.5} \frac{\log(t-1)}{t} \mathrm{d}t + \epsilon - H(4.5)\right) - \right.$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} \left(\frac{1}{p \log \underline{q}/p}\right) \left(\log\left(3.5 - \frac{4.5 \log p}{\log \underline{q}}\right) + G\left(4.5 - \frac{4.5 \log p}{\log \underline{q}}\right)\right) -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p\leqslant q^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{p\log q/p}\right)\left(\log\left(3.5-\frac{4.5\log p}{\log q}\right)+G\left(4.5-\frac{4.5\log p}{\log q}\right)\right)-$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3}}<p\leqslant q^{\frac{8}{21}}}\left(\frac{1}{p\log q/p}\right)\left(\log\left(3.5-\frac{4.5\log p}{\log q}\right)+G\left(4.5-\frac{4.5\log p}{\log q}\right)\right)+$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leqslant q^{\frac{1}{3.5}}<q^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant q^{\frac{8}{21}}}\frac{1-H(2.2)}{p_1p_2\log\frac{q}{p_1p_2}}+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1<p_2\leqslant q^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{p_1p_2\log\frac{q}{p_1p_2}}\right)\cdot$$

$$\left(2-H\left(4.5-\frac{4.5\log p_1p_2}{\log q}\right)-H\left(\frac{\log q/p_2}{\log p_1}-1\right)\right)+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{q^{\frac{1}{4.5}}<p_1\leqslant q^{\frac{1}{4}}<p_2\leqslant q^{\frac{1}{2.2}}}\left(\frac{1}{p_1p_2\log\frac{q}{p_1p_2}}\right)\cdot$$

$$\left(1-H\left(4.5-\frac{4.5\log p_1p_2}{\log q}\right)\right)+$$

$$\left.\sum_{q^{\frac{1}{4}}<p_1<p_2\leqslant q^{\frac{1}{3}}}\frac{1-H\left(4.5-\frac{4.5\log p_1p_2}{\log q}\right)}{p_1p_2\log\frac{q}{p_1p_2}}\right\}$$

若 $5\geqslant l>m\geqslant 2.2, 2\leqslant n\leqslant 5$,则

$$\sum_{q^{\frac{1}{l}}<p\leqslant q^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{p\log q/p}\right)\left\{\log\left(n-1-\frac{n\log p}{\log q}\right)+G\left(n-\frac{n\log p}{\log q}\right)\right\}\geqslant$$

$$\int_{q^{\frac{1}{l}}}^{q^{\frac{1}{m}}}\frac{(1-\epsilon)dt}{t(\log t)(\log q/t)}\left\{\log\left(n-1-\frac{n\log t}{\log q}\right)+G\left(n-\frac{n\log t}{\log q}\right)\right\}\geqslant$$

$$(1-\epsilon)\int_{m-1}^{l-1}\frac{\log\left(n-1-\frac{n}{t+1}\right)+G\left(n-\frac{n}{t+1}\right)}{t\log q}dt \qquad ⑥⑤$$

由式⑥⑤,我们有

$$\sum_{q\in Q_i}S_q^{(1)}\leqslant\left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\right)\left\{2+2\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+2\epsilon-\right.$$

$$\int_{1.2}^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_3^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-$$

$$\int_{\frac{13}{8}}^{2} \frac{\log\left(3.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt + \int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} +$$

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{4}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} +$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{3}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} - 2H(4.5) - \int_{1.2}^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt -$$

$$\frac{1}{2} \int_{3}^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt - \int_{\frac{13}{8}}^{2} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt -$$

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{H(2.2)}{\beta(1-\alpha-\beta)} d\beta -$$

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{4}} \Bigg(H(4.5 - 4.5\alpha - 4.5\beta) +$$

$$H\left(\frac{1-\beta}{\alpha} - 1\right)\Bigg) \left(\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right) -$$

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}} \frac{H(4.5 - 4.5\alpha - 4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)} d\beta -$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{3}} \frac{H(4.5 - 4.5\alpha - 4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)} d\beta \Bigg\} \qquad (66)$$

当 $i = 1$ 或 $i = 2$ 时，由式 (64) 我们有

$$\sum_{q \in Q_i} S_q^{(2)} \leqslant \left(\frac{4x^{1-\alpha_i} C_x}{\log x}\right) \sum_{q \in Q_i} \Bigg\{ \left(\frac{1}{\log q}\right) \Bigg(3 + 2\int_{2}^{3} \frac{\log(t-1)}{t} dt +$$

$$\int_{2}^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t} dt + \epsilon - 2H(4) - H(3.5)\Bigg) -$$

$$2 \sum_{q^{\frac{1}{4}} < p \leqslant q^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{p \log q/p}\right) \left(\log\left(3 - \frac{4\log p}{\log q}\right) + G\left(4 - \frac{4\log p}{\log q}\right)\right) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3}}} \frac{1 - H(2.2)}{p_1 p_2 \log \frac{q}{p_1 p_2}} + \sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}}} \frac{1 - H(2.2)}{p_1 p_2 \log \frac{q}{p_1 p_2}} \Bigg\} \leqslant$$

$$\left(\frac{4x^{1-\alpha_i} C_x}{\log x}\right) \left(\sum_{q \in Q_i} \frac{1}{\log q}\right) \Bigg\{3 + \int_{2}^{3} \frac{2\log(t-1)}{t} dt +$$

$$\int_{2}^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t} dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} +$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + \epsilon - 2H(4) - H(3.5) -$$

$$2\int_2^3 \frac{\log\left(3 - \frac{4}{t+1}\right)}{t} dt - 2\int_2^3 \frac{G\left(4 - \frac{4}{t+1}\right)}{t} dt -$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{H(2.2)}{\beta(1-\alpha-\beta)} d\beta - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}} \frac{H(2.2)}{\beta(1-\alpha-\beta)} d\beta \Bigg\} \qquad ⑥⑦$$

当 $i = 1$ 或 $i = 2$ 时,由式 ⑥⑥ 及 ⑥⑦ 有

$$\sum_{q \in Q_i} (S_q^{(1)} + S_q^{(2)}) \leqslant \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q \in Q_i} \frac{1}{\log q}\right)(N_1 - N_2) \qquad ⑥⑧$$

其中

$$N_1 = 5 + 2\int_2^{3.5} \frac{\log(t-1)}{t} dt + 2\int_2^3 \frac{\log(t-1)}{t} dt + \int_2^{2.5} \frac{\log(t-1)}{t} dt +$$

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + \int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{4}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{3}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} +$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + 3\epsilon -$$

$$\int_{1.2}^{3.5} \frac{\log\left(3.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt - \frac{1}{2}\int_3^{3.5} \frac{\log\left(3.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt -$$

$$\int_{\frac{13}{8}}^{2} \frac{\log\left(3.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt - 2\int_2^3 \frac{\log\left(3 - \frac{4}{t+1}\right)}{t} dt$$

$$N_2 = 2H(4.5) + 2H(4) + H(3.5) + \int_{1.2}^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_3^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt + \int_{\frac{13}{8}}^{2} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} dt +$$

$$2\int_2^3 \frac{G\left(4 - \frac{4}{t+1}\right)}{t} dt + |H(2.2)| \left\{ \int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + \right.$$

$$\left. \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}} \frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)} \right\} +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)}\mathrm{d}\beta+$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)+H\left(\frac{1-\beta}{\alpha}-1\right)}{\beta(1-\alpha-\beta)}\mathrm{d}\beta+$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{H(4.5-4.5\alpha-4.5\beta)}{\beta(1-\alpha-\beta)}\mathrm{d}\beta$$

我们有

$$N_1=5+\int_3^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t+2\int_2^3\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t+2\int_2^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t+3\epsilon-$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\int_{1.2}^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t-\left(\frac{1}{2}\right)\int_{1.2}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t-$$

$$\int_2^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t+N_1^* \qquad (69)$$

其中

$$N_1^*=\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t+\int_{2.5}^{3}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{1.2}^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t-$$

$$\frac{1}{2}\int_3^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t-$$

$$2\int_2^3\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{1.2}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t+$$

$$\int_2^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t+\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t+$$

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\int_{\alpha}^{\frac{1}{3.5}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}$$

由式⑩及⑪得

$$N_1^* = \left\{\int_3^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt+\int_3^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_\alpha^{\frac{1}{4}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}+$$

$$\left\{\int_2^{3}\frac{\log(t-1)-\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_\alpha^{\frac{1}{3}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}+$$

$$\left\{\int_{2.5}^{3}\frac{\log(t-1)-\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_\alpha^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}+$$

$$\left\{\int_{1.2}^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)-\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{2t}dt+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{d\beta}{2\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}+$$

$$\left\{\int_2^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)-\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}+$$

$$\left\{\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)-\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}}\frac{d\alpha}{\alpha}\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}}\frac{d\beta}{\beta(1-\alpha-\beta)}\right\}=0 \tag{70}$$

由式 ⑩ 我们有

$$\int_2^{3.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_2^{3.5}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_2^{3.5}\frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt$$

$$\int_2^{3}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\frac{1}{2}\int_2^{3}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_2^{3}\frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt$$

$$2\int_2^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}dt-\int_2^{2.5}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt=\int_2^{2.5}\frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt$$

因此由式 ⑲ 及 ⑳,我们有

$$N_1=5+\int_2^{2.5}\frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt+\frac{1}{2}\int_2^{3}\frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt+$$

$$\frac{1}{2}\int_2^{3.5}\frac{\log\frac{2t-1}{t+1}}{t}dt-\frac{1}{2}\int_{1.2}^{2}\frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt-$$

$$\frac{1}{2}\int_{1.2}^{2}\frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t}dt-\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{\log\left(2.5-\frac{3.5}{t+1}\right)}{t}dt$$

由式 ⑰,⑱,⑲,⑭,⑯,⑬ 及 ⑮ 得

$$N_1 \leqslant 5 + 0.015\,442 + 0.048\,196 + 0.019\,748 - (\frac{1}{2})(0.278\,441\,5 + 0.179\,666\,6) - 0.046\,314 \leqslant 5 - 0.191\,982 \quad ⑦①$$

令 $y_1 = 4.5 - \frac{4.5}{t+1}$，则

$$t + 1 = \frac{4.5}{4.5 - y}, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{4.5(4.5 - y)\mathrm{d}y}{y(4.5 - y)^2}$$

由式 ⑪ 有

$$\int_3^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{27}{8}}^{3.5} \frac{4.5G(y)}{y(4.5-y)}\mathrm{d}y \geqslant |G(4)|\left(\log\frac{28}{27} + \log\frac{9}{8}\right) + \left(\log\frac{7}{6}\right)\int_{2.5}^{3}\frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t + (H(2.5))\int_{\frac{19}{8}}^{2.5}\frac{\log\frac{8(t+1)}{27} + \log\frac{9/8}{3.5-t}}{t}\mathrm{d}t$$

因

$$\int_{\frac{19}{8}}^{2.5}\frac{\log\frac{t+1}{10.5-3t}}{t}\mathrm{d}t \geqslant 2\int_{\frac{19}{8}}^{2.5}\frac{4t-9.5}{t(11.5-2t)}\mathrm{d}t \geqslant 0.003\,862$$

故

$$\int_3^{3.5}\frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t \geqslant (0.154\,15)(G(4)) + (0.003\,86)(H(2.5)) + (0.011\,86)(H(2.7)) + (0.011\,01)(H(2.9)) + (0.005\,22)(H(3)) \quad ⑦②$$

我们有

$$\int_{\frac{13}{8}}^{2}\frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{39}{14}}^{3}\frac{4.5G(y)}{y(4.5-y)}\mathrm{d}y \geqslant |G(4)|\int_{\frac{39}{14}}^{3}\frac{4.5\mathrm{d}y}{y(4.5-y)} + \int_{\frac{39}{14}}^{3}\frac{4.5\mathrm{d}y}{y(4.5-y)}\int_{y-1}^{3}\frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t - \epsilon =$$

$$\left(\log\frac{16}{13}\right)\left(G(4) + \int_2^3\frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t\right) + \Delta - \epsilon \geqslant$$

$$(0.207\,639)(G(4)) + (0.031\,19)(H(2.2)) + (0.012\,21)(H(\frac{7}{3})) + (0.014\,32)(H(2.5)) + (0.015\,98)(H(2.7)) + (0.014\,83)(H(2.9)) + (0.007\,03)(H(3)) \quad ⑦③$$

其中

$$\Delta = (H(2))\int_{\frac{25}{14}}^{2}\left(\log\frac{8(t+1)}{45.5-13t}\right)\left(\frac{dt}{t}\right) \geqslant$$

$$(H(2))(2)\int_{\frac{25}{14}}^{2}\frac{21t-37.5}{t(53.5-5t)}dt \geqslant 0.011\,407H(2.2)$$

我们有

$$\int_{2}^{3}\frac{G\left(4.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt = \int_{3}^{\frac{27}{8}}\frac{4.5G(\gamma)d\gamma}{\gamma(4.5-\gamma)} \geqslant |G(4)|\int_{3}^{\frac{27}{8}}\frac{4.5}{\gamma(4.5-\gamma)}d\gamma +$$

$$\int_{3}^{\frac{27}{8}}\frac{4.5d\gamma}{\gamma(4.5-\gamma)}\int_{\gamma-1}^{3}\frac{H(t)}{t}dt - \epsilon \geqslant$$

$$\left(\log\frac{3}{2}\right)\left(G(4)+\int_{\frac{19}{8}}^{3}\frac{H(t)}{t}dt\right)+\Delta-\epsilon \geqslant$$

$$(0.405\,46)(G(4)) + (0.009\,59)(H(2.2)) +$$

$$(0.016\,5)(H(\frac{7}{3})) + (0.027\,53)(H(2.5)) +$$

$$(0.031\,2)(H(2.7)) + (0.028\,97)(H(2.9)) +$$

$$(0.013\,74)(H(3)) \qquad (74)$$

其中

$$\Delta \geqslant (H(2.2))\int_{2}^{2.2}\frac{\log\frac{t+1}{7-2t}}{t}dt + (H(\frac{7}{3}))\int_{2.2}^{\frac{7}{3}}\frac{\log\frac{t+1}{7-2t}}{t}dt +$$

$$(H(\frac{19}{8}))\int_{\frac{7}{3}}^{\frac{19}{8}}\frac{\log\frac{t+1}{7-2t}}{t}dt \geqslant$$

$$0.009\,591H(2.2) + (0.016\,5)(H(\frac{7}{3})) + ((0.006\,74)H(2.5))$$

我们有

$$\int_{1.2}^{\frac{13}{8}}\frac{G\left(4.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}dt \geqslant |G(4)| + \int_{\frac{27}{11}}^{\frac{39}{14}}\frac{4.5d\gamma}{\gamma(4.5-\gamma)} +$$

$$\int_{\frac{27}{11}}^{\frac{39}{14}}\frac{4.5d\gamma}{\gamma(4.5-\gamma)}\int_{\gamma-1}^{3}\frac{H(t)}{t}dt - \epsilon \geqslant$$

$$\left(\log\frac{65}{48}\right)\left\{G(4) + \left(\log\frac{7}{6.6}\right)(H(\frac{7}{3})) + \left(\log\frac{7.5}{7}\right)(H(2.5)) +\right.$$

$$\left.\left(\log\frac{27}{25}\right)(H(2.7)) + \left(\log\frac{29}{27}\right)(H(2.9)) + \left(\log\frac{3}{2.9}\right)(H(3))\right\} +$$

$$\left\{\left(\log\frac{3.08}{2.5}\right)\left(\log\frac{65}{45}\right)+\Delta\right\}(H(2.2)) - \epsilon \geqslant$$

$$(0.303\ 18)(G(4)) + (0.092\ 9)(H(2.2)) + (0.017\ 83)(H(\tfrac{7}{3})) + (0.020\ 91)(H(2.5)) + (0.023\ 33)(H(2.7)) + (0.021\ 66)(H(2.9)) + (0.010\ 27)(H(3)) \tag{75}$$

其中

$$\Delta = \int_{\frac{16}{11}}^{\frac{25}{14}} \frac{\log \frac{5t+5}{21-6t}}{t} \mathrm{d}t \geqslant 2\int_{\frac{16}{11}}^{\frac{25}{14}} \frac{11t-16}{t(26-t)} \mathrm{d}t \geqslant 0.029\ 65$$

由式(72) ~ (75)得

$$\int_{1.2}^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} \mathrm{d}t + \left(\frac{1}{2}\right)\int_{3}^{3.5} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} \mathrm{d}t + \int_{\frac{13}{8}}^{2} \frac{G\left(4.5 - \frac{4.5}{t+1}\right)}{t} \mathrm{d}t \geqslant (0.135\ 513)(G(4)) + (0.164\ 87)(H(2.2)) + (0.058\ 75)(H(\tfrac{7}{3})) + (0.082\ 87)(H(2.5)) + (0.104\ 28)(H(2.7)) + (0.096\ 8)(H(2.9)) + (0.045\ 9)(H(3)) \tag{76}$$

由式⑬,⑪得

$$H(4.5) \geqslant \int_{3.5}^{4} \frac{G(t)}{t} \mathrm{d}t - \epsilon \geqslant \left(\log \frac{8}{7}\right)(G(4)) + \Delta \geqslant \left(\log \frac{8}{7}\right)(G(4)) + (0.002\ 13)(H(2.7)) + (0.005\ 84)(H(2.9)) + (0.004\ 09)(H(3)) \tag{77}$$

其中

$$\Delta = \int_{2.5}^{3} \frac{H(s)}{s} \mathrm{d}s \int_{3.5}^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} - 2\epsilon \geqslant \{H(2.7)\}\int_{2.5}^{2.7} \frac{2(s-2.5)}{s(s+4.5)} \mathrm{d}s + \{H(2.9)\}\int_{2.7}^{2.9} \frac{2(s-2.5)}{s(s+4.5)} \mathrm{d}s + \{H(3)\}\int_{2.9}^{3} \frac{2(s-2.5)}{s(s+4.5)} \mathrm{d}s$$

由式⑬,㉛,㉜及(77)得

$$2H(4.5) + 2H(4) + H(3.5) \geqslant (1.312\ 42)(G(4)) + (0.052\ 2)(H(2.2)) + (0.025\ 69)(H(\tfrac{7}{3})) + (0.039\ 36)(H(2.5)) + (0.060\ 14)(H(2.7)) + (0.075\ 04)(H(2.9)) + (0.042\ 14)(H(3)) \tag{78}$$

由式㊶有

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{\mathrm{d}v}{v(1-u-v)} = \int_{2.5}^{3.5} \frac{\log \frac{16t-8}{13t-8}}{t} \mathrm{d}t \geqslant 0.083\ 061 + \Delta \geqslant 0.086\ 18 \tag{79}$$

其中

$$\Delta = \int_{2.5}^{3.5} \frac{\log \frac{50t-25}{52t-32}}{t} dt \geqslant 2\int_{2.5}^{3.5} \frac{7-2t}{t(102t-57)} dt \geqslant 0.003\ 119$$

由式㊵有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3.5}} \frac{dv}{v(1-u-v)} = \int_{2.5}^{3} \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right) - \log(t-1)}{t} dt$$

我们有

$$\int_{2.5}^{3} \frac{\log\left(3-\frac{4}{t+1}\right)}{t} dt \geqslant \left(\log \frac{13}{7}\right)\left(\log \frac{6}{5}\right) + 2\int_{2.5}^{3} \frac{8t-20}{t(34t+6)} dt \geqslant$$
$$0.119\ 796\ 9$$

故由式㊷及㊸有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3.5}} \frac{dv}{v(1-u-v)} \geqslant 0.119\ 796\ 9 - 0.046\ 063\ 4 - 0.054\ 547\ 7 =$$
$$0.019\ 185\ 8$$

由式㊶有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{dv}{v(1-u-v)} = \int_{2.5}^{3} \frac{\log \frac{2.5-(3.5/(t+1))}{2-(3/(t+1))}}{t} dt =$$

$$\left(\log \frac{6.5}{5}\right)\left(\log \frac{6}{5}\right) + \int_{2.5}^{3} \frac{\log \frac{25t-10}{26t-13}}{t} dt \geqslant$$

$$(\log 1.3)(\log 1.2) + 2\int_{2.5}^{3} \frac{3-t}{t(51t-23)} dt \geqslant$$

$$0.048\ 669\ 9 \qquad ⑧①$$

由式⑦⑨～⑧①得

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{8}{21}} \frac{dv}{v(1-u-v)} + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3.5}} \frac{dv}{v(1-u-v)} +$$
$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3.5}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{3.5}}^{\frac{1}{3}} \frac{dv}{v(1-u-v)} \geqslant$$
$$0.086\ 18 + 0.019\ 185 + 0.048\ 669 \geqslant 0.154\ 034 \qquad ⑧②$$

我们有

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}} \frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)} dv =$$

$$\int_{\frac{117}{88}}^{\frac{19}{8}} \frac{H(s)}{s} ds \int_{\max\left(\frac{2}{9}, \frac{6}{11}-\frac{2s}{9}\right)}^{\min\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}-\frac{2s}{9}\right)} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} = \sum_{i=1}^{5} M_i$$

其中

$$M_1 = \int_{\frac{117}{88}}^{\frac{16}{11}} \frac{H(s)ds}{s} \int_{\frac{6}{11}-\frac{2s}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} \geqslant$$

$$\{H(2)\} \int_{\frac{117}{88}}^{\frac{16}{11}} \frac{4\left(\frac{2s}{9}+\frac{1}{4}-\frac{6}{11}\right)}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{s}{4.5}\right)} ds \geqslant$$

$$0.011\,274 H(2)$$

$$M_2 = \int_{\frac{16}{11}}^{2.2} \frac{H(s)ds}{s} \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} \geqslant$$

$$\{H(2.2)\} \int_{\frac{16}{11}}^{2.2} \frac{ds}{s\left(1-\frac{s}{4.5}\right)} \left\{\log\frac{9}{8} + \log\frac{\frac{7-2s}{9}}{\frac{27-8s}{(9)(4)}}\right\} =$$

$$\{H(2.2)\}\left\{(\log 1.2)\left(\log\frac{368.5}{184}\right) + \Delta\right\} \geqslant$$

$$(0.136\,45)(H(2.2))$$

而

$$\Delta = 2\int_{\frac{16}{11}}^{2.2} \left\{\frac{2s-3}{213-62s}\right\}\left\{\frac{ds}{s\left(1-\frac{s}{4.5}\right)}\right\} \geqslant 0.009\,83$$

$$M_3 = \int_{2.2}^{2.25} \frac{H(s)}{s} ds \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} \geqslant$$

$$\{H(2.25)\} \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{0.05du}{(2.2)u\left(\frac{23}{45}-u\right)} \geqslant$$

$$0.009\,73 H(2.25)$$

$$M_4 = \int_{2.25}^{\frac{7}{3}} \frac{H(s)ds}{s} \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}} \frac{du}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} \geqslant$$

$$\left\{H\left(\frac{7}{3}\right)\right\} \int_{2.25}^{\frac{7}{3}} \frac{4\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}-\frac{2}{9}\right)}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}\right)} ds \geqslant$$

$$0.011\,15 H\left(\frac{7}{3}\right)$$

$$M_5 = \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{19}{8}} \frac{H(s)\mathrm{d}s}{s} \int_{\frac{2}{9}}^{\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}} \frac{\mathrm{d}u}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} \geqslant$$

$$\left\{H\left(\frac{19}{8}\right)\right\} \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{19}{8}} \frac{3-\frac{8s}{9}-\frac{8}{9}}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}\right)}\mathrm{d}s \geqslant 0.001\,439 H\left(\frac{19}{8}\right)$$

因此

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}} \frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}\mathrm{d}v \geqslant 0.147\,724 H(2.2) +$$

$$(0.020\,88)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right) +$$

$$(0.001\,439)(H(2.5)) \qquad ⑧③$$

由式⑤①有

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3}} \frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}\mathrm{d}v = \int_{1.2}^{2.25} \frac{H(s)}{s}\mathrm{d}s \int_{\max\left(\frac{1}{4},\frac{3-s}{4.5}\right)}^{\min\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}-\frac{s}{9}\right)} \frac{\mathrm{d}u}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} \geqslant$$

$$\{H(2.2)\} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \int_{u}^{\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}v}{v(1-u-v)} - \Delta \geqslant$$

$$0.097\,991 H(2.2) + 0.000\,974 H\left(\frac{7}{4}\right) \qquad ⑧④$$

其中

$$\Delta = \int_{2.2}^{2.25} \frac{H(2.2)-H(2.25)}{s}\mathrm{d}s \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}-\frac{s}{9}} \frac{\mathrm{d}u}{u\left(1-u-\frac{s}{4.5}\right)} \leqslant$$

$$4\{H(2.2)-H(2.25)\} \int_{2.2}^{2.25} \frac{\frac{1}{4}-\frac{s}{9}}{s\left(\frac{3}{4}-\frac{2s}{9}\right)}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$0.000\,974\{H(2.2)-H(2.25)\}$$

我们有

$$\int_{3}^{3.5} \frac{\log\left(3.5-\frac{4.5}{t+1}\right)}{t}\mathrm{d}t \geqslant \left(\log\frac{19}{8}\right)\left(\log\frac{7}{6}\right) + 2\int_{3}^{3.5} \frac{9t-27}{t(47t+11)}\mathrm{d}t \geqslant$$

$$0.137\,38$$

$$\int_{3}^{3.5} \frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{3.25}\right)\left(\int_{2}^{2.5}\log t\,\mathrm{d}t + \int_{2}^{2.5} \frac{(2.25-t)\log t}{1+t}\mathrm{d}t\right) \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{3.25}\right)\{2.5\log 2.5 - 2\log 2 - 0.5 +$$

$$(\log 2)\left(-0.5+3.25\log\frac{3.5}{3}\right)+$$

$$2\int_2^{2.5}\frac{(2.25-t)(t-2)}{(1+t)(t+2)}\mathrm{d}t\Bigg\}\leqslant 0.124\ 247\ 4$$

由式㊵有

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}v}{v(1-u-v)}\geqslant 0.137\ 38-0.124\ 247\ 4=0.013\ 132\ 6 \qquad ㊽$$

由㊽得

$$\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}\mathrm{d}v\geqslant(0.013\ 132\ 6)(H(2.5)) \qquad ㊾$$

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{H\left(\frac{1-u-v}{u}\right)}{v(1-u-v)}\mathrm{d}v=\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_{\frac{3}{4}-u}^{1-2u}\frac{H\left(\frac{s}{u}\right)}{s(1-u-s)}\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_{\frac{3}{4u}-1}^{\frac{1}{u}-2}\frac{H(y)\mathrm{d}y}{uy\left(\frac{1}{u}-1-y\right)}\geqslant$$

$$\{H(2.2)\}\Delta+\{H(2.5)\}\left\{\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}v}{v(1-u-v)}-\Delta\right\}\geqslant$$

$$(0.003\ 02)(H(2.2))+(0.013\ 132\ 6-0.003\ 02)(H(2.5)) \qquad ㊿$$

其中

$$\Delta=\int_2^{2.2}\frac{\mathrm{d}y}{y}\int_{\frac{3}{4(y+1)}}^{\frac{1}{y+2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2\left(\frac{1}{u}-1-y\right)}\geqslant$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)\int_2^{2.2}\left(\frac{y+1}{y}\right)\left(\frac{1}{y+2}-\frac{3}{4(y+1)}\right)\mathrm{d}y\geqslant$$

$$0.003\ 02$$

由㊻,㊼,㊾,㊿得

$$\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{4.5}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_u^{\frac{1}{4}}\frac{H\left(\frac{1-u-v}{u}\right)+H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}\mathrm{d}v+$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_u^{\frac{1}{3}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}\mathrm{d}v+$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{2}{9}}^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}u}{u}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2.2}}\frac{H(4.5-4.5u-4.5v)}{v(1-u-v)}\mathrm{d}v\geqslant$$

$$(0.173\ 363)(H(2.2))+(0.011\ 41)\left(H\left(\frac{7}{3}\right)\right)+$$

$$(0.012\ 3)(H(2.5)) \qquad (88)$$

由 ㊿,(76),(78),(82),(88) 和 ㉚ 得

$$N_2 \geqslant (3.478\,48)(G(4)) + (0.691\,24)(H(2.2)) + (0.143\,55)(H(\frac{7}{3})) + (0.190\,47)(H(2.5)) + (0.226\,82)(H(2.7)) + (0.229\,78)(H(2.9)) + (0.115\,52)(H(3)) \geqslant (0.763\,28)(H(2.2)) + (0.162\,83)(H(\frac{7}{3})) + (0.216\,66)(H(2.5)) + (0.260\,69)(H(2.7)) + (0.265\,67)(H(2.9)) + (0.134\,07)(H(3)) \tag{89}$$

我们有

$$S_q^{(3)} \leqslant \sum_{i=1}^{3} M_q(i) \tag{90}$$

其中

$$M_q(1) = (\frac{1}{2})\Big\{ \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < q^{\frac{1}{3}} < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_2) + \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < q^{\frac{1}{3.5}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3}} < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, q^{\frac{1}{3}}) + \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < q^{\frac{8}{21}} < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, q^{\frac{8}{21}}) \Big\}$$

$$M_q(3) = (\frac{1}{2})\Big\{ \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{3}} < q^{\frac{8}{21}} < p_4 < p_5 < p_6 < p_7 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7, p_3) + \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4.4}} < q^{\frac{1}{4}} < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < q^{\frac{8}{21}} < p_4 < p_5 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_4) \Big\}$$

$$M_q(2) = (\frac{1}{2})\Big\{ \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < q^{\frac{1}{3.5}} < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{3}} < p_4 < p_5 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} \left(\left(\frac{9}{10}\right) \cdot P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_4) + \left(\frac{1}{10}\right) P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_3) \right) + \sum_{q^{\frac{1}{4.5}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{4}} < p_2 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < q^{\frac{1}{3}} < p_3 \leqslant q^{\frac{8}{21}} < p_4 < p_5 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_3) \Big\}$$

我们有

$$S_q^{(4)} \leqslant \sum_{i=4}^{8} M_q(i) \tag{91}$$

其中

$$M_q(4) = \sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 \leqslant q^{\frac{1}{3.5}} < q^{\frac{1}{3}} < p_2 < p_3 \leqslant q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_2) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 \le q^{\frac{1}{3}} < p_2 < p_3 \le q^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_2) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 \le q^{\frac{1}{3}} < p_2 \le q^{\frac{8}{21}} < p_3 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_2) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 \le q^{\frac{1}{3.5}} < p_2 \le q^{\frac{1}{3}} < p_3 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, \underline{q}^{\frac{1}{3}}) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 < p_2 \le q^{\frac{1}{3}} < p_3 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, \underline{q}^{\frac{1}{3}}) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 \le q^{\frac{1}{3.5}} < q^{\frac{8}{21}} < p_3 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3, \underline{q}^{\frac{1}{3}}) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 < p_2 < p_3 \le q^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2p_3, p_2)$$

$$M_q(5) = \sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 < p_2 < p_3 \le q^{\frac{1}{3}} < p_4 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, \underline{q}^{\frac{1}{3}}) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 \le q^{\frac{1}{3.5}} < p_2 < p_3 \le q^{\frac{1}{3}} < p_4 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, \underline{q}^{\frac{1}{3}})$$

$$M_q(6) = \sum_{q^{\frac{1}{3}} < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 \le q^{\frac{8}{21}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3}} < p_1 < p_2 < p_3 \le q^{\frac{8}{21}} < p \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3)$$

$$M_q(7) = \sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 \le q^{\frac{1}{3}} < q^{\frac{8}{21}} < p_2 < p_3 < p_4 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3.5}} < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 \le q^{\frac{1}{3}} < p_5 < p_6 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5p_6, p_3) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 \le q^{\frac{1}{3.5}} < p_2 < p_3 < p_4 \le q^{\frac{1}{3}} < p_5 \le p_6 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5p_6, p_4) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 \le q^{\frac{1}{3.5}} < p_3 < q^{\frac{1}{3}} < q^{\frac{8}{21}} < p_4 < p_5 \le q^{\frac{1}{2.2}}} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right) P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, \underline{q}^{\frac{1}{3}}) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{6}\right) P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_3) \right\} +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{4}} < p_1 < p_2 < p_3 \le q^{\frac{1}{3.5}} < q^{\frac{8}{21}} < p_4 < p_5 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_5, p_3) +$$

$$\sum_{q^{\frac{1}{3}} < p_1 < p_2 \le q^{\frac{8}{21}} < p_3 < p_4 < q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4, p_3)$$

$$M_q(8) = \sum_{q^{\frac{8}{21}} < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5p_6, p_5) + \sum_{q^{\frac{1}{3}} < p_1 \le q^{\frac{8}{21}} < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 \le q^{\frac{1}{2.2}}} P(x, qp_1p_2p_3p_4p_5, p_4)$$

由 $Z_1(t) \leqslant \frac{1}{1.763}$(当 $t \geqslant 1.763$ 时),(4.4)$(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2.2}) > 1.77$,式⑭及式㊲～㊴得

$$\sum_{q \in Q_i}(M_q(1) + M_q(4)) \leqslant \frac{4x^{1-a_i}C_x}{1.763\log x}\Big(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\Big)\Big\{\Big(\log\frac{9}{8}\Big)\Big(-0.8 + 3\log\frac{15}{11} + 3\Big(\log\frac{7}{6}\Big)\Big(\log\frac{15}{11}\Big) + \Big(\frac{21}{8}\Big)\Big(\log\frac{8}{7}\Big)\Big(\log\frac{21}{17.6}\Big)\Big) + \Big(\log\frac{8}{7}\Big)\Big(6\log\frac{15}{11} - 1.6 + 6\Big(\log\frac{7}{6}\Big)\Big(\log\frac{15}{11}\Big)\Big) + \Big(\log\frac{7}{6}\Big)\Big(-0.75 + 6\log\frac{8}{7} + 0.75\log\frac{21}{17.6}\Big) + 3\Big(\log\frac{15}{11}\Big)\Big(\log\frac{7}{6}\Big)^2 + 3\Big(\log\frac{8}{7}\Big)^2\Big(\log\frac{21}{17.6}\Big) + 10.5 - 14 + \Big(7 + \frac{21}{4}\Big)\Big(\log\frac{4}{3}\Big)\Big\} \leqslant \Big(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\Big)\Big(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.111\,571}{\log q}\Big)$$

这里 $i = 1$ 或 $i = 2$. 对于 $i = 1$ 或 $i = 2$,我们有

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(2) \leqslant \Big(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\Big)\Big(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\log\frac{9}{8}\Big)\Big\{\Big(\log\frac{7}{6}\Big)^2\Big(\frac{9}{10}\Big) \times \Big(-0.8 + 3\log\frac{15}{11}\Big) + \Big(\log\frac{15}{11}\Big)^2\Big(\frac{1}{10}\Big)\Big(0.5 - 3\log\frac{7}{6}\Big) + \Big(\log\frac{8}{7}\Big)\Big(\log\frac{21}{17.6}\Big)^2\Big(3 - \frac{21}{8}\Big)\Big\} \leqslant \Big(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\Big)\Big(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.000\,278}{\log q}\Big)$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(5) \leqslant \Big(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\Big)\Big(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\Big)\Big\{\Big(\frac{1}{1.636}\Big)\Big(\log\frac{7}{6}\Big)^3\Big(\log\frac{2.45}{2.2}\Big) + \Big(\frac{1}{1.763}\Big)\Big(\log\frac{7}{6}\Big)^3\Big(\log\frac{3}{2.45}\Big) + \Big(\frac{3}{1.763}\Big)\Big(\log\frac{8}{7}\Big)\Big(\log\frac{7}{6}\Big)^2\Big(\log\frac{15}{11}\Big)\Big\} \leqslant \Big(\frac{4x^{1-a_i}C_x}{\log x}\Big)\Big(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.002\,337}{\log q}\Big)$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(6) \leqslant \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\right)\left\{\left(\frac{2}{1.25}\right)\left(3\left(\frac{21}{8}-3\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left(3+\frac{21}{4}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)+\left(\frac{21}{16}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\right)+$$

$$\left.\left(\frac{2\log\frac{21}{17.6}}{1.056}\right)\left(3-\frac{21}{8}-\frac{21}{8}\log\frac{8}{7}-\left(\frac{21}{16}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\right)\right\}\leqslant$$

$$\left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.000\,42}{\log q}\right)$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(7) \leqslant \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\right)\left\{2\left(\log\frac{7}{6}\right)\left(2\left(2.2-\frac{21}{8}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left(2.2+\frac{21}{8}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)\right)+\left(\log\frac{15}{11}\right)^2\left(3(3-3.5)+\right.$$

$$\left.(3.5+6)\left(\log\frac{7}{6}\right)+1.5\left(\log\frac{7}{6}\right)^2\right)+$$

$$\left(\log\frac{8}{7}\right)\left(\log\frac{15}{11}\right)^2\left(3.5-3-3\log\frac{7}{6}-1.5\left(\log\frac{7}{6}\right)^2\right)+$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^2\left(2.5\log\frac{7}{6}+\frac{0.5}{6}\right)+$$

$$\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^2\left(0.5-3.5\log\frac{8}{7}-1.75\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\right)+$$

$$\left.\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\left(2.2-\frac{21}{8}+\frac{21}{8}\log\frac{21}{17.6}\right)\right\}\leqslant$$

$$\left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.001\,579}{\log q}\right)$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(3) \leqslant \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\right)\left\{\left(\log\frac{9}{8}\right)\left(1-3\log\frac{4}{3}\right)\times\right.$$

$$\left(\frac{1}{24}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^4+\left(\log\frac{45}{44}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\log\frac{8}{7}\right)^2\times$$

$$\left.\left(2.2-\frac{21}{8}+\frac{21}{8}\log\frac{21}{17.6}\right)\right\}\leqslant$$

$$\left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.000\,009}{\log q}\right)$$

$$\sum_{q\in Q_i} M_q(8) \leqslant \left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\right)\left\{\left(\frac{21}{8}\right)\left(\frac{1}{360}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^6+\right.$$

$$2\left(\log\frac{8}{7}\right)\left(6.6-\frac{63}{8}+\left(4.4+\frac{21}{8}\right)\left(\log\frac{21}{17.6}\right)+\right.$$

$$\left.\left.1.1\left(\log\frac{21}{17.6}\right)^2\right)\right\}\leqslant\left(\frac{4x^{1-\alpha_i}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.000\,026}{\log q}\right)$$

对 $i=1$ 或 $i=2$ 由式⑩,⑪有

$$\sum_{q\in Q_i}(S_q^{(3)}+S_q^{(4)})\leqslant\left(\frac{4x^{1-\alpha}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{0.116\ 22}{\log q}\right) \qquad ⑫$$

由⑭,⑱,⑪,⑲及⑫,得

$$5\sum_{q\in Q_i}(x,q,q^{\frac{1}{2.2}})\leqslant\left(\frac{4x^{1-\alpha}C_x}{\log x}\right)\left(\sum_{q\in Q_i}\frac{1}{\log q}\right)(5-0.075\ 762-$$
$$(0.763\ 28)(H(2.2))-(0.162\ 83)(H\frac{7}{3}))-$$
$$(0.216\ 66)(H(2.5))-(0.260\ 69)(H(2.7))-$$
$$(0.265\ 67)(H(2.9))-(0.134\ 07)(H(3))$$

因此

$$H(2.2)\geqslant 0.015\ 152\ 4+(0.152\ 65)(H(2.2))+(0.032\ 56)(H(\frac{7}{3}))+$$
$$(0.043\ 33)(H(2.5))+(0.052\ 13)(H(2.7))+$$
$$(0.053\ 13)(H(2.9))+(0.026\ 81)(H(3))$$

$$H(2.2)\geqslant 0.017\ 882+(0.034\ 82)(H(\frac{7}{3}))+(0.051\ 13)(H(2.5))+$$
$$(0.061\ 52)(H(2.7))+(0.062\ 7)(H(2.9))+$$
$$(0.031\ 63)(H(3)) \qquad ⑬$$

由式⑬,㉛,㉜和⑪得

$$H(3)\geqslant\int_2^4\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t-\epsilon\geqslant\left(\log\frac{4}{2.5}\right)(G(4))+(0.046\ 1)(H(2.2))+$$
$$(0.015\ 711)(H(\frac{7}{3}))+(0.021\ 5)(H(2.5))+(0.027\ 98)(H(2.7))+$$
$$(0.029\ 8)(H(2.9))+(0.015\ 44)(H(3))+\Delta\geqslant$$
$$|G(4)|(\log 2)+(0.175\ 13)(H(2.2))+(0.028\ 84)(H(\frac{7}{3}))+$$
$$(0.036\ 89)(H(2.5))+(0.045\ 15)(H(2.7))+$$
$$(0.045\ 74)(H(2.9))+(0.023)(H(3))$$

其中

$$\Delta=\int_2^{2.5}\frac{G(t)}{t}\mathrm{d}t-\epsilon\geqslant\int_2^{2.5}\left(G(4)+\int_{t-1}^3\frac{H(s)}{s}\mathrm{d}s\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)-2\epsilon\geqslant$$
$$|G(4)|\left(\log\frac{2.5}{2}\right)+\int_2^{2.5}\frac{\mathrm{d}t}{t}\int_{1.5}^3\frac{H(s)}{s}\mathrm{d}s+$$
$$|H(2.2)|\int_2^{2.5}\frac{\log\frac{1.5}{t-1}}{t}\mathrm{d}t-2\epsilon\geqslant$$
$$\left(\log\frac{2.5}{3}\right)(G(4))+(H(2.2))(0.085\ 462+0.043\ 576)+$$

$$(0.013\ 129)(H(\frac{7}{3}))+(0.015\ 395)(H(2.5))+$$
$$(0.017\ 173)(H(2.7))+(0.015\ 945)(H(2.9))+$$
$$(0.007\ 56)(H(3))$$

由式㊵有

$$H(3)\geqslant(0.189\ 51)(H(2.2))+(0.032\ 68)(H(\frac{7}{3}))+(0.042\ 1)(H(2.5))+$$
$$(0.051\ 9)(H(2.7))+(0.052\ 89)(H(2.9))+(0.026\ 69)(H(3))$$

$$H(3)\geqslant(0.194\ 7)(H(2.2))+(0.033\ 57)H(\frac{7}{3}))+(0.043\ 25)(H(2.5))+$$
$$(0.053\ 32)(H(2.7))+(0.054\ 34)(H(2.9)) \qquad ㊿$$

由㊾,㊿及引理3与引理4,我们有

$$H(2.2)\geqslant 0.019\ 326+(0.047\ 68)(H(2.2))+(0.007\ 25)(H(\frac{7}{3}))+$$
$$(0.008\ 62)(H(2.5))+(0.010\ 11)(H(2.7))+$$
$$(0.010\ 28)(H(2.9))+(0.006\ 08)(H(3))$$

$$H(2.2)\geqslant 0.020\ 293+(0.007\ 61)(H(\frac{7}{3}))+(0.009\ 05)(H(2.5))+$$
$$(0.010\ 616)(H(2.7))+(0.010\ 794)(H(2.9))+$$
$$(0.006\ 38)(H(3))$$

由式㊿,引理3及引理4有

$$H(2.2)\geqslant 0.020\ 558+0.008\ 6H(2.2)$$

及

$$H(2.2)\geqslant 0.020\ 73$$

因此在注释①中我们有 $E(x)\leqslant x^{0.989}$.此即完成定理1的证明.

编者注 此论文审稿人是著名数论专家闵嗣鹤.他在肯定论文的正确以后,曾对陈景润说:"去年人家证明(1+3)是用大型高速计算机,你证(1+2)全靠自己笔算,难怪写得太长."于是劝他删繁就简.

5 一个新的均值定理及其应用

——潘承洞

5.1 导 引

命

① Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith., 1975, 27: 353-370.

$$\pi(X;d,l)=\sum_{\substack{p\geqslant X\\ p\equiv l(\bmod d)}}1$$

在 1948 年,瑞尼证明了下面的定理:

定理 1 对于任意正数 A,皆存在正数 η 使

$$R(x^{\eta}:x)=\sum_{d\leqslant X\eta\leqslant X(l\cdot d)=1}\max\max\left|\pi(y;d,l)-\frac{\pi(y;1,1)}{\phi(d)}\right|\ll\frac{x}{\log^{A}x}$$

此处 $\phi(d)$ 表示欧拉函数.

确切地说,瑞尼的结果是对于一个加权和来证明的,但消除加权与否并不影响对主要问题的应用.

由此,他证明了下面的命题:

每个大偶数为一个素数及一个素因子个数不超过 C 的殆素数之和.

为简单计,我们将上面的命题记为$(1,C)$,瑞尼并未给出 η 与 C 的定量估计,但用其方法,,我们可以说 η 是非常小而 C 是非常大的.

巴尔巴恩在 1961 年与笔者在 1962 年独立地证明了定理 1 对于 $\eta<1/6$ 与 $\eta<1/3$ 成立.用 $\eta<1/3$,笔者首先证明了定量结果(1,5).1962 年王元仅用 $\eta<1/3$ 证明了(1,4).笔者于1962年及巴尔巴恩于1963年独立地证明了定理1对于 $\eta<3/8$ 成立,从而不需复杂的数值计算即推出(1,4).1965 年布赫夕塔布用 $\eta<3/8$ 证明了(1,3).

1965 年,维诺格拉多夫与朋比尼①独立地证明了定理 1 对于 $\eta<\frac{1}{2}$ 成立.

确切地说,朋比尼证明了下面的重要定理:

定理 2(朋比尼) 对于任何 $A>0$ 皆有

$$\sum_{d\leqslant x^{1/2}\log^{-B_1}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\pi(y;d,l)-\frac{\pi(y;1,1)}{\phi(d)}\right|\ll x\log^{-A}x$$

此处 $B_1=3A+23$.

不需太多的数值计算,即可由此推出(1,3).

1975 年,丁夏畦与笔者证明了下面新的均值定理:

定理 3 命

$$\pi(X;a,d,l)=\sum_{\substack{ap\leqslant x\\ ap\equiv l(\bmod d)}}1$$

及命 $f(a)$ 为一个实函数,$f(a)\ll 1$;则对于任意 $A>0$ 皆有

$$\sum_{d\leqslant x^{1/2}\log^{-B_2}x}\max_{y\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\ (a,d)=1}}f(a)\left(\pi(y;a,d,l)-\frac{\pi(y;a,1,1)}{\phi(d)}\right)\right|\ll\frac{x}{\log^{A}x}$$

此处,$B_2=\frac{3}{2}A+17$ 及 $0<\varepsilon<1$.

① Bombier E. On the large Sieve. Mathematika. 1965, 12:201-225.

置

$$f(a)=\begin{cases}1, a=1\\0, a>1\end{cases}$$

则

$$\sum_{a\leqslant x^{1-\epsilon}} f(a)\left(\pi(y;a,d,l)-\frac{\pi(y;a,1,1)}{\phi(d)}\right)=\pi(y;d,l)-\frac{\pi(y;1,1)}{\phi(d)}$$

所以定理 3 为定理 2 的推广，但其兴趣并不在于推广而在于应用. 我们将在 5.3 给出若干应用的例子.

5.2　定理 3 的证明

为了证明定理 3，我们列举一些熟知的引理.

引理 1　对于任何复数 a_n，我们有

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\ll(Q^2+n)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

及

$$\sum_{H<q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2\ll\left(Q+\frac{N}{H}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

此处星号表示过 mod q 的所有原特征求和.

引理 2　若 $T\geqslant 2$ 及 $\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\leqslant 1/(200\log qT)$，则

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|^4\mathrm{d}t\ll\phi(q)T\log^4 qT$$

及

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{-T}^{T}|L'(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|^4\mathrm{d}t\ll\phi(q)T\log^8 qT$$

命

$$\Psi(x;a,d,l)=\sum_{\substack{an\leqslant x\\an\equiv l(\mathrm{mod}\ d)}}\Lambda(n)$$

及

$$R(D;x,f)=\sum_{d\leqslant y}\max_{y\leqslant X}\max_{(l,d)=1}\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\epsilon}\\(a,d)=1}}f(a)\left(\psi(y;a,d,l)-\frac{\psi(y;a,1,1)}{\phi(d)}\right)\right|$$

此处

$$D=x^{\frac{1}{2}}\log^{-B_2}x,\quad B_2=\frac{3}{2}A+17$$

对于 $(a,d)=(l,d)=1$，我们有

$$\psi(y;a,d,l)=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\sum_{\chi_d}\chi(an)\overline{\chi}(l)\chi(n)=\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\chi_d^0(n)\Lambda(n)+$$

$$\frac{1}{\phi(d)}\sum_{\chi_d\neq\chi_d^0}\bar{\chi}(l)\chi(a)\sum_{an\leqslant y}\chi(n)\Lambda(n)=$$

$$\frac{1}{\phi(d)}\sum_{an\leqslant y}\Lambda(n)+\frac{1}{\phi(d)}\sum_{1<q/d}\sum_{\chi d}{}^{*}\chi_d^0(l)\cdot$$

$$\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,d)=1}}\chi(n)\Lambda(n)+O\left(\frac{\log d\log y}{\phi(d)}\right)$$

由此可得

$$R(D;x,f)\leqslant\sum_{d\leqslant D}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{1<q|d}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi q}{}^{*}\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,d)=1}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,d)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|+$$

$$O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)\leqslant\log x\max_{m\leqslant D}\sum_{1<q\leqslant D}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\cdot$$

$$\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,m)=1}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{a\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)\qquad ①$$

命 h 为任意固定数及 $D_1=\log^h x$，由 ① 及西格尔 - 瓦尔菲茨定理可知

$$R(D,x,f)\leqslant\log x\max_{m\leqslant D}\sum_{D_1<q\leqslant D}\frac{1}{\phi(q)}\cdot$$

$$\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{\substack{a\leqslant x^{1-\varepsilon}\\(a,m)=1}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|+O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)\qquad ②$$

命 $D_1\leqslant Q\leqslant 2D_1$，$Q<Q'\leqslant 2Q_1$ 及命(q) 表示区间 $Q<q\leqslant Q'$.

命$\frac{1}{2}\leqslant E\leqslant X^{1-\varepsilon}$，$E<E'\leqslant 2E$ 及命(a) 表示区间 $E<a\leqslant E'$.

命

$$\mathrm{Im}(Q,E)=\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{\substack{(a)\\(a,m)=1}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{an\leqslant y\\(n,m)=1}}\Lambda(n)\chi(n)\right|$$

假定

$$\mathrm{Im}(Q,E)\ll\frac{x}{\log^{A+3}x}\qquad ③$$

则显然得到定理 3.

为了方便起见，命

$$f^{(m)}(a)=\begin{cases}f(a), & (m,a)=1\\ 0, & (m,a)>1\end{cases}$$

$$d_E^{(m)}(n)=\Lambda(n),\quad E\geqslant D_1^2$$

$$d_E^{(m)}(n)=\begin{cases}\Lambda(n), & (n,m)=1\\ 0, & (n,m)>1\end{cases}\quad E>D_1^2$$

及命

$$\mathrm{Im}'(Q,E)=\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{(a)}f^{(m)}(a)\chi(a)\sum_{an\leqslant y}d_E^{(m)}(n)\chi(n)\right|$$

则得

$$\mathrm{Im}'(Q,E)=\mathrm{Im}'(Q,E)+O\left(\frac{x}{\log^{A+3}x}\right) \qquad ④$$

由佩龙(Perron)公式得

$$\mathrm{Im}'(Q,E)\ll\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}f_E^{(m)}(s,\chi)d_E^{(m)}(s,\chi)\frac{y^3}{s}\mathrm{d}s\right|+ O\left(\frac{x}{\log^{A+3}x}\right) \qquad ⑤$$

此处

$$s=\sigma+\mathrm{i}t,b=1+\frac{1}{\log x},T=x^{10}$$

$$d_E^{(m)}(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-s},\quad \sigma>1$$

$$f_E^{(m)}(s,\chi)=\sum_{(a)}f^{(m)}(a)\chi(a)a^{-s}$$

引理3 若 $E\leqslant D_1$,则

$$\mathrm{Im}'(Q,E)\ll xD_1^{-1}\log^{13}x+x^{\frac{1}{2}}DD_1^{\frac{1}{2}}\log^6 x \qquad ⑥$$

证明 命 $M_1=QD_1$ 及

$$H(s,\chi)=\sum_{n\leqslant M_1}\mu(n)\chi(n)n^{-s}$$

为简单计,命 G,F,H 与表示 $d_E^{(m)}(s,\chi),f_E^{(m)}(s,\chi)$ 与 $H(s,\chi)$,则

$$FG=FG(1-LH)+FGLH=FG(1-LH)-FL'H \qquad ⑦$$

我们有

$$FG=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\chi(n)n^{-3}=F_1+F_2 \qquad ⑧$$

此处

$$F_1=\sum_{n\leqslant M_1}a(n)\chi(n)n^{-3}$$

$$F_2=\sum_{n>M_1}a(n)\chi(n)n^{-3} \qquad ⑨$$

其中

$$a(n)=\sum_{l\mid n}d_E^{(m)}(l)f^{(m)}\left(\frac{n}{l}\right)$$

可 ⑦,⑧,⑨ 可得

$$\int_{b-\mathrm{i}T}^{b+\mathrm{i}T}FG\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s=\int_{(b,T)}FG\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s=\int_{(b,T)}F_2(1-LH)\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s+$$

$$\int_{(\frac{1}{2},T)}(F_1 - F_1LH - FL'H)\frac{\gamma^s}{s}\mathrm{d}s + O(x^{-1})$$

由此及许瓦尔兹不等式得

$$\mathrm{Im}'(Q,E) \ll x\log x \max_{\mathrm{Re}\, s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|F_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\max_{\mathrm{Re}\, s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|1-LH|^2\Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$x^{\frac{1}{2}}\log xQ^{\frac{1}{2}}\max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|F_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{4}}x\max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|F_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|H|^4\Big)^{\frac{1}{4}}\cdot$$

$$\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{(\frac{1}{2},T)}\frac{|L|^4}{|s|}\,|\mathrm{d}s|\Big)^{\frac{1}{4}} +$$

$$x^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{3}{4}}x\max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|F|^2\Big)\cdot$$

$$\max_{\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|H|^4\Big)^{\frac{1}{4}}\cdot$$

$$\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\int_{(\frac{1}{2},T)}\frac{|L'|^4}{|s|}\,|\mathrm{d}s|\Big)^{\frac{1}{4}} \qquad ⑩$$

用引理 1 与引理 2 估计 ⑩ 的每一项,我们立刻得式 ⑥.

引理 4 若 $E > D_1^2$,则

$$\mathrm{Im}'(Q,E) \ll xD_1^{-1}\log^4 x + x^{\frac{1}{2}}D\log^2 x \qquad ⑪$$

证明 当 $\mathrm{Re}\, s = b = 1 + 1/(\log x)$ 时,取 $M_2 = Q^2$,则

$$G = d_E^{(m)}(s,\chi) = G_1 + G_2$$

$$G_1 = \sum_{n\le M_2} d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-3}$$

$$G_2 = \sum_{n> M_2} d_E^{(m)}(n)\chi(n)n^{-3}$$

及

$$\int_{(b,T)}FG\frac{\gamma^s}{s}\mathrm{d}s = \int_{(b,T)}FG_3\frac{\gamma^s}{s}\mathrm{d}s + \int_{(\frac{1}{2},T)}FG_1\frac{\gamma^s}{s}\mathrm{d}s + O(X^{-1})$$

由此及许瓦尔兹不等式得

$$\operatorname{Im}'(Q,E) \ll x\log x \max_{\operatorname{Re} s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|G_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\max_{\operatorname{Re} s=b}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|G|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\log x\cdot$$

$$\max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|G_1|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\max_{\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}}\Big(\sum_{(q)}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}|F|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad ⑫$$

类似地,由引理 1 与引理 2 估计 ⑫ 的每一项,则立刻得 ⑪.

在 ⑥,⑪ 与 ④ 中取 $h = A + 16$,则得 ③,定理 3 证完.

注　若 $f(a)$ 满足

$$\sum_{n\leqslant x}|f(n)| \ll x\log^{\lambda_1}x,\ \sum_{n\leqslant x}\sum_{d\mid n}|f(d)| \ll x\log^{\lambda_2}x \qquad (\triangle)$$

此处 λ_1,λ_2 为正常数,则定理 3 仍成立($B_2 \geqslant q(A_1\lambda_1,\lambda_2)$).

5.3　应　　用

(1) 用于结果(1,2).

1966年与1973年,陈景润给出了一个新的加权筛法并证明了(1,2),陈景润的主要贡献在于他指出证明(1,2) 的关键在于估计

$$\Omega = \sum_{\substack{(p_{1,2})\\ p_3\leqslant \frac{N}{Np_1p_2}\\ N-p=p_1p_2p_3}} 1$$

此处 N 为一个大偶数,及$(p_{1,2})$表示条件 $N^{\frac{1}{10}} < p_1 < N^{1/3} \leqslant p_2 \leqslant (N/p_1)^{1/2}$;而且他首先建议了一个估计 Ω 的方法,1975 年,我们指出陈景润的加权筛法需估计者即定理 3.

命 $P = \prod\limits_{\substack{2<p\leqslant N^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}\\ p\nmid N}} p$,则得

$$\Omega \leqslant \sum_{(p_{1,2})}\sum_{\substack{p\leqslant\frac{N}{p_1p_2}\\ (N-p_1p_2p_3,p)=1}}\Big|\sum_{d\mid(N-p_1p_2p_3,p)}\lambda_d\Big|^2 + O(N^{\frac{1}{4}})$$

此处 λ_d 为塞尔贝格函数($\lambda_d = 0, d > N^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}$),因此

$$\Omega \leqslant \sum_{d_1\mid p}\sum_{d_2\mid p}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{(p_{1,2})}\pi(N;p_1p_2,[d_1,d_2],N) + O(N^{\frac{1}{4}}) \leqslant$$

$$\sum_{(p_{1,2})}\sum_{d_1|p}\sum_{d_2|p}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\pi(N;p_1p_2,1,1)}{\phi([d_1,d_2])}+$$
$$O\Big(\sum_{d\le N^{\frac{1}{2}-\epsilon}}|\mu(d)|3^{\omega(d)}\Big|\sum_{\substack{(p_{1,2})\\(p_1p_2,d)=1}}\Big(\pi(N;p_1p_2,d,N)-$$
$$\frac{\pi(N;p_1p_2,1,1)}{\phi(d)}\Big)\Big|\Big)+O(N^{\frac{1}{4}})\le$$
$$\sum_{(p_{1,2})}\sum_{d_1|p}\sum_{d_2|p}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\pi(N;p_1p_2,1,1)}{\phi([d_1,d_2])}+$$
$$O\Big(\sum_{d\le N^{\frac{1}{2}-\epsilon}}|\mu(d)|3^{\omega(d)}\Big|\sum_{N^{\frac{13}{20}}<a\le N^{\frac{2}{3}}}f(a)\Big(\pi(N;a,d,N)-$$
$$\frac{\pi(N;a,1,1)}{\phi(d)}\Big)\Big|\Big)+O(N^{\frac{1}{4}})$$

此处

$$f(a)=\begin{cases}1, a=p_1p_2, N^{\frac{1}{10}}<p_1\le N^{\frac{1}{3}}\le p_2\le\left(\frac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\0,\text{其他情形}\end{cases}$$

所以由定理 3 可知

$$\Omega\le\text{主项}+O(N/\log^3N)$$

(2)$D(N)$ 的上界.

命

$$D(N)=\sum_{N=p_1+p_2}1$$

在 1949 年,塞尔贝格证明了

$$D(N)\le 16(1+O(1)G(N))\frac{N}{\log^2N}$$

此处

$$G(N)=\prod_{p|N}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

在 1964 年,应用定理 1,其中 $\eta<1/3$,笔者将 16 改进为 12. 直到 1978 年,最佳结果均为 1966 年朋比尼与德文坡特改进的系数 8.

欲改进系数 8 是很困难的. 1978 年,陈景润将系数 8 改进为 7.834 2,但他的证明很复杂,最近潘承彪给了陈景润结果一个简化证明,他证明了

$$D(N)\le 7.928G(N)\frac{N}{\log^2N}$$

笔者现在来概要给出证明的主要步骤.

命 $B=\{b=N-p,p<N\}$,易见

$$D(N) \leqslant S(B,P,N^{\frac{1}{5}}) + O(N^{\frac{1}{5}}) \tag{13}$$

此处

$$S(B,P,z) = \sum_{\substack{b\in B\\(b,p(z))=1}} 1$$

及

$$P = \{p \mid p \nmid N\}, \quad P(z) = \prod \sum_{\substack{p\in P\\p<z}} p$$

由布赫夕塔布恒等式

$$S(B;P,z) = S(B;P,\omega) - \sum_{\substack{\omega\leqslant p<z\\p\in P}} S(B_p,P,p) \tag{14}$$

此处 $z \geqslant \omega \geqslant 2$ 及 $B_d = \{b \in B, d \mid b\}$,易于证明

$$S(B;P,N^{\frac{1}{5}}) \leqslant S(B;P,N^{\frac{1}{7}}) - \frac{1}{2}\Omega_1 + \frac{1}{2}\Omega_2 + O(N^{\frac{6}{7}}) \tag{15}$$

此处

$$\Omega_1 = \sum_{N^{1/7}\leqslant p_1<N^{1/5}} S(B_{p_1};P,N^{\frac{1}{7}}) \tag{16}$$

$$\Omega_2 = \sum_{N^{1/7}\leqslant p_2<p_3<p_1<N^{1/5}} S(B_{p_1p_2p_3};P,p_3) \tag{17}$$

由朱尔凯特 - 黎切尔特定理及朋比尼定理得

$$S(B;P,N^{\frac{1}{7}}) - \frac{1}{2}\Omega_1 \leqslant 8(1+O(1))G(N)\frac{N}{\log^2 N}\left[1 + \int_{1.5}^{2.5}\frac{\log(t-1)}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{1.5}^{2.5}\frac{\log(2.5-3.5/(t+1))}{t}\mathrm{d}t\right] \tag{18}$$

因为 $\max p_1p_2p_3 \geqslant N^{1/2}$,所以我们不能用同样方法估计 Ω_2 的上界.

为了估计 Ω_2,我们考虑集合

$$L = \left\{l = N - (np_2p_3)p_1; N^{\frac{1}{7}} \leqslant p_2 < p_3 < N^{\frac{1}{5}}, 1 \leqslant n \leqslant \frac{N}{p_2p_3^2},\right.$$
$$\left.\left(n, \frac{p(p_1)}{p_2}\right) = 1, p_3 < p_1 < \min\left(N^{\frac{1}{5}}, \frac{N}{np_2p_3}\right)\right\}$$

易知

$$\Omega_2 \leqslant \sum_{p\in L} 1$$

所以

$$\Omega_2 \leqslant S(L;P,N^{\frac{1}{4}-\varepsilon}) + O(N^{\frac{6}{7}}) \tag{19}$$

当我们用最简单的塞尔贝格上界筛法来估计 $S(L;P,N^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$ 时,误差正好可以用定理 3 来估计,而不是定理 2,故得

$$S(L;P,N^{\frac{1}{4}-\varepsilon}) \leqslant 8(1+O(1))G(N)\frac{X}{\log N} \qquad ⑳$$

此处

$$X = \sum_{N^{1/7}\leqslant p_2<p_3<p_1<N^{1/5}} \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant \frac{N}{p_1p_2p_3} \\ (n,P(p_3))=1}} \qquad ㉑$$

由布赫夕塔布渐近公式

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant y \\ (n,p(y^{\frac{1}{u}}))=1}} 1 = \frac{y}{\log y^{1/u}}\omega(u) + O\left(\frac{y}{(\log y^{\frac{1}{u}})^2}\right) \qquad ㉒$$

$$\begin{cases} \omega(u) = \dfrac{1}{u}, & 1\leqslant u<2 \\ (u\omega(u))' = \omega(u-1), & u>2 \end{cases}$$

我们得

$$\omega(u) < \frac{1}{1.763}, \quad u\geqslant 2$$

由此及㉒可得

$$X < \frac{4}{1.763}\left(3\log\frac{7}{5}-1\right)(1+O(1))\frac{N}{\log N} \qquad ㉓$$

由㉓,⑳,⑲,⑱及⑮得

$$S(B;P,N^{\frac{1}{5}}) < 7.928G(N)\frac{N}{\log^2 N} \qquad ㉔$$

由此及⑬得

$$D(N) < 7.928G(N)\frac{N}{\log^2 N}$$

(3) 梯其玛奇除数问题的一个推广.

熟知由定理 2 可得渐近公式

$$\sum_{p\leqslant x} d(p-1) \sim C_1 x$$

此处 $d(n)$ 表示除数函数及 C_1 为一个正常数,运用新中值公式可得下面的结果:

命 $1\leqslant y\leqslant x^{1-\varepsilon}(0<\varepsilon<1)$,及命 $f(a)$ 为一个满足条件(△)的实函数,则

$$\sum_{\substack{ap\leqslant x \\ a\leqslant y}} f(a)d(ap-1) \sim 2x\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\phi(d)}\sum_{a\leqslant y}\frac{f(a)}{a\log(x/a)}$$

置

$$f(a) = \begin{cases} 1, & a=1 \\ 0, & a>1 \end{cases}$$

则得

$$\sum_{p \leqslant x} d(p-1) \sim C_1 x$$

(4) $p + a$ 的最大素因子.

命 P_x 为 $\prod\limits_{0<p+a<x}(p+a)$ 的最大素因子,此处 a 为一个非零整数.

1973 年,霍勒证明了当 $\theta < 5/8$ 时有 $P_x > x^{\theta}$,证明的关键在于估计和

$$V(y) = \sum_{\substack{p+a=kq \\ p \leqslant x-a \\ y<q \leqslant ry}} \log q \qquad ㉕$$

此处 q 表示素数及 $x^{1/2} < y < x^{3/4}, 1 < r < 2$.

利用塞尔贝格筛法,我们可将估计 ㉕ 化为估计下面的和

$$\sum_{d \leqslant x^{1/2} \log^{-B} x} \sum_{k \leqslant x/y} \sum_{\substack{kq \leqslant x \\ kq \equiv a \pmod d}} \log q$$

显然我们的定理在此地也可以用.

现在我们简要地解释一下筛法与新均值公式之间的关系.

命 N 为一个大整数,E 为一个适合条件

$$(e, N) = 1, 0 < e < x^{1-\eta_1}, 0 < \eta_1 < 1, e \in E$$

的正整数集,及命

$$L = \{l = N - ep, e \in E, ep \leqslant N\}$$
$$P = \{p \mid p \nmid N\}$$

显然,当我们估计筛函数

$$S(L; P, z) = \sum_{\substack{l \in L \\ (l, p(z)) = 1}} 1, z \leqslant N^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \qquad ㉖$$

时用塞尔贝格筛法,则只要

$$f(a) = \sum_{\substack{e \equiv a \\ e \in E}} 1$$

适合条件(△),误差项正好可以用新均值定理来估计.

熟知,在陈景润的工作之前,当 $\max q \geqslant N^{1/2}$ 时,我们不能估下面筛函数之和

$$\sum_{q \in Q} S(B_q; P_q, z_q) \qquad ㉗$$

此处 Q 为一个不同正整数的集合,$B = \{b = N - p, p \leqslant N\}$, $B_q = \{b \in B, q \mid b\}$, P_q 为仅依赖于 q 的 P 的子集,及 z_q 为依赖于 q 的一个正整数,因为当我们用朱尔凯特 - 黎切尔特定理去估计每个筛函数 $S(B_q; P_q, z_q)$ 时,由每个 $S(B_q; P_q, z_q)$ 引起的误差的总和不能用朋比尼定理来估计,当然,我们可以在

哈贝斯坦猜想下来估计㉗.

当 $N^{1/2} \leqslant \max_{q \in Q} q \leqslant N^{1-\eta_2}, 0 < \eta_2 < 1$ 时,陈景润首先建议了估计某些类型和㉗的方法,简言之,他的方法的想法为将估计㉗转化为估计㉖;而我们指出实现陈景润方法的关键在于新中值定理.

6 表每个大偶数为一个素数与一个殆素数之和①

——王元　丁夏畦　潘承洞

本文将给陈景润定理"每一充分大的偶数都是一个素数及一个不超过两个素数之积之和"一个简化证明.

6.1 引　　论

为简单计,将下面的命题记为$(1, a)$:

每一充分大偶数都是一个素数与一个素因子个数不超过 a 的殆素数之和.

T. Estermann②、A. Renyi③、王元④⑤、M. Б. Барбан⑥⑦、潘承洞⑧⑨、Б. В. Леьин⑩、A. A. Бухщмаб⑪⑫、A. И. Вцноградов⑬、H. E. Richert⑭与陈景润⑮⑯曾先后用筛法与大筛法研究过这个命题,最佳的结果是陈景润得到的,他证明了:

① 原载《山东大学学报》,1975 年.参见"On the representotion of every large even integer as a sum of a prime and an almost prime," Sci. Sin., 1975, 18(5).

② T. Estermann. Eine neue Darstellung und neue Anwendung der Viggo Brunschen Metode, J. Rei. und Ang. Math, 1932, 168:106-116.

③ A. Реньи. О представлении читных чисел в вчде суммы простого и почти простого чисет, ИАН СССР, 1948, 2:57-78.

④ 王元.表大偶为一个素数及一个不超过四个素数的乘积之和.数学学报,1956,6:565-582.

⑤ 王元(Wang Yuan). On representation of large integer as a sum of a prinre and an almost prime. Sci. Sin., 1962, 11:1033-1054.

⑥ M. Б. Барбан. Новые применении болвщого рещета Ю. В. Линника, Тру. Ин. Мат. им. В. И. Романовского, 1961, 22.

⑦ M. Б. Барбан. Плотность нулей L-рядов Дирихре и Задача о сложении простых и почти-простых чисел, mat. сб, 1963, 61:419-425.

⑧ 潘承洞.表偶数为素数及殆素数之和.数学学报,1962,12:95-106.

⑨ 潘承洞(Пан Чэн Дун). О представлении четных чисел в виде суммы простого и непревосходящего 4 простых произведения. Sci. Sin., 1963, 12,:455-474.

⑩ Б. В. Левин. распределение "почтипростых" чисел в целозначных полиномиальных посмдовательностях, мат. сб, 1963, 61:401-419.

⑪ A. A. Бухщтаб. Новые результаты В исследовании проблемы Гольдбаха-Эйлера и проблемы простых цисел близнецов, ДАН СССР, 1965, 162:739-742.

⑫ A. A. Бухщтаб. Комбирнаторное усиление метода эратосфенова решега, УМН СССР, 1967, 22:199-226.

⑬ A. И. Виноградов. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихре, ИАН СССР, СЕР. мат, 1965, 29:903-934.

⑭ H. E. Richert. Selbegs sieve with weights, Mathematika, 1969, 16: 1-22.

⑮ 陈景润.大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和.科学通报,1966,17:385-386.

⑯ 陈景润.大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和.中国科学,1973,16:111-128.

定理 1 (1,2).

陈景润对处理这一命题的方法作了重要改进，特别地，他引进并估计了

$$\Omega = \sum_{\substack{(p_{1,2}) \\ p_3 \leqslant \frac{x}{p_1 p_2} \\ x-p=p_1p_2p_3}} 1 \qquad ①$$

此处 p, p_1, p_2, p_3 都表示素数而 $(p_{1,2})$ 则表示条件 $x^{1/10} \leqslant p_1 \leqslant x^{1/3} \leqslant p_2 \leqslant (\frac{x}{p_1})^{1/2}$.

本文将给(1,2) 一个简化证明，首先指出 Ω 的估计可以由下面的均值定理直接推出来，命 $2 \leqslant y \leqslant x$，命

$$\pi(y, a, q, l) = \sum_{\substack{n \leqslant y/a \\ an \equiv l \pmod q}} a_n$$

此处

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为素数} \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

定理 2 对于任意正常数 A 及正数 $\varepsilon(\varepsilon < 1)$，当 $\log^{2B} y < A_1 \leqslant A_2 \leqslant y^{1-\varepsilon}$ 时，下面的估计成立

$$I = \sum_{q \leqslant x^{1/2}\log^{-B} x} \max_{y \leqslant x} \max_{(l,q)=1} \left| \sum_{\substack{A_1 < a \leqslant A_2 \\ (a,q)=1}} f(a) \left[\pi(y, a, q, l) - \frac{\mathrm{Li}(\frac{y}{a})}{\varphi(q)} \right] \right| = O\left(\frac{x}{\log^A x} \right) \qquad ②$$

此处 $|f(a)| \leqslant 1$，$B = A + 7$ 及与"O"有关的常数仅依赖于 ε, A.

其次，本文所用的筛法为将作者之一曾用过的方法稍加改进而得来的(相关注释①).

类似地，可以证明：

定理 3 命 k 为正整数，则存在无限多个素数 p，使 $p + 2k$ 为不超过两个素数之积.

定理 4 每一充分大的奇数 N 都可以表为 $N = p + 2p^{(2)}$，此处 p 为一个素数及 $p^{(2)}$ 为一个素因子不超过二之殆素数.

用这一方法也可以处理其他有关的著名殆素数分布问题.

6.2 定理 2 的证明

在证明定理之前，先引次之定理.

---

① 王元(Wang Yuna). On representation of large integer as a sum of a prinre and an almost prime, Sci. Sin., 1962, 11:1033-1054.

定理 5 （大筛法）命 $1 < P < Q$，命 M 与 N 都是正整数，又命诸 b_n 为任意复数．则

$$\sum_{P<q\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}b_n\chi(n)\right|^2\ll\left(Q+\frac{N}{P}\right)\sum_{n=M+1}^{M+N}|b_n|^2 \qquad ③$$

此处 $\sum_{\chi_q}^{*}$ 表示过 mod q 的全体原特征求和，为简单计，我们常省去 χ_q 中之 q．

证明见 P.X. Gallengher①或陈景润②．

定理 2 的证明　(1) 记

$$D_1 = \log^B x,\quad D = x^{1/2}\log^{-B}x \qquad ④$$

则当 $(a,q) = (l,q) = 1$ 时有

$$\pi(y,a,q,l) = \sum_{\substack{n\leqslant y/a\\ a_n\equiv l(\operatorname{mod} q)}} a_n = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\bar{\chi}(l)\chi(a)\sum_{n\leqslant y/a}a_n\chi(n) \qquad ⑤$$

此处 $\sum_{\chi_q}$ 表示过 mod q 的全体特征求和，所以

$$\pi(y,a,q,l) - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leqslant y/a\\(n,q)=1}}a_n = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_1\neq\chi_0}\bar{\chi}(l)\chi(a)\sum_{n\leqslant y/a}a_n\chi(n) =$$

$$\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{q_1|q}\sum_{\chi_{q_1}}{}^{*}\bar{\chi}(l)\chi(a)\sum_{\substack{n\leqslant y/a\\(n,q/q_1)=1}}a_n\chi(n) \qquad ⑥$$

由素数定理可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant y/a\\(n,q)=1}}a_n = \pi\left(\frac{y}{a}\right) + O\left(\sum_{p|q}1\right) = \mathrm{Li}\,\frac{y}{a} + O\left(\frac{y}{a}\mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{\log y}}\right) + O(q^{\varepsilon}) \qquad ⑦$$

所以由 ⑤，⑥，⑦ 得

$$I\leqslant\sum_{q_1\leqslant D}\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{q_2\leqslant D}\frac{1}{\varphi(q_2)}\max_{y\leqslant x}\sum_{\chi_{q_1}}{}^{*}\left|\sum_{\substack{A_1<a\leqslant A_2\\(a,q_2)=1}}f(a)\chi(a)\sum_{\substack{n\leqslant y/a\\(n,q_2)=1}}a_n\chi(n)\right| + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)\leqslant$$

$$\max_{y\leqslant x}\max_{m\leqslant D}\log x\cdot I_{y,m} + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right) \qquad ⑧$$

此处

$$I_{y,m} = \sum_{q\leqslant D}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\left|\sum_{A_1<a\leqslant A_2}g(a)\chi(a)\sum_{n\leqslant y/a}d_n\chi(n)\right| \qquad ⑨$$

其中

$$\begin{cases} g(n) = f(n),\ d_n = a_n, & (n,m) = 1\\ g(n) = d_n = 0, & \text{其他情形}\end{cases} \qquad ⑩$$

① P. X. Gallagher. Bombieri's mean value theorem. Mathematika, 1968, 15: 1-6.
② 陈景润．大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和．中国科学，1973，16：11-128．

(2) 命

$$I_{y,m} = I_{y,m}^{(1)} + I_{y,m}^{(2)} \tag{11}$$

此处

$$I_{y,m}^{(1)} = \sum_{q\leqslant D_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{A_1 < a \leqslant A_2} g(a)\chi(a) \sum_{n\leqslant y/a} d_n\chi(n) \right| \tag{12}$$

$$I_{y,m}^{(2)} = \sum_{D_1 < q\leqslant D} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{A_1 < a \leqslant A_2} g(a)\chi(a) \sum_{n\leqslant y/a} d_n\chi(n) \right| \tag{13}$$

普拉哈尔(Prachar, karl, 1925,10—). 奥地利数学家,生于维也纳.

由西格尔 - 瓦尔菲茨定理(普拉哈尔[①])可知存在正常数 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ 使

$$I_{y,m}^{(1)} = \sum_{q\leqslant D_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{A_1 < a \leqslant A_2} g(a)\chi(a) \sum_{n\leqslant y/a} a_n\chi(n) \right| +$$

$$\sum_{q\leqslant D_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{A_1 < a \leqslant A_2} \sum_{\substack{n\leqslant y/a \\ (n,m)>1}} a_n \right| =$$

$$O(D_1 x e^{-\varepsilon_1\sqrt{\log x}} \log x) + O(D_1 A_2 m^{\varepsilon}) = O\left(\frac{x}{\log^{A+1} x}\right) \tag{14}$$

(3) 显然

$$I_{y,m}^{(2)} = \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{K} I_{y,m}^{(2)}(j,k) \tag{15}$$

此处 $2^J D_1 < D \leqslant 2^{J+1} D_1, 2^K A_1 < A_2 \leqslant 2^{K+1} A_1$ 及

$$I_{y,m}^{(2)}(j,k) = \sum_{2^j D_1 < q \leqslant 2^{j+1} D_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q}{}^{*} \left| \sum_{2^k A_1 < a \leqslant 2^{k+1} A_1} g(a)\chi(a) \sum_{n\leqslant y/a} d_n\chi(n) \right| \tag{16}$$

当 $j = J$ 与 $k = K$ 时,需分别将上界换为 D 与 A_2,以后亦同.命

$$f(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n\chi(n)}{n^s} \left(\sigma = 1 + \frac{1}{\log x}\right) \tag{17}$$

取

$$T = e^{2\log^2 x} \tag{18}$$

则由佩龙公式(普拉哈尔[①])得

$$\sum_{n\leqslant y/a} d_n\chi(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - it}^{\sigma + iT} \frac{f(s,\chi)}{s}\left(\frac{y}{a}\right)^s ds + O\left(\frac{y}{T}\right) + \theta(a) \tag{19}$$

此处

$$\theta(a) = \begin{cases} O(1), & a \mid y \\ O, & a \nmid y \end{cases} \tag{20}$$

假定 $H < T$,命

$$f_1(s,\chi) \sum_{n\leqslant H} \frac{d_n\chi(n)}{n^s}, \quad f_2(s,\chi) \sum_{H < n \leqslant T} \frac{d_n\chi(n)}{n^s} \tag{21}$$

---

① K. Prachar, primzah lverteilung, Springer, 1957.

则显然有

$$f(s,\chi)=f_1(s,\chi)+f_2(s,\chi)+O(x^{-1}\log x) \quad ㉒$$

命

$$g_k(s,\chi)=\sum_{2^kA_1<a\leqslant 2^{k+1}A_1}\frac{g(a)\chi(a)}{a_s} \quad ㉓$$

及

$$P_{j,k}^{(l)}(s)=\sum_{2^jD_1<q\leqslant 2^{j+1}D_1}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|g_k(s,\chi)f_l(s,\chi)|,\quad l=1,2 \quad ㉔$$

由于

$$\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}g_k(s,\chi)f_1(s,\chi)\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s-\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}g_k(s,\chi)f_1(s,\chi)\frac{y^s}{s}\mathrm{d}s=$$

$$O\left(\frac{y}{T}\left(\sum_{n\leqslant H}n^{-1/2}\right)\left(\sum_{a\leqslant A_2}n^{-1/2}\right)\right)=$$

$$O\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}\sqrt{H}}{T}\right)=O(x^{-2}) \quad ㉕$$

故由 ⑯ ~ ㉕ 得

$$I_{y,m}^{(2)}(j,k)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}P_{j,k}^{(1)}(s)\frac{y^{1/2}}{|s|}|\mathrm{d}s|+$$

$$\frac{\mathrm{e}}{2\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}P_{j,k}^{(2)}(s)\frac{y}{|s|}|\mathrm{d}s|+O\left(\frac{x}{\log^{A+3}x}\right) \quad ㉖$$

(4) 由施瓦茨不等式可得

$$P_{j,k}^{(l)}(s)\leqslant\left(\sum_{2^jD_1<q\leqslant 2^{j+1}D_1}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|g_k(s,\chi)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\left(\sum_{2^jD_1<q\leqslant 2^{j+1}D_1}\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}{}^{*}\,|f_l(s,\chi)|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad l=1,2 \quad ㉗$$

取

$$H=(2^jD_1)^2 \quad ㉘$$

则当 $s=\frac{1}{2}+\mathrm{i}t(-T\leqslant t\leqslant T)$ 时,由定理 5 可得

$$P_{j,k}^{(1)}(s)\ll\left((2^jD_1+\frac{2^kA_1}{2^jD_1})\sum_{a\leqslant A_2}\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left((2^jD_1+\frac{H}{2^jD_1})\sum_{n\leqslant H}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$(H+2^kA_1)^{1/2}\log x\ll x^{1/2}\log^{-B+1}x \quad ㉙$$

又当 $s=\sigma+\mathrm{i}t(-T\leqslant t\leqslant T)$ 时,将 f_2 的求和区间 $H<n\leqslant T$ 分成形如 $2^iH<n\leqslant 2^{i+1}H$ 的 $O(\log^2x)$ 个小区间,则由定理 5 得

$$P_{j,k}^{(2)}(s) \ll \max_{t}\left((2^jD_1+\frac{2^kA_1}{2^jD_1})\sum_{a\geqslant 2^kA_1}\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left((2^jD_1+\frac{2^tH}{2^jD_1})\sum_{n>2^tH}\right)^{\frac{1}{2}}\log^2 x \ll$$

$$\left(\frac{2^jD_1}{2^kA_1}+\frac{1}{2^jD}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2^jD_1}{H}+\frac{1}{2^jD_1}\right)^{\frac{1}{2}}\log^2 x \ll$$

$$\left(\frac{1}{2^kA_1}+\frac{1}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \log^{-B}y\log^2 x \qquad ㉚$$

将㉙与㉚代入㉖即得

$$\max_{y\leqslant x} I_{y,m}^{(2)}(j,k) \ll x\log^{-B+4}x \ll x\log^{-A-3}x \qquad ㉛$$

故由⑧,⑭,⑮与㉛即得定理.

由定理2易推出(潘承洞①):

系 在定理2的假定下有

$$J = \sum_{q\leqslant x^{1/2}\log^{-B}x} 3^{v(q)}\,|\mu(q)|\max_{y\leqslant x}\max_{(l,q)=1} \qquad ㉜$$

$$\left|\sum_{\substack{A_1<a\leqslant A_2\\(a,q)=1}} f(a)\left[\pi(y,a,q,l)-\frac{\mathrm{Li}\left(\frac{y}{a}\right)}{\varphi(q)}\right]\right| = O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)$$

此处 $v(q)$ 表示 q 的素因子个数及 $B=2A+24$.

附记 由函数

$$\psi_k(y,a,q,l) = \sum_{\substack{n\leqslant y/a\\an\equiv l(\mathrm{mod}\ q)}} \Lambda(n)\log^k\frac{y}{an}$$

出发,我们也可以证明类似的结果.

6.3 筛 法

朋比尼-维诺格拉多夫中值定理.

(1) 命 $\eta=\frac{1}{2}-\varepsilon$,其中 $\varepsilon(\varepsilon<\frac{1}{4})$ 为任意给定正数,命 q 为正整数及 $\xi>0$,命 $\Omega(x,q,\xi)$ 为形如 $k=qm$ 的全体整数,此处 $m\leqslant\frac{x^\eta}{q}$,且 m 之最大素因子不超过 ξ,又命

$$R(x,q,\xi) = \sum_{k\in\Omega(x,q,\xi)} 3^{v(k)}\,|\mu(k)|\max_{y\leqslant x}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x,k,l)-\frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(k)}\right| \qquad ㉝$$

此处 $$\pi(x,k,l)=\pi(x,1,k,l)$$

定理6 对于任意正常数 A,皆有

① 潘承洞.表偶数为素数及殆素数之和.数学学报,1962,12:95-106.

$$R(x,1,x^{\nu}) = O\left(\frac{x}{\log^A x}\right) \tag{34}$$

此处与“O”有关的常数仅依赖于 ε 与 A.

证明见朋比尼①与维诺格拉多夫②相关文章.

(2) 布伦方法.

命 $2 \leqslant y \leqslant x$ 为两个整数,命

$$a, q; a_i (1 \leqslant i \leqslant r) \tag{*}$$

为满足下面条件的一组整数

$$q < x^{\eta-\varepsilon}, (a,q) = 1, \quad a_i \not\equiv 0 (\bmod p_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant r \tag{35}$$

此处 $2 < p_1 < \cdots < p_r \leqslant \xi$ 为不超过 ξ 而又除不尽 qy 的全体素数. 又命 $P_\omega(x,q,\xi)$ 为满足下面条件的素数 p 的个数

$$p \leqslant x, p \equiv a(\bmod q), p \not\equiv a_i(\bmod p_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant r \tag{36}$$

记 r 为欧拉常数及

$$c_{qy} = e^{-r} \prod_{\substack{p \mid qy \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \tag{37}$$

定理 7 命 C 为任意给定正常数,则存在非降,非负,且仅有有限多个不连续点之函数 $\lambda(a)$ 与 $\Lambda(a)(0 < a \leqslant C)$ 使下面的估计对于 a 与 $(*)$ 一致成立.

$$\lambda(a)\frac{c_{qy}\mathrm{Li}x}{\varphi(q)\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) + O\left(\log^2 x \cdot R\left(x,q,\left(\frac{x^\eta}{q}\right)^{\frac{1}{a}}\right)\right) <$$

$$P_\omega\left(x,q,\left(\frac{x^\eta}{q}\right)^{\frac{1}{a}}\right) <$$

$$\Lambda(a)\frac{c_{qy}\mathrm{Li}x}{\varphi(q)\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) + O\left(\log^2 x \cdot R\left(x,q,\left(\frac{x^\eta}{q}\right)^{\frac{1}{a}}\right)\right) \tag{38}$$

实际上,取

$$\lambda(a) = \begin{cases} 2a\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}((k+1)\tau)^{2k+4}}{(2k+4)!}\right), & a \geqslant 7 \\ 0, & a < 7 \end{cases} \tag{39}$$

与

$$\Lambda(a) = \begin{cases} 2a\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}((k+1)\tau)^{2k+5}}{(2k+5)!}\right), & a \geqslant 8 \\ \Lambda(8), & a \leqslant 8 \end{cases} \tag{40}$$

即可,此处 $\lambda = 1.5 + \varepsilon, \tau = \log 1.5 + \varepsilon$,其中 ε 为任意给予正数.

---

① E. Bombieri. On the large siove. Mathoematika, 1965, 12:201-225.

② А.И.Виноградов. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихре, ИАН СССР, сер. мат, 1965, 29:903-934.

(3) 塞尔伯格上界方法.

命 $c > 0, \xi^{2c} \leqslant \frac{x^\eta}{q}$ 及 $P = \prod_{i=1}^{r} p_i$. 当 $d \mid P$ 时,命

$$\lambda_d = \frac{\mu(d)}{f(d)g(d)} \sum_{\substack{l \leqslant k \leqslant \xi \mid d \\ (k,d)=(k,y)=1 \\ k \mid P}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} \Big/ \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant \xi \\ (l,y)=1 \\ l \mid P}} \frac{\mu^2(l)}{f(l)} \qquad ㊶$$

此处

$$f(k) = \varphi(k) \prod_{p \mid k} \frac{p-2}{p-1}$$

又命

$$Q(x,q,\xi) = \sum_{\substack{d_1 \leqslant \xi \\ d_1 \mid P}} \sum_{\substack{d^2 \leqslant \xi \\ d_1 \mid P}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \frac{\mathrm{Li}\, x}{\varphi(q)\varphi([d_1, d_2])} \qquad ㊷$$

此处$[d_1, d_2]$表示 d_1, d_2 之最小公倍,则得

定理 8 下面的估计对于 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 6)$ 与(*)一致的成立

$$P_\omega(x,q,\xi) \leqslant Q(x,q,\xi) + O(\log^2 x \cdot R(x,q,\xi)) \qquad ㊸$$

与

$$Q\left(x, q, \left(\frac{x^\eta}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \leqslant \Lambda(\alpha) \frac{c_{q\gamma} \mathrm{Li}\, x}{\varphi(q) \log x} \left(1 + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right) \qquad ㊹$$

此处

$$\Lambda(\alpha) = \begin{cases} 4\mathrm{e}^{r}, & 0 < \alpha \leqslant 2 \\ \dfrac{2\alpha \mathrm{e}^{r}}{\alpha - 1 - \frac{\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{2}}, & 2 \leqslant \alpha \leqslant 4 \\ \dfrac{2\alpha \mathrm{e}^{r}}{\alpha - 1 - \frac{\alpha}{2}\log\frac{\alpha}{2} + \delta(\alpha)}, & 4 \leqslant \alpha \leqslant 6 \end{cases} \qquad ㊺$$

其中

$$\delta(\alpha) = \int_1^{\frac{\alpha}{4}} \int_s^{\frac{\alpha}{2}-s} \frac{\left(\frac{\alpha}{2} - s - t\right)}{st} \mathrm{d}t \mathrm{d}s \qquad ㊻$$

(4)Бухштаб 方法.

定理 9 命 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$ 为适合定理 7 要求.

定理 10 要求之函数,则由下式定义的函数

$$\lambda_1(\alpha) = \begin{cases} \max\left(\lambda(\alpha), \lambda(\beta) - \int_{\alpha-1}^{\beta-1} \frac{\Lambda(z)}{z} \mathrm{d}z\right), & 1 + \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant C \\ \lambda(\alpha), & 0 < \alpha \leqslant 1 + \varepsilon \end{cases} \qquad ㊼$$

与

$$\Lambda_1(\alpha)=\begin{cases}\min\left(\Lambda(\alpha),\Lambda(\beta)-\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{\lambda(z)}{z}\mathrm{d}z\right), & 1+\epsilon<\alpha\leqslant\beta\leqslant C\\ \Lambda(\alpha), & 0<\alpha\leqslant 1+\epsilon\end{cases}\qquad (48)$$

亦分别具有函数 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$ 之性质.

关于定理9与10的证明,请参看 A. A. Бухштаб[①]与王元[②],关于定理8的证明.

6.4 定理1的证明

(1)$\Gamma_\omega(\alpha,\beta)$ 的估计.命 $\beta>\alpha>1$.命

$$\Gamma_\omega(\alpha,\beta)=\sum_{\left(\frac{x^\eta}{q}\right)^{\frac{1}{\beta}}<p\leqslant\left(\frac{x^\eta}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}P_\omega\left(x,qp,\left(\frac{x^\eta}{q}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)\qquad (49)$$

此处 p 表示素数,则由定理6可得

$$\Gamma_\omega(\alpha,\beta)\leqslant\left(\beta\int_{\beta(1-\alpha^{-1})}^{\beta-1}\frac{\Lambda(z)}{z(\beta-z)}\mathrm{d}z\right)\frac{c_{q\gamma}\mathrm{Li}\,x}{\varphi(q)}\left[1+O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right]+O\left(\frac{x}{\log^{A-2}x}\right)\qquad (50)$$

(2)Ω 的估计.命 $P=\prod_{\substack{2<p\leqslant x^{1/4-\epsilon/2}\\ l\nmid x}}p$,$x=y$ 为偶数,$a=1$,$q=2$ 及 $a_i=x(i=1,2,\cdots)$,则

$$\Omega=\sum_{\substack{(p_{1,2})\\ n\leqslant x/p_1p_2\\ (x-p_1p_2n,P)=1}}a_n+O(x^{1/4})\leqslant\sum_{(p_{1,2})}\sum_{n\leqslant x/p_1p_2}a_n\left(\sum_{d\mid(x-p_1p_2n,P)}\lambda_d\right)^2+O(x^{1/4})=$$
$$\sum_{d_1\mid P}\sum_{d_2\mid P}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{(p_{1,2})}\pi(x,p_1p_2,[d_1,d_2]x)+O(x^{1/4})$$

显然$([d_1,d_2],p_1p_2)=1$ 及 $\lambda_d=O(\log x)$,所以

$$\Omega\leqslant\sum_{(p_{1,2})}\sum_{d_1\mid P}\sum_{d_2\mid P}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\mathrm{Li}\frac{x}{p_1p_2}}{\varphi([d_1,d_2])}+$$
$$O\left[\log^2x\sum_{\substack{d\leqslant x^\eta\\(d,x)=1}}|\mu(d)|3^{v(d)}\left|\sum_{\substack{(p_{1,2})\\(p_1p_2,d)=1}}\left(\pi(x,p_1p_2,d,x)-\frac{\mathrm{Li}\frac{x}{p_1p_2}}{\varphi(d)}\right)\right|\right]\leqslant$$

① A. A. Бухштаб. Комбирнаторное усиление метода эратосфенова решета, УМН СССР, 1967,22:199-226.

② 王元(Wang Yuan). On representation of large integer as a sum of a prinre and an almost prime. Sci. Sin., 1962,11:1033-1054.

$$\sum_{(p_{1,2})}\sum_{d_1|P}\sum_{d_2|P}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\frac{\mathrm{Li}\frac{x}{p_1p_2}}{\varphi([d_1,d_2])}+$$

$$O\left[\log^2 x\sum_{\substack{d\leqslant x^{\eta}\\(d,x)=1}}|\mu(d)|3^{\nu(d)}\left|\sum_{x^{\frac{13}{30}}<a\leqslant x^{\frac{2}{3}}}f(a)\left(\pi(x,a,d,x)-\frac{\mathrm{Li}\frac{x}{a}}{\varphi(d)}\right)\right|\right]$$

此处

$$f(a)=\begin{cases}1, & a=p_1p_2,\text{其中 } p_1,p_2 \text{ 适合条件}(p_{1,2})\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases}$$

所以由定理 2,系(取 $A=5$)与定理 8 得

$$\Omega\leqslant\left(8e^{r}\sum_{(p_{1,2})}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}+\delta\right)\frac{c_xx}{\log^2 x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log^{1/2}x}\right)\right)\leqslant$$

$$\left(8e^{r}\int_3^{10}\frac{\log\left(2-\frac{3}{y}\right)}{y-1}\mathrm{d}y+\delta\right)\frac{c_xx}{\log^2 x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log^{1/2}x}\right)\right)<$$

$$7.014\,74\frac{c_xx}{\log^2 x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log^{1/2}x}\right)\right) \qquad (51)$$

其中 $\delta=0(1)$(当 $\varepsilon\to 0$).

(3) 由公式 (39) 与 (40) 直接算出 $\lambda_0(7)=13.955\,78$ 与 $\Lambda_0(8)=16.006\,24$,而 $\Lambda_0(\alpha)(0\leqslant\alpha\leqslant 6)$ 则直接由公式 (45) 给出.取 $\beta-\alpha=0.01$,则由定理 9 可得 $\lambda_0(3+0.01i)(0\leqslant i\leqslant 400)$,例如,$\lambda_0(6)=11.903\,32$,$\lambda_0(5)=9.770\,58$,$\lambda_0(4)=7.412\,96$ 与 $\lambda_0(3)=4.448\,24$.再由 $\lambda_0(\alpha)$ 与 $\Lambda_0(\alpha)$ 出发,取 $\beta-\alpha=0.01$,由定理 9 可得 $\lambda_1(\alpha)$ 与 $\Lambda_1(\alpha)$,例如,$\lambda_1(5)=9.878\,44$.

(4) 取 $x=y$ 为偶数,$a=1$,$q=2$ 及 $a_i=x(i=1,2,\cdots)$,命

$$M=\frac{1}{2}\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p\leqslant x^{\frac{1}{3}}}P_{\omega}(x,2P,x^{\frac{1}{10}})+\frac{\Omega}{2}+O(x^{\frac{9}{10}}) \qquad (52)$$

则由定理 6,(50),(51) 及(3) 可知

$$P_{\omega}(x,2,x^{\frac{1}{10}})-M\geqslant 2\left(\lambda(5)-\frac{5}{2}\int_{\frac{2.5}{1.5}}^{4}\frac{\Lambda_0(z)}{z(5-z)}\mathrm{d}z-3.507\,37-\delta\right)\cdot$$

$$\frac{c_xx}{\log^2 x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log^{1/2}x}\right)\right)=$$

$$2\left(9.878\,44-10e^{r}\frac{\mathrm{d}z}{(5-z)(2z-1-z\log z)}-\right.$$

$$\left.2e^{r}\log\frac{2}{1.5}-3.507\,37-\delta\right)\frac{c_xx}{\log^2 x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log^{1/2}x}\right)\right)>$$

$$\frac{c_xx}{10\log^2 x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log^{1/2}x}\right)\right)>1(\text{当 } x \text{ 充分大}) \qquad (53)$$

若 p' 为 x 的素因子及 $p' \mid (x-p)$，则 $p' = p$. 所以 $P_\omega(x, 2, x^{\frac{1}{10}}) + O(x^{\frac{9}{10}})$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数

$$2 < p < x$$

若

$$p' \mid (x-p)$$

则

$$p' > x^{\frac{1}{10}} \qquad ㊴$$

此处 p' 表示素数. 适合条件 ㊴ 之素数 p，且使 $x-p$ 至少有两个素因子满足 $x^{\frac{1}{10}} < p' \leqslant x^{\frac{1}{3}}$ 或 $x-p$ 有一个素因子满足 $x^{\frac{1}{10}} < p' \leqslant x^{\frac{1}{3}}$，两个素因子大于 $x^{\frac{1}{3}}$ 者之个数不超过 M，故由 ㊳ 可知当 x 充分大时，存在素数 p 使 $x-p$ 最多含有两个素因子.

定理证完.

7 关于表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和①②③

——谢盛刚

7.1 本文的结果

M.Б. Барбан④、王元⑤及潘承洞⑥证明了任一充分大的偶数均可表为素数与至多四个素数的乘积之和. 在广义黎曼猜测之下，王元⑤ 证明了任一充分大的偶数可表为素数与至多三个素数的乘积之和.

本文的目的在于将上述结果改进为：

定理 任一充分大的偶数均可表为素数与至多三个素数的乘积之和.

7.2 $P_1(x, x^{\frac{1}{7}})$ 的下界

设 x 为充分大的偶数，$2 < \xi < x$ 为实数.

---

① 1964 年 10 月 4 日收到.

② 作者衷心感谢王元老师，他让作者考虑这一问题. 在作者证明了“充分大的偶数可表为二殆素数之和，它们的素因子总共不超过 4 个”之后，他指出证明本文定理的可能性. 在作者工作过程中，他又给以不少有益的指导与帮助.

③ 原载《数学进展》第 8 卷. 第 2 期，1965.5.

④ Барбан М.Б. “Плотность” нулий L-рядов Дирихле задача о сложении простых и “почти простых” чисел, Матем. сб., 61(103), 418-425.

⑤ Wang Yuan(王元). On the representation of large integer as a sum of prime and an almost prime. Sci. Sin., 1962, 11(8): 1033-1054.

⑥ Пан Чэн-дун. О представлении четных чисел в виде суммы простого и непревоходящего 4 простых произведения, Sci. Sin., 1963, 12(4): 455-473; 潘承洞. 表偶数为素数及一个不超过四个素数的乘积之和. 山东大学学报，1962(2): 40-62.

命 $P = \prod_{2<p\leqslant\xi} p, a_n = \log n e^{-\frac{n\log x}{x}}$ 及

$$P_1(x,\xi) = \sum_{\substack{(x-p,P)=1\\2<p\leqslant x}} a_p$$

引理 1

$$P_1(x,x^{\frac{1}{7}}) > 8.149\,967\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

这里 c_{2x} 如相关注释①中的定义.

证明 与相关注释②类似可知

$$P_1(x,x^{\frac{1}{18}}) > 36(1-0.007\,32)\frac{c_{\gamma,x}x}{\log^2 x} = 35.736\,48\frac{c_{\gamma,x}x}{\log^2 x}$$

这里
$$c_{\gamma,x} = e^{-\gamma}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid x\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}$$

由相关注释②可知

$$P_1(x,x^{\frac{1}{7}}) > \left(35\,736\,48 - \int_8^{18}\frac{2e^{\gamma}du}{\frac{3u-8}{8}-1-\frac{3u-8}{16}\log\frac{3u-8}{16}} - \int_7^8\frac{32e^{\gamma}du}{3u-8}\right)\frac{c_{\gamma,x}x}{\log^2 x}$$

通过计算即得到引理.

7.3 函数 $\rho(x,k,l)$ 及塞尔伯格筛法

设 $k > l \geqslant 0$,命

$$\rho(x,k,l) = \sum_{\substack{n\equiv l(\bmod k)\\n\leqslant x}} a_n$$

及

$$\rho(x) = \rho(x,1,0) = \sum_{n\leqslant x} a_n$$

容易证明
$$\rho(x) = x + O\left(\frac{x\log\log x}{\log x}\right)$$

引理 2 对于 $k > l \geqslant 0$,一致地有

$$\rho(x,k,l) = \frac{1}{k}\rho(x) + O(\log x)$$

这里与“O”有关的常数不依赖于 x,k 及 l.

证明 设

$$t_0\log t_0 - \frac{x}{\log x} = 0$$

---

① 王元.论筛法及其有关的若干应用(Ⅰ).数学学报,1958,8:413-429.

② Пан Чэн-дун, О представлении четных чисел в виде суммы простого и непревосходящего 4 простых произведения, Sci. Sin., 1963,12(4):455-473;潘承洞.表偶数为素数及一个不超过四个素数的乘积之和.山东大学学报,1962(2):40-62.

易知 a_n 在区间$(1,t_0)$上为单调增,在区间(t_0,x)上为单调减,故有

$$-\log x < \sum_{\substack{n\equiv l(\bmod k)\\ n\leqslant t_0}} a_n - \sum_{\substack{n\equiv 0(\bmod k)\\ n\leqslant t_0}} a_n < \log x$$

及

$$-\log x < \sum_{\substack{n\equiv l(\bmod k)\\ t_0<n\leqslant x}} a_n - \sum_{\substack{n\equiv 0(\bmod k)\\ t_0<n\leqslant x}} a_n < \log x$$

综合两式即得

$$\rho(x,k,0) = \rho(x,k,l) + O(\log x)$$

因此

$$k\rho(x,k,0) = \sum_{l=0}^{k-1}\rho(x,k,l) + O(k\log x) = \rho(x) + O(k\log x)$$

故我们有

$$\rho(x,k,l) = \rho(x,k,0) + O(\log x) = \frac{1}{k}\rho(x) + O(\log x)$$

设 x 为充分大的偶数,ξ_1 及 $\xi_2(2<\xi_1<\xi_2<x)$为二实数.给定正整数组

$$y;q,a;a',b';K \qquad (*)$$

满足

$$2\leqslant y\leqslant x;q<\xi_1,2\mid q,q=O(1)$$

当 $p\leqslant\xi_2$ 时,若 $p\mid y$,则 $a'\equiv b'(\bmod p)$;若 $p\nmid y$,则 $a'\not\equiv b'(\bmod p)$;$\mu(K)\neq 0,K<x$.

令 $\pi\xi = \prod\limits_{\substack{p\nmid qK\\ p\leqslant\xi}} p$ 及

$$P_\omega(x,\xi_1,\xi_2) = \sum_{\substack{(n-a',\pi_{\xi_1})=1\\ (n-b',\pi_{\xi_2})=1\\ n\leqslant x,n\equiv a(\bmod q)}} a_n$$

引理 3 设 $c>0$,则下式

$$P_\omega(x,\xi_1,\xi_2) < \frac{\rho(x)}{q\sum\limits_{\substack{n\mid\pi_{\xi_2}\\ n\leqslant\xi_1^c}}\frac{\mu(n)}{f(n)}} + O(\xi^{2c}\log^7 x)$$

对$(*)$一致成立,这里当 $n\mid\pi_{\xi_2}$ 时

$$f(n)=\prod_{p\mid n}f(p),\quad f(p)=\frac{1}{g(p)}-1,\quad g(1)=1$$

$$g(p)=\frac{2}{p}(p\nmid y,p<\xi_1),g(p)=\frac{1}{p}(p\mid y\text{ 或 }\xi_1<p)$$

证明 若 $k\mid\pi_{\xi_2}$,则有 $k=k_1k_2$,这里 $k_1\mid\pi_{\xi_1}$,$(k_2,\pi_{\xi_1})=1$.易知同余方

程组

$$\begin{cases}(n-a')(n-b')\equiv 0 & \pmod{k_1}\\ n-b'\equiv 0 & \pmod{k_2}\\ n\equiv a & \pmod{q}\end{cases}$$

在区间 $1\leqslant n\leqslant kq$ 上有 $2^{\Omega(k_1)-\Omega(k_1,y)}$ 个解,所以由引理 1 知

$$\sum_{\substack{k_1\mid(n-a')(n-b')\\ k_2\mid n-b'\\ n\leqslant x,\, n\equiv a \pmod q}} a_n=\frac{\rho(x)}{kq}2^{\Omega(k_1)-\Omega((k_1,y))}+O(2^{\Omega(k_1)}\log x)$$

当 $k\mid\pi_{\xi_2}$ 时,命

$$\lambda_k=\frac{\mu(k)}{g(k)f(k)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi_1/k\\ (n,k)=1\\ n\mid\pi_{\xi_2}}}\frac{\mu^2(n)}{n}\Big/\sum_{\substack{l\leqslant\xi_1\\ l\mid\pi_{\xi_2}}}\frac{\mu^2(l)}{f(l)}$$

由于 $\lambda_1=1$ 及当 $d>\xi_1$ 时 $\lambda_d=0$,故

$$P_\omega(x,\xi_1,\xi_2)=\sum_{\substack{(n-a',\pi_{\xi_1})=1\\ (n-b',\pi_{\xi_2})=1\\ n\leqslant x,\, n\equiv a\pmod q}} a_n=\sum_{\substack{(n-a',\pi_{\xi_1})=1\\ (n-b',\pi_{\xi_2})=1\\ n\leqslant x,\, n\equiv a\pmod q}} a_n\Big(\sum_{d_1\mid((n-a')(n-b'),\pi_{\xi_1})}\ \sum_{d_2\mid(n-b',\pi_{\xi_2}/\pi_{\xi_1})}\lambda_{d_1d_2}\Big)^2\leqslant$$

$$\sum_{n\leqslant x,\, n\equiv a\pmod q} a_n\Big(\sum_{d_1\mid((n-a')(n-b'),\pi_{\xi_1})}\ \sum_{d_2\mid(n-b',\pi_{\xi_2}/\pi_{\xi_1})}\lambda_{d_1d_2}\Big)^2=$$

$$\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant\xi_1\\ d_1\mid\pi_{\xi_1}\\ d_2\mid\pi_{\xi_2}/\pi_{\xi_1}}}\ \sum_{\substack{d_1'd_2'\leqslant\xi_1\\ d_1'\mid\pi_{\xi_1}\\ d_2'\mid\pi_{\xi_2}/\pi_{\xi_1}}}\lambda_{d_1d_2}\lambda_{d_1'd_2'}\sum_{\substack{n\leqslant x,\, n\equiv a\pmod q\\ \{d_1,d_1'\}\mid(n-a')(n-b')\\ \{d_2,d_2'\}\mid n-b'}} a_n=$$

$$\frac{\rho(x)}{q}\sum_{\substack{d_1d_2\leqslant\xi_1\\ d_1\mid\pi_{\xi_1}\\ d_2\mid\pi_{\xi_2}/\pi_{\xi_1}}}\ \sum_{\substack{d_1'd_2'\leqslant\xi_1\\ d_1'\mid\pi_{\xi_1}\\ d_2'\mid\pi_{\xi_2}/\pi_{\xi_1}}}\lambda_{d_1d_2}\lambda_{d_1'd_2'}g(\{d_1d_2,d'_1d'_2\})+$$

$$O\Big(\sum_{\substack{d\leqslant\xi_1\\ d\mid\pi_{\xi_2}}}\ \sum_{\substack{d'\leqslant\xi_1\\ d'\mid\pi_{\xi_2}}}\mid\lambda_d\lambda_{d'}\mid 2^{\Omega(d)+\Omega(d')}\log x\Big)=$$

$$\frac{\rho(x)}{q}\sum_{\substack{d\leqslant\xi_1\\ d\mid\pi_{\xi_2}}}\ \sum_{\substack{d'\leqslant\xi_1\\ d'\mid\pi_{\xi_2}}}\lambda_d\lambda_{d'}g(\{d,d'\})+R=$$

$$\frac{\rho(x)}{q}Q+R$$

这里$\{d,d'\}$表示 d 与 d' 的最小公倍数.以下的证明与相关注释①中一样.

7.4 引理3的应用

取 $\xi_1 = x^{\frac{1}{2c}}\log^{-6}x, \xi_2 = x^{\frac{1}{2}}$. 记 $d = 2c$.

(1) 若 $1 \leqslant c \leqslant 3$,则与相注释① 类似有

$$\sum_{\substack{n\leqslant \xi_1^c \\ n\mid \pi_{\xi_2}}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} \geqslant \sum_{\substack{n\leqslant \xi_1^c \\ n\mid \pi_{\xi_1}}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} + \sum_{\xi_1<p\leqslant \xi_1^c} \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{n\leqslant \xi_1^c/p \\ n\mid \pi_{\xi_1}}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} \geqslant$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant \xi_1^c \\ (n,qK)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\substack{\xi_1<p\leqslant \xi_1^c \\ p+K}} \frac{1}{p} \sum_{\substack{n\leqslant \xi_1^c/p \\ (n,qK)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} + O\left(\frac{\log^6 x}{x^{1/d}}\right) =$$

$$\frac{c'}{2}\left[(d-1)^2 - \frac{d^2}{2}\log\frac{d}{2} + \frac{d^2}{4}\right]\log^2\xi_1 +$$

$$O\left(\prod_{\substack{p\mid qK_y \\ p>2}} \frac{p-2}{p-1} \cdot \frac{\log^2 x}{\log\log x}\right)$$

这里
$$c' = \frac{1}{4}\prod_{p\mid qK}\frac{p-1}{p}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\prod_{\substack{p\mid qK_y \\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}$$

(2) 由(1) 我们立刻得到下述引理.

引理4 若 $2 \leqslant d \leqslant 6$,则下式

$$P_\omega(x, x^{\frac{1}{d}}, x^{\frac{1}{2}}) < c_q K_y \Lambda(d)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qK_y} x}{\log^2 x \log\log x}\right)$$

对$(*)$一致成立,这里

$$c_{qK_y} = \frac{2e^{-2\gamma}}{q}\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-2)^2}\right)\prod_{p\mid qK}\frac{p}{p-1}\prod_{\substack{p\mid qK_y \\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}$$

$$\Lambda(d) = \frac{4e^{2\gamma}d^2}{(d-1)^2 + \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{2}\log\frac{d}{2}}$$

容易证明,在区间 $2 \leqslant d \leqslant 6$ 上$\frac{\Lambda(d)}{d^2}$ 是减函数.

7.5 集合 M

以 M 表示满足下述条件的整数 n 的集合

$$x^{\frac{1}{2}} < n \leqslant x, 2\mid n, n(x-n) \not\equiv 0 \pmod p, \quad 2 < p \leqslant x^{\frac{1}{7}}$$

① 王元.论筛法及其有关的若干应用.数学学报,1958,8:413-429.

$$n \not\equiv 0(\bmod p)(x^{\frac{1}{7}} < p \leqslant x^{\frac{1}{2}}), x - n \not\equiv 0(\bmod p^2)(x^{\frac{1}{7}} < p \leqslant x^{\frac{1}{2}})$$

显然

$$\sum_{n \in M} a_n = P_1(x, x^{\frac{1}{7}}) + O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$$

用 $J(1,3)$ 表示使 $x - p(1 < p < x)$ 至多有三个素因子的素数 p 的全体.

引理 5

$$P_1(x, x^{\frac{1}{7}}) < \sum_{p \in J(1,3)} a_p + \frac{1}{6} \sum_{\substack{p'p'' \leqslant x^{1/2} \\ p', p'' > x^{1/7} \\ (p'p'', x) = 1}} \sum P_{\omega_{p'p''}}\left(\frac{x}{p'p''}, x^{\frac{1}{7}}, \left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + O(x^{\frac{6}{7}+\varepsilon})$$

这里 p', p'' 表示素数, $(\omega_{p'p''})$ 依赖于 p', p''.

证明 设 $p'' > p' > x^{\frac{1}{7}}(p'p'' \leqslant x^{\frac{1}{2}})$ 为二素数,用 $\Gamma_{p'p''}$ 表示 M 中满足同余式

$$x - n \equiv 0(\bmod p'p'')$$

的元素 n 的全体.设 $a_{p'p''}(0 < a_{p'p''} \leqslant p'p'')$ 是上同余式的解,则有

$$n = mp'p'' + a_{p'p''}$$

当 $(p'p'', x) = 1$ 时,同余方程组

$$mp'p'' + a_{p'p''} \equiv x(\bmod p), \quad 2 < p \leqslant x^{\frac{1}{7}}$$

有唯一解 $\tilde{a}'(0 < \tilde{a}' \leqslant \pi_{x^{\frac{1}{7}}})$.

取 $K = p'p''$,同余方程组

$$mp'p'' + a_{p'p''} \equiv 0(\bmod p)(p \mid \pi_{x^{\frac{1}{2}}})$$

有唯一解 $\tilde{b}'(0 < \tilde{b}' \leqslant \pi_{x^{\frac{1}{2}}})$.

命 $\tilde{a}$ 为

$$mp''p' + a_{p'p''} \equiv 1(\bmod 2)$$

的解.

定义正整数组

$(\omega p'p'')$ $\qquad y = x; q = 2, \tilde{a}; \tilde{a}', \tilde{b}'; K = p'p''$

这时有

$$\sum_{n \in \Gamma_{p'p''}} a_n \leqslant P_{\omega p'p''}\left(\frac{x}{p'p''}, x^{\frac{1}{7}}, x^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant P_{\omega p'p''}\left(\frac{x}{p'p''}, x^{\frac{1}{7}}, \left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

当 $(p'p'', x) > 1$ 时,显然

$$\sum_{n \in \Gamma_{p'p''}} a_n < x^{\frac{6}{7}} \log x$$

因 $p'' > p' > x^{\frac{1}{7}}$,故

$$\sum_{(p'p'', x) > 1} \sum_{n \in \Gamma_{p'p''}} a_n = O(x^{\frac{6}{7}} \log x)$$

所以

$$\sum_{\substack{p'p''\leqslant x^{1/2}\\ p',p''>x^{1/7}}}\sum_{n\in\Gamma_{p'p''}}a_n\leqslant\sum_{\substack{p'p''\leqslant x^{1/2}\\ p',p''>x^{1/7}\\ (p'p'',x)=1}}P_{\omega p'p''}\left(\frac{x}{p'p''},x^{\frac{1}{7}},\left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+O(x^{\frac{6}{7}}\log x)$$

如果 $p\in M$ 而 $x-p$ 在 $x^{\frac{1}{7}}$ 与 $x^{\frac{1}{2}}$ 间至少有四个素因子,假定它们是 $q_1<q_2<q_3<q_4<\cdots$,共有六对 $(q_\mu,q_\nu)(1\leqslant\mu<\nu\leqslant4)$.若其中有一对的乘积大于 $x^{\frac{1}{2}}$,则其余二个素数的乘积必小于 $x^{\frac{1}{2}}$.因此,至少有三对 $(q_\mu,q_\nu)(1\leqslant\mu<\nu\leqslant4)$ 满足 $q_\mu q_\nu\leqslant x^{\frac{1}{2}}$.于是 p 必属于至少三个不同的 $\Gamma_{p'p''}$.

如果 $p\in M$ 而 $x-p$ 在 $x^{\frac{1}{7}}$ 与 $x^{\frac{1}{2}}$ 间恰好有三个素因子,则当此三个素因子的积大于 $x^{\frac{1}{2}}$ 时 $p\in J(1,3)$,而当此三个素因子的积小于 $x^{\frac{1}{2}}$ 时,p 属于三个不同的 $\Gamma_{p'p''}$.

如果 $p\in M$ 而 $x-p$ 在 $x^{\frac{1}{7}}$ 与 $x^{\frac{1}{2}}$ 间至多有二个素因子,则 $p\in J(1,3)$.

因此,若 $p\in M$,则 p 必属于三个不同的 $\Gamma_{p'p''}$ 或属于 $J(1,3)$.由此我们有

$$P_1(x,x^{\frac{1}{7}})\leqslant\sum_{p\in J(1,3)}a_p+\frac{1}{3}\sum_{\substack{p'p''\leqslant x^{1/2}\\ p''>p'>x^{1/7}}}\sum_{n\in\Gamma_{p'p''}}a_n+O(x^{\frac{1}{2}}\log x)\leqslant$$

$$\sum_{p\in J(1,3)}a_p+\frac{1}{6}\sum_{\substack{p'p''\leqslant x^{1/2}\\ p',p''>x^{1/7}\\ (p'p'',x)=1}}P_{\omega p'p''}\left(\frac{x}{p'p''},x^{\frac{1}{7}},\left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+$$

$$O(x^{\frac{6}{7}}+\varepsilon)$$

7.6 定理的证明

引理 6 给定 $\beta>0,\alpha>2$ 为二实数,则

$$\sum_{\substack{p',p''>x^{1/\beta}\\ p'p''\leqslant x^{\alpha/\beta}}}\frac{1}{p'p''}=\log\alpha\log(\alpha-1)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n\right)+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)$$

证明 取 $\delta=\log^{-\frac{1}{2}}x,N=\left[\frac{\alpha-2}{\delta\beta}\right]$,则

$$\sum_{\substack{p',p''>x^{1/\beta}\\ p'p''\leqslant x^{\alpha/\beta}}}\frac{1}{p'p''}=\sum_{x^{1/\beta}<p'<x^{\frac{\alpha-1}{\beta}}}\frac{1}{p'}\sum_{x^{1/\beta}<p''\leqslant x^{\alpha/\beta}/p'}\frac{1}{p''}\leqslant$$

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{x^{\frac{1}{\beta}+n\delta}<p'<x^{\frac{1}{\beta}+(n+1)\delta}}\frac{1}{p'}\sum_{x^{\frac{1}{\beta}}<p''\leqslant x^{\frac{\alpha-1}{\beta}-n\delta}}\frac{1}{p''}=$$

$$\sum_{n=0}^{N}\log(\alpha-1-n\beta\delta)\int_{1+n\beta\delta}^{1+(n+1)\beta\delta}\frac{\mathrm{d}t}{t}+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)=$$

$$\sum_{n=0}^{N}\int_{1+n\beta\delta}^{1+(n+1)\beta\delta}\frac{\log(\alpha-t)}{t}\mathrm{d}t+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)+$$

$$O\left(\sum_{n=0}^{N}\delta\int_{1+n\beta\delta}^{1+(n+1)\beta\delta}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)=$$

$$\int_{1}^{\alpha-1}\frac{\log(\alpha-t)}{t}\mathrm{d}t+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)=$$

$$\log\alpha\int_{1}^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_{1}^{\alpha-1}\frac{\log\left(1-\frac{t}{\alpha}\right)}{t}\mathrm{d}t+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)=$$

$$\log\alpha\log(\alpha-1)-\int_{1}^{\alpha-1}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\alpha^n}\mathrm{d}t+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)=$$

$$\log\alpha\log(\alpha-1)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n\right)+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)$$

同样可证

$$\sum_{\substack{p',p''>x^{1/\beta}\\ p'p''\leqslant x^{\alpha}/\beta}}\sum\frac{1}{p'p''}\geqslant\log\alpha\log(\alpha-1)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^n-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n\right)+O(\log^{-\frac{1}{2}}x)$$

故得引理.

引理 7 当 x 充分大时,有

$$\sum_{\substack{p'p''>x^{1/7}\\ p',p''\leqslant x^{1/2}\\ (p'p'',x)=1}}\sum P_{\omega p'p''}\left(\frac{x}{p'p''},x^{\frac{1}{7}},\left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{1}{2}}\right)<45.797\,7\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

这里 c_{2x} 如相关注释①中的定义.

证明 由于 $p'',p'>x^{\frac{1}{7}}$,命 $K=p'p''$,容易知道

$$c_{2Kx}=\frac{p'p''}{(p'-2)(p''-2)}c_{2x}=c_{2x}(1+O(x^{-\frac{1}{7}}))$$

故由引理 4 知

$$\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ p'p''\leqslant x^{1/2}\\ (p'p'',x)=1}}\sum P_{\omega p'p''}\left(\frac{x}{p'p''},x^{\frac{1}{7}},\left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ p'p''\leqslant x^{1/2}\\ (p'p'',x)=1}}\sum P_{\omega p'p''}\left(\frac{x}{p'p''},\left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{\log x}{7\log x-7\log p'p''}},\left(\frac{x}{p'p''}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\leqslant$$

$$c_{2x}(1+O(x^{-\frac{1}{7}}))\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ p'p''\leqslant x^{1/2}}}\sum\Lambda\left(\frac{7\log x-7\log p'p''}{\log x}\right)\frac{x}{p'p''}\log^{-2}\frac{x}{p'p''}+$$

---

① 王元.论筛法及其有关的若干应用.数学学报,1958,8:413-429.

$$O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^2 x\log\log x}\right) =$$

$$49\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ p'p''\leqslant x^{1/2}}}\sum \frac{\Lambda\left(\frac{7\log x-7\log p'p''}{\log x}\right)}{\left(\frac{7\log x-7\log p'p''}{\log x}\right)^2}\frac{1}{p'p''}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^2 x\log\log x}\right)$$

由于$\frac{\Lambda(d)}{d^2}$是 d 的减函数,故

$$\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ p'p''\leqslant x^{1/2}}}\sum \frac{\Lambda\left(\frac{7\log x-7\log p'p''}{\log x}\right)}{\left(\frac{7\log x-7\log p'p''}{\log x}\right)^2}\frac{1}{p'p''}\leqslant\sum_{n=20}^{34}\frac{\Lambda(6.9-0.1n)}{(6.9-0.1n)^2}\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ x^{0.1n/7}<p'p''\leqslant x^{0.1n+0.1/7}}}\sum\frac{1}{p'p''}=$$

$$\frac{\Lambda(3.5)}{3.5^2}\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ p'p''\leqslant x^{1/2}}}\sum\frac{1}{p'p''}-\sum_{n=21}^{34}\left[\frac{\Lambda(6.9-0.1n)}{(6.9-0.1n)^2}-\frac{\Lambda(7-0.1n)}{(7-0.1n)^2}\right]\sum_{\substack{p',p''>x^{1/7}\\ p'p''\leqslant x^{0.1n/7}}}\sum\frac{1}{p'p''}$$

由引理 4 和引理 6 并经过计算即得引理 7.

定理的证明　由引理 1、引理 5 引理 7 得到

$$\sum_{p\in J(1,3)}a_p>0.517\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}$$

即证明了定理.

8　关于谢盛刚的"表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和"一文的一些意见[1][2]

——陈景润

我们认为谢盛刚在注释[3]中引理 1 的证明是错的,在该文的第 209 页最后第三行有

$$\left(35.73648-\int_8^{18}\frac{2e^{\gamma}du}{\frac{3u-8}{8}-1-\frac{3u-8}{16}\log\frac{3u-8}{16}}-\int_7^8\frac{32e^{\gamma}du}{3u-8}\right)\frac{C_{\gamma,x}x}{\log^2 x}>\frac{8.149967C_{2,x}x}{\log^2 x}$$

我们将证明上式是错的,实际上我们将证明下式一定成立

$$\left(35.73648-\int_8^{18}\frac{2e^{\gamma}du}{\frac{3u-8}{8}-1-\frac{3u-8}{16}\log\frac{3u-8}{16}}-\int_7^8\frac{32e^{\gamma}du}{3u-8}\right)\frac{C_{\gamma,x}x}{\log^2 x}>\frac{7.16C_{2,x}x}{\log^2 x}$$

① 1965 年 5 月 25 日收到.
② 原载《数学进展》第 8 卷第 3 期,1965 年 8 月.
③ 谢盛刚.关于表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和.数学进展,1965,8(2):209-216.

由相关注释[①]中我们有 $1.78 < e^{\gamma} < 1.782$. 显然有

$$\int_7^8 \frac{32e^{\gamma}du}{3u-8} = \frac{32e^{\gamma}}{3}\log\frac{16}{13} \geqslant 3.939$$

故得

$$35.73648 - \int_8^{18} \frac{2e^{\gamma}du}{\frac{3u-8}{8} - 1 - \frac{3u-8}{16}\log\frac{3u-8}{16}} - \int_7^8 \frac{32e^{\gamma}du}{3u-8} <$$

$$31.798 - \int_8^{18} \frac{2e^{\gamma}du}{\frac{3u-8}{8} - 1 - \frac{3u-8}{16}\log\frac{3u-8}{16}} \qquad ①$$

令 $t = \frac{3u-8}{16}$,则我们得到

$$\int_8^{18} \frac{2e^{\gamma}du}{\frac{3u-8}{8} - 1 - \frac{3u-8}{16}\log\frac{3u-8}{16}} = \frac{32e^{\gamma}}{3}\int_1^{2\frac{7}{8}} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \qquad ②$$

现在我们来证明下面的引理.

引理 假设 $1 \leqslant \alpha < \alpha + \Delta \leqslant e$,则我们有

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \geqslant \frac{\Delta}{2\left(\alpha+\frac{\Delta}{2}\right) - 1 - \left(\alpha+\frac{\Delta}{2}\right)\log\left(\alpha+\frac{\Delta}{2}\right)} - \varepsilon$$

这里 ε 是一个任意取的充分小正数.

证明[②] 命 $f(t) = 2t - 1 - t\log t$,则 $f'(t) > 0$,而 $f''(t) < 0$. 显然有

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta} \frac{dt}{f(t)} \geqslant \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\Delta}{2}} \left(\frac{1}{f(t)} + \frac{1}{f(2\alpha+\Delta-t)} - \frac{2}{f\left(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\right)}\right)dt + \frac{\Delta}{f\left(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\right)}$$

而因 $\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{f(t)} = 2f'^2f^{-3} + (-f'')f^{-2} > 0$,故上式右方积分中的函数恒取正值,因此得到

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\Delta} \frac{dt}{f(t)} \geqslant \frac{\Delta}{f\left(\alpha+\frac{1}{2}\Delta\right)}$$

此即引理.

显然我们有

$$\int_1^{2\frac{7}{8}} \frac{dt}{2t-1-t\log t} = \int_1^{e} \frac{dt}{2t-1-t\log t} + \int_e^{2\frac{7}{8}} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \qquad ③$$

由于当 $t \geqslant e$ 时 $2t - 1 - t\log t$ 是 t 的单调减少函数,故得

---

① 王竹溪. 简明十位对数表. 北京:科学出版社,1963.
② 这个引理的简单证明是吴方同志给出的,作者特此致谢.

$$\int_{e}^{2\frac{7}{8}} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \geqslant \frac{2.875-e}{e-1} \geqslant 0.09 \qquad ④$$

由引理我们得到

$$\int_{1}^{e} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \geqslant \int_{1}^{1.43} \frac{dt}{2t-1-t\log t} + \int_{1.43}^{1.86} \frac{dt}{2t-1-t\log t} + \int_{1.86}^{2.29} \frac{dt}{2t-1-t\log t} + \int_{2.29}^{2.718} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \geqslant$$

$$\frac{0.43}{1.43-1.215\log 1.215} + \frac{0.43}{2.29-1.645\log 1.645} + \frac{0.43}{3.15-2.075\log 2.075} + \frac{0.428}{4.008-2.504\log 2.504} \geqslant$$

$$\frac{0.43}{1.194} + \frac{0.43}{1.472} + \frac{0.43}{1.636} + \frac{0.428}{1.71} \geqslant$$

$$0.36+0.29+0.262+0.25 = 1.162 \qquad ⑤$$

由 ③④⑤ 得到

$$\int_{1}^{2\frac{7}{8}} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \geqslant 1.252$$

故有

$$\frac{32e^{\gamma}}{3}\int_{1}^{2\frac{7}{8}} \frac{dt}{2t-1-t\log t} \geqslant 23.763$$

由式 ① 和 ② 即得

$$\left(35.736\,48\int_{8}^{18} \frac{2e^{\gamma}du}{\frac{3u-8}{8}-1-\frac{3u-8}{16}\log\frac{3u-8}{16}} - \int_{7}^{8}\frac{32e^{\gamma}du}{3u-8}\right)\frac{C_{\gamma,x}x}{\log^2 x} <$$

$$\frac{8.035C_{\gamma,x}x}{\log^2 x} < \frac{7.16C_{2,x}x}{\log^2 x}$$

由于注释①中引理1的证明是错的,所以注释① 中的定理"任一充分大的偶数均可表为素数与至多三个素数的乘积之和"并没有被证明.

---

① 谢盛刚.关于表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和.数学进展,1965,8(2):209-216.

迪利克雷 L - 级数的零点密度与王元

第九章

1 迪利克雷 L - 级数的密度猜想

——维诺格拉多夫

本文的宗旨为证明下面的定理：

定理 1 命 $N_d(\sigma,t)$ 为所有模 d 的迪利克雷 L - 级数在区域 $R_e\rho\geqslant\sigma$，$|I_m\rho|\leqslant t$ 中的零点 ρ 的个数，则在区间 $D\leqslant d\leqslant 2D$ 中最多除去 $D^{1-0.5\varepsilon}$ 个整数外，皆有

$$N_d(\sigma,t)<(t\cdot\ln D)c_0\cdot\varepsilon^{-4}\cdot D^{2(1+\varepsilon)(1-\sigma)}$$

$$\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1, t\geqslant 1$$

此处 ε 为任意给定正数.

这个定理通常称为迪利克雷 L - 级数的平均密度猜想.

由定理 1 及巴尔巴恩①的工作可得：

定理 2 算术数列中的素数分布的平均渐近律

$$\sum_{d\leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\max_{(l,d)=1}\left|\pi(x,d,l)-\frac{1}{\varphi(d)}\mathrm{Li}(x)\right|\ll\frac{x}{(\ln x)^c}$$

成立，此处 c 为任意大常数而 ε 为任意小正数.

① M. B. Barban. Mat. Sbornik, 1963, 61: 418-425.

对于数论中很多问题,定理 2 可以用来代替广义黎曼猜想,特别由王元①的工作与列文②的工作可以推出:

定理 3 每个大偶数 m 可以表示为 $m = p + P_3$,此处 p 为一个素数及 P_3 为一个素因子个数不超过 3 的殆素数. 进而言之,这个方程的介数多于 $c_0 S(m)\frac{m}{\log^2 m}$,此处 $c_0 > 0$ 为一个绝对正常数及 $S(m)$ 表示奇异级数.

对于差数问题

$$2k = p - P_3, k = 1,2,\cdots$$

我们有类似的结果.

关于两项问题的上界估计,我们有:

定理 4 命 m 为一个偶数,则方程 $m = p + q$ 的素数解 p,q 的个数不超过 $(4+\varepsilon)S(m)\frac{m}{\ln^2 m}$,此处 ε 为任意正数及 $S(m)$ 表示奇异级数.

在 L - 级数的模及其零点的界之间有一些熟知的关系. $L(s,x)$ 在某区域中的零点个数为 $O(\ln Dt)$,因此由注释③的方法,类似于定理 2,我们可以证明除数函数幂 $\tau_k^n(m)$ 的中值公式

$$\sum_{d \leqslant x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \max_{(l,d)=1} \left| \sum_{\substack{m \equiv l(d) \\ m \leqslant x}} \tau_k^n(m) - A_k^n(x,d) \right| < \frac{x}{(\ln x)^c}$$

此处 k 与 n 为两个给定正整数及 $A_k^n(x,d)$ 表示 $\tau_k^n(m)$ 的和的期望主项.

这个中值公式可以用来建立一般的林尼克④公式,即:

定理 5 渐近关系

$$\sum_{m \leqslant x} \tau_k^n(m+l) \cdot \tau(m) \sim c_{k,n} x \ln k^n x$$

成立.

注意用梯其玛奇方法⑤,由定理 2 易得林尼克定理⑥的一个新证明,即证明梯其玛奇的除数问题

$$\sum_{p \leqslant x} \tau(p-l) \sim E(l) \cdot x$$

定理 1 的证明 首先,证明的主要困难在于建立下面的估计,即对于任何整数 $n \geqslant 2$ 及区间 $D^{1/n} \leqslant Z \leqslant D^{\frac{1}{n-1}}$ 中的任何 Z,不等式

$$\sum_{d=D}^{2D} \sum_{\chi_d \neq \chi_0} \left| \sum_{m \leqslant Z} \chi_d(m) \right|^{2n} \leqslant D^2 Z^n \exp[(\ln D^\varepsilon)] \qquad ①$$

---

① Wang Yuan. Acta Math. Sinica, 1960, 10:168-181.
② B. V. Levin Mat. Sbornik, 1963, 61: 389-407.
③ M. B. Barban. Mat. Sbornik, 1963, 61: 418-425.
④ Ju. V. Linnik. Abstract on intern. Math. Conf; Edinburgh, 1958.
⑤ E. C. Titchmarsh, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1930,54:414-429.
⑥ Ju. V. Linnik. The dispersion method in binary additive Problems, Leningrad Univ. Press, 1961. Providence, R. I; 1963.

成立.

这表明非主特征值的平均和不超过求和区间长度的平方根.

其次,为当 $n \geqslant 2$ 时来证明式①.本文建议的方法可以很好地处好 $n \geqslant 4$ 时的高次矩,但不能处理 $n = 2,3$ 的情况,$n = 3$ 时,估计式①是林尼克建立的,这对我们是本质上有用的.

2 表大整数为一个素数及一个殆素数之和[①]

——王元

本文我们将给某些基于假定广义黎曼猜想成立之下获得的结果以详细的证明(注释[②],[③]).首先,我们将广义黎曼猜叙于后:

(R) 所有迪利克雷 L - 函数 $L(s,\chi)$ 的零点的实部皆不大于 1/2.

由 (R) 易推出[③]

(R^*) 命 $(l,k) = 1$.则

$$\pi(x;k,l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l(\bmod k)}} 1 = \frac{\mathrm{Li}x}{\varphi(k)} + O(x^{1/2}\log x)$$

此处

$$\mathrm{Li}x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}.$$

现在将本文主要结果叙于下:

定理 1 假定 (R^*) 成立,则每个大偶数都是一个素数及一个不超过 3 个素数的乘积之和.

定理 2 假定 (R^*) 成立,则存在无穷多个素数 p 使 $p + 2^k$ 最多为 3 个素数的乘积,此处 k 为一个给定的正整数.

定理 3 假定 (R^*) 成立,则每个大奇数都可以表示为 $N = p + 2P$,此处 p 为一个素数而 P 为一个素因子个数不超过 3 的殆素数.

定理 4 命 $Z_k(x)$ 为不超过 x,形为 $(p, p + 2^k)$ 的素数对的个数,则

$$Z_k(x) \leqslant 8\prod_{\substack{p|2k \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

定理 1,2,3 改进了本文作者[④]与维诺格拉多夫[⑤]独立并同时得到的结果.

---

① 本文以前曾在"数学学报"(见 Vol.X,No.2,168-181,1960)上发表;但附录是新加的.

② Wang Yuan 1957 On Sieve Methods and Some of the Related Problems, Science Record, Vol.1, No.1: 9-11.

③ Wang Yuan 1959 On Sieve Methods and Some of Their Applications, Scientia Sinica, 8:375-381.

④ Wang Yuan 1956 On the representation of large integer as a sum of a prime and a product of at most 4 primes, Acta Mathematica Sinica, 6(4): 565-582.

⑤ Виноградов, А. И. 1957 Применение $\zeta(s)$ к решету Эратосфена, Мам. СБ, 41:49-80.

在这些结果中将 3 换成 4 即得我们原来的结果.

若将 $\pi(x;k,l)$ 换成

$$P(x;k,l) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l(\bmod k)}} \mathrm{e}^{-\frac{p\log x}{x}} \log p$$

则定理 1,2,3 可以由下面较弱的猜想(R^{**})推出来.

(R^{**}) 命 χ 为 mod D 的一个特征.则 $L(s,\chi)$ 在区域

$$|t| \leqslant \log^3 D, \sigma > \frac{1}{2} (s = \sigma + \mathrm{i}t)$$

中没有零点.

本文中,$p, p', p'', \cdots; p_1, p_2, \cdots$ 均表示素数.

引理 1 若 $x \geqslant 1$ 及 $z \geqslant 1$,则

$$\sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant z \\ (n,x)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(x)}{x} \log z + O(\log\log 3x)$$

(注释①).

引理 2 命 $f(k) = \varphi(k)\prod_{p|k} \frac{p-2}{p-1}$.若 $1 \leqslant z \leqslant x, 1 \leqslant y \leqslant x$,则

$$\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} = \frac{1}{2} \prod_{\substack{p|y \\ p>2}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p>2}\left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \log z + O(\log\log 3x)$$

证明 命 $\psi(q) = \prod_{p|q} \frac{p-2}{p-1}$.则

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{f(k)} = & \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \prod_{p|k}\left(1 + \frac{1}{p-2}\right) = \\
& \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant z \\ (k,2y)=1}} \frac{\mu^2(k)}{\varphi(k)} \sum_{q|k} \frac{1}{\psi(q)} = \\
& \sum_{\substack{q \leqslant z \\ (q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)\psi(q)} \sum_{\substack{t \leqslant z/q \\ (t,2qy)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(t)} = \\
& \sum_{\substack{q \leqslant z \\ (q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)\psi(q)} \left[\frac{\varphi(2qy)}{2qy} \log \frac{z}{q} + O(\log\log 6qy)\right] = \\
& \frac{\varphi(2y)}{2y} \sum_{\substack{q \leqslant z \\ (q,2y)=1}} \frac{\mu^2(q)}{q\psi(q)} \log z + O(\log\log 3x) = \\
& \frac{\varphi(2y)}{2y} \prod_{p \nmid 2y}\left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \log z + O(\log\log 3x) =
\end{aligned}$$

① Wang Yuan 1956 On the representation of large integer as a sum of a prime and a product of at most 4 primes, Acta Mathematica Sinica, 6(4): 565-582.

$$\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\mid y\\p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log z+O(\log\log 3x)$$

引理证完.

命 $2\leqslant y\leqslant x$ 为两个整数.命

$$(\omega)\qquad a,q;a_i(1\leqslant i\leqslant r)$$

为一个适合下面条件的整数列

$$q\leqslant x,(a,q)=1 \qquad ①$$

若 $p_i\mid y$,则 $a_i\equiv 0(\bmod p_i)$,否则 $a_i\not\equiv 0(\bmod p_i)(1\leqslant i\leqslant r)$,此处 $2<p_1<\cdots<p_r\leqslant\xi$ 为所有不超过 ξ 而又除不尽 q 的素数.

命 $P_\omega(x,q,\xi)$ 为适合下面条件的素数 p 的个数

$$p\leqslant x,p\equiv a(\bmod q),p\equiv ai(\bmod pi),\quad 1\leqslant i\leqslant r \qquad ②$$

则由孙子定理可知同余式组

$$y\equiv ai(\bmod pi),\quad 1\leqslant i\leqslant r$$

在区间 $1\leqslant y\leqslant p_1\cdots p_2$ 中有唯一的解,将这个解记为 a^*.因此 $P_\omega(x,q,\xi)$ 等于适合下面条件的素数的个数

$$p\leqslant x,p\equiv a(\bmod q),p\not\equiv a^*(\bmod p_i),\quad 1\leqslant i\leqslant r \qquad ③$$

定理 5 命 $c>0$ 及 $P=\prod_{i=1}^{r}p$.则在(R^*)成立下,估计式

$$P_\omega(x,q,\xi)\leqslant\frac{\mathrm{Li}x}{\varphi(q)\sum\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant\xi\\k/p\\(k,l)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}}+O(x^{\frac{1}{2}}\log x\cdot\xi^{2c}\log^2\xi)$$

对于(ω)一致地成立,此处 $f(k)=\varphi(k)\prod_{p\mid k}\frac{p-2}{p-1}$.

证明 记 $g(k)=\varphi(k)^{-1}$.若 $(k,y)=1$ 及 $k\mid P$,则由(R^*)可知

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\p\equiv a(\bmod q)\\p\equiv a^*(\bmod k)}}1=\frac{\mathrm{Li}x}{\varphi(q)\varphi(k)}+O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

命

$$\lambda_d=\frac{\mu(d)}{f(d)g(d)}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant\xi/d\\(k,d)=1\\k\mid P\\(k,y)=1}}\frac{\mu^2(k)}{f(k)}\Bigg/\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant\xi\\l\mid P\\(l,y)=1}}\frac{\mu^2(l)}{f(l)}$$

此处 $d\mid P$.则

$$P_\omega(x,q,\xi)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\p\equiv a(\bmod q)\\(p-a^*,P)=1}}1\leqslant\sum_{\substack{p\leqslant x\\p\equiv a(\bmod q)}}\Big(\sum_{\substack{d\mid(p-q^*,p)\\(d,y)=1}}\lambda_d\Big)^2=$$

$$\sum_{\substack{d_1 \leq \xi \\ d_1 \mid P \\ (d_1, y)=1}} \sum_{\substack{d_2 \leq \xi \\ d_2 \mid P \\ (d_2, y)=1}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a(\bmod q) \\ p \equiv a^* \left(\bmod \frac{d_1 d_2}{(d_1, d_2)}\right)}} 1 =$$

$$\frac{\mathrm{Li}x}{\varphi(q)} \sum_{\substack{d_1 \leq \xi \\ d_1 \mid P \\ (d_1, y)=1}} \sum_{\substack{d_2 \leq \xi \\ d_2 \mid P \\ (d_2, y)=1}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} \frac{g(d_1) g(d_2)}{g(d_1, d_2)} +$$

$$O\Big(x^{1/2} \log x \Big(\sum_{\substack{d \leq \xi \\ d_1 \mid P}} |\lambda_d|\Big)^2\Big) = \frac{\mathrm{Li}x}{\varphi(q)} Q + R$$

$$S = \sum_{\substack{l \leq \xi \\ l \mid P \\ (l, y)=1}} \frac{\mu^2(l)}{f(l)}$$

则

$$\lambda_k g(k) = \frac{1}{S} \sum_{\substack{m \leq \xi/k \\ (m, k)=1 \\ m \mid y \\ (m, y)=1}} \frac{\mu(k)}{f(k)} \frac{\mu^2(m)}{f(m)} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{m \leq \xi/k \\ (m, y)=(m, k)=1 \\ m \mid P}} \frac{\mu(mk) \mu(m)}{f(mk)}$$

当$(d, y) = 1$时有

$$\sum_{\substack{d \mid k \mid P \\ k \leq \xi \\ (k, y)=1}} \lambda_k g(k) = \frac{1}{S} \sum_{\substack{d \mid k \mid P \\ k \leq \xi \\ (k, y)=1}} \sum_{\substack{m \leq \xi/k \\ (m, y)=(m, k)=1 \\ m \mid P}} \frac{\mu(mk) \mu(m)}{f(mk)} =$$

$$\frac{1}{S} \sum_{\substack{r \leq \xi \\ r \mid P \\ (r, y)=1}} \frac{\mu(r)}{f(r)} \sum_{d \mid k \mid r} \mu\Big(\frac{r}{k}\Big) = \frac{1}{S} \frac{\mu(d)}{f(d)}$$

所以

$$Q = \sum_{\substack{d_1 \leq \xi \\ d_1 \mid P \\ (d_1, y)=1}} \sum_{\substack{d_2 \leq \xi \\ d_2 \mid P \\ (d_2, y)=1}} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} g(d_1) g(d_2) \sum_{d \mid (d_1, d_2)} f(d) =$$

$$\sum_{\substack{d \leq \xi \\ d \mid p \\ (d, y)=1}} f(d) \Big(\sum_{\substack{k \leq \xi \\ d \mid k \mid P \\ (k, y)=1}} \lambda_k g(k)\Big)^2 = \frac{1}{S}$$

由麦尔顿定理可知当 $d \mid P$ 及 $d \leq \xi^c$ 时

$$|\lambda_d| \leq \frac{|\mu(d)|}{|f(d) g(d)|} \leq \prod_{p \mid d} \frac{p-1}{p-2} = O(\log \xi)$$

所以

$$R = O(x^{1/2} \log x \cdot \xi^{2c} \log^2 \xi)$$

定理证完.

命 $\xi > 2$. 命 $l < c \leqslant l+1$，此处 l 为一个正整数，则

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant \xi^c\\ n\mid P\\ (n,\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant \xi^c\\ (n,2q\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\xi<p\leqslant \xi^c} \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant \xi^c\\ (n,2q\gamma)=1\\ p\mid n}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} +$$

$$\sum_{\substack{\xi<p'<p''\\ p'p''\leqslant \xi^c}} \sum_{\substack{n\leqslant \xi^c\\ p'p''\mid n\\ (n,2q\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} + \cdots +$$

$$(-1)^l \sum_{\substack{\xi<p'<\cdots<p(l)\\ p'\cdots p(l)\leqslant \xi^c}} \sum_{\substack{n\leqslant \xi^c\\ p'\cdots p(l)\\ (n,2q\gamma)=1}} \frac{|\mu(n)|}{f(n)} =$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant \xi^c\\ (n,2q\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\substack{\xi<p\leqslant \xi^c\\ (p,q\gamma)=1}} \frac{1}{f(p)} =$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant \xi^c/p\\ (n,2pq\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} + \cdots +$$

$$(-1)^l \sum_{\substack{\xi<p'<\cdots<p^{(l)}\\ p'\cdots p^{(l)}\leqslant \xi^c\\ (p'\cdots p^{(l)},q\gamma)=1}} \frac{1}{f(p')\cdots f(p^{(l)})} \sum_{\substack{n\leqslant \frac{\xi^c}{p'\cdots p^{(l)}}\\ (n,2p'\cdots p^{(l)}q\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} \qquad ④$$

若 $3 \leqslant u \leqslant 6$ 及 $x^{1/u} < q \leqslant c_0 x^{1/u}$，则我们取 $\xi = x^{1/u}/\log^{1/2} x$ 及 $c = \frac{u-2}{4} < 1$. 由引理 2 及 ④ 可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant \xi^c\\ n\mid P\\ (n,\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} = \sum_{\substack{n\leqslant \xi^c\\ (n,2q\gamma)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)} = \frac{1}{2}\prod_{\substack{p\mid q\gamma\\ p>2}} \frac{p-2}{p-1} \prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log \xi^c +$$

$$O(\log\log^3 x) =$$

$$\frac{u-2}{8u}\prod_{\substack{p\mid q\gamma\\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log x +$$

$$O(\log\log^3 x)$$

因此由定理 5 得

$$P_\omega(x,q,x^{1/u}) \leqslant P_\omega\left(x,q,\frac{x^{1/u}}{\log^{1/2} x}\right) \leqslant \Lambda(u)\frac{c_{q\gamma}x}{\varphi(q)\log^2 x} +$$

$$O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\varphi(q)}\cdot\frac{\log\log x}{\log^3 x}\right) \qquad ⑤$$

此处

$$\Lambda(u) = \frac{8u}{u-2}e^{\gamma}$$

$$c_{qy} = e^{r}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \qquad ⑥$$

其中 r 表示欧拉常数.

若 $6 \leqslant u \leqslant 13$ 及 $x^{1/u} < q \leqslant c_0 x^{1/u}$，则我们取 $\xi = x^{1/u}/\log^{12}x$ 及 $c = \frac{u-2}{4} < 3$. 因为

$$\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)} - \sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p} = O\left(\sum_{p>\xi}\frac{1}{p^2}\right) + O\left(\sum_{\substack{p>\xi\\ p\mid py}}\frac{1}{p}\right) =$$

$$O\left(\frac{1}{\xi}\right)\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)} -$$

$$\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2pqy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)} =$$

$$O\left(\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1\\ p\mid y}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}\right) =$$

$$O\left(\sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p\nmid qy}}\frac{1}{f(p)^2}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p^2\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}\right) = O\left(\frac{\log x}{\xi}\right)$$

所以

$$\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\substack{\xi<p\leqslant\xi^c\\ p+qy}}\frac{1}{f(p)}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2pqy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)} = O\left(\frac{\log x}{\xi}\right)$$

由引理 2 及 ④ 可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)} \geqslant \sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ (n'2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)} - \sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)} + O\left(\frac{\log x}{\xi}\right) =$$

$$\frac{1}{2}(2c-1-c\log c)\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log\xi +$$

$$O(\log\log x)$$

因此由定理 5 可知 ⑤ 对于

$$\Lambda(u) = \frac{2u}{\frac{u-2}{2} - 1 - \frac{u-2}{4}\log\frac{u-2}{4}}e^{r}(6 \leqslant u \leqslant 13) \qquad ⑦$$

成立.

命 U 表示方程

$$\frac{u}{4} - 2 - \frac{1}{2}\log\frac{u-2}{4} = 0$$

的根. 则

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda(u)}{\mathrm{d}u}=\Lambda'(u)\begin{cases}>0, & 13\geqslant u>U\\ <0, & U>u\geqslant 3\end{cases}$$

因此 $\Lambda(u)$ 在区间$[3,U)$ 中递减而在区间$(U,13]$ 中递增,由数值计算可知

$$7.35<U<7.4$$

命 $v>4$,若 $q=x^{1/u}$ 及 $2<u\leqslant\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{v}}$,则我们取 $c=\dfrac{v}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{u}\right)\leqslant 1$ 及 $\xi=x^{1/u}/\log^{3/c}x$. 由于

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\frac{u-2}{8u}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p(p-2)}\right)\log x+O(\log\log x)$$

所以由定理 5 得

$$P_\omega(x,q,x^{1/v})\leqslant P_\omega(x,q,\xi)\leqslant\frac{8u}{u-2}\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\frac{x}{\varphi(q)\log^2x}+O\left(\frac{xc_{qy}\log\log x}{\log^3x}\right)=$$
$$\Lambda_1(u)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2x}+O\left(\frac{xc_{qy}\log\log x}{\varphi(q)\log^3x}\right)\qquad ⑧$$

此处

$$\Lambda_1(u)=\frac{8u}{u-2}e^{\gamma}\qquad ⑨$$

若 $q=x^{1/u}$ 及

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{2}{v}}<u<\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{4}{v}}, & v>8\\ \infty, & v\leqslant 8\end{cases}$$

则我们取 $\xi=x^{1/u}/\log^3x$ 及 $c=\dfrac{v}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{u}\right)$. 由于

$$\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ n\mid P\\ (n,y)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}-\sum_{\xi<p\leqslant\xi^c}\frac{1}{p}\sum_{\substack{n\leqslant\xi^c/p\\ (n,2qy)=1}}\frac{\mu^2(n)}{f(n)}+O\left(\frac{\log x}{\xi}\right)=$$
$$\frac{1}{2v}\left[v\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)-1-\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\right]\cdot$$
$$\prod_{\substack{p\mid qy\\ p>2}}\frac{p-2}{p-1}\prod_{p>2}\frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\log x+O(\log\log x)$$

所以由定理 5 可知式 ⑧ 仍成立,但

$$\Lambda_1(u)=\frac{2ve^{r}}{v\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)-1-\frac{v}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}}\frac{2ve^{t}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)} \tag{10}$$

由于对于 $4<v<8$ 时有

$$\Lambda'_1(u)=\frac{P}{\mathrm{d}u}\Lambda_1(u)=\begin{cases}\dfrac{-16}{(u-2)^2}<0, & 0<c\leqslant 1\\ \dfrac{-\frac{v^2}{u^2}(1-\log c)}{(2c-1-c\log c)^2}<0, & 1<c\leqslant 2\end{cases}$$

所以当 $u\leqslant\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{4}{v}}$ 时,$\Lambda_1(u)$ 为一个递减函数.

定理 6 在(R^*)成立之下,估计式

$$P_\omega(x,q,x^{1/13})>25.809\,6e^{-r}\prod_{\substack{p>2\\ p\mid q\gamma}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\varphi(q)\log^2x}+O\left(\frac{xc_{q\gamma}}{\log^3x}\right)$$

对于(ω)一致地成立,此处 q 是一个给定的整数.

引理 3 命 $r\geqslant r_1\geqslant\cdots\geqslant r_n\geqslant 1$ 为一个整数集合,则在(R^*)成立之下,估计式

$$P_\omega(x,q,p_r)>\frac{E\mathrm{Li}x}{\varphi(q)}-|R|$$

对于(ω)一致地成立,此处

$$E=1-\sum_{\substack{\alpha\leqslant r\\ (p_\alpha,\gamma)=1}}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)}+\sum_{\substack{\alpha\leqslant r}}\sum_{\substack{\beta\leqslant r\\ (p_\alpha p_\beta,\gamma)=1\\ \alpha>\beta}}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)\varphi(p_\beta)}-\cdots-$$

$$\overbrace{\sum_{\alpha\leqslant r}\sum_{\beta\leqslant r_1}\sum_{\gamma\leqslant r_1}\sum_{\delta\leqslant k_2}\cdots\sum_{\mu\leqslant r_n}}^{2n+1}{}_{\substack{\alpha>\beta>\cdots>\mu\\ (p_\alpha p_\beta\cdots p_\mu,\gamma)=1}}\frac{1}{\varphi(p_\alpha)\cdots\varphi(p_\mu)}$$

$$R=O((1+r)(1+r_1)^2\cdots(r+r_n)^2x^{1/2}\log x)$$

证明 命 $P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r)=P_\omega(x,q,p_r)$.特别地,我们有 $P_\omega(q)=\pi(x,q,a)$. $P_\omega(q;p_1,\cdots,p_{r-1})$ 与 $P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r)$ 之差等于适合下面条件的素数 p 的个数

$$p\leqslant x,p\equiv a(\mathrm{mod}\ q),p\not\equiv a_i(\mathrm{mod}\ p_i)(1\leqslant i\leqslant r-1),p\equiv a_r(\mathrm{mod}\ p_r)$$

由孙子定理可知同余式组

$$\begin{cases} y \equiv a_r \pmod{p_r} \\ y \equiv a \pmod{q} \end{cases}$$

右区间 $1 \leqslant a^* \leqslant qp_r$ 中有唯一的解. 若 $p_r \nmid y$, 则 $(a^*, qp_r) = 1$; 否则 $(a^*, qp_r) > 1$. 为简单计, 我们记 (ω) 表示所有 (ω_r). 所以

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_{r-1}) - P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r) \begin{cases} = P_\omega(qp_r;p_1,\cdots,p_{r-1}), & p_r \nmid y \\ \leqslant 1, & p_r \mid y \end{cases}$$

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r) = P_\omega(q) - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ p_\alpha \nmid y}} P_\omega(qp_\alpha;p_1,\cdots,p_{\alpha-1}) - \theta r$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

运用这个公式 r 次并给予限制 $\beta \leqslant r_1$, 则得

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r) \geqslant P_\omega(q) - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ p_\alpha \nmid y}} P_\omega(qp_\alpha) + \sum_{\alpha \leqslant r} \sum_{\substack{\beta \leqslant r_1 \\ \alpha > \beta \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1}} P_\omega(qp_\alpha p_\beta;p_1,\cdots,p_{\beta-1}) -$$

$$\theta(r + rr_1), 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

命 $r \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_n \geqslant 1$ 为一个整数列, 由于

$$P_\omega(qp_\alpha,\cdots,p_\mu;p_1,\cdots,p_{\mu-1}) \leqslant P_\omega(qp_\alpha \cdots p_\mu)$$

所以

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r) \geqslant P_\omega(q) - \sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ (p_\alpha, y)=1}} P_\omega(qp_\alpha) +$$

$$\sum_{\alpha \leqslant r} \sum_{\substack{\beta \leqslant r_1 \\ \alpha > \beta \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1}} P_\omega(qp_\alpha p_\beta;p_1,\cdots,p_{\beta-1}) - \theta(r + rr_1) \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

命 $r \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_n \geqslant 1$ 为一个整数列, 由于

$$P_\omega(qp_\alpha \cdots p_\mu;p_1,\cdots,p_{\mu-1}) \leqslant P_\omega(qp_\alpha \cdots p_\mu)$$

所以

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r) \geqslant P_\omega(q) - \sum_{\substack{\alpha \leqslant r \\ (p_\alpha, y)=1}} P_\omega(qp_\alpha) +$$

$$\sum_{\alpha \leqslant r} \sum_{\substack{\beta \leqslant r_1 \\ \alpha > \beta \\ (p_\alpha p_\beta, y)=1}} P_\omega(qp_\alpha p) - \cdots -$$

$$\overbrace{\sum_{\alpha \leqslant r} \sum_{\beta \leqslant r_1} \cdots \sum_{\substack{\mu \leqslant r_n \\ \alpha > \beta > \cdots > \mu \\ (p_\alpha p_\beta \cdots p_\mu, y)=1}}}^{2n+1} P_\omega(qp_\alpha,\cdots,p_\mu) -$$

$$(1 + r)(1 + r_1)^2 \cdots (1 + r_n)^2$$

因我们已假定 (R^*) 成立, 所以

$$P_\omega(q;p_1,\cdots,p_r) \geqslant \frac{E\mathrm{Li}x}{\varphi(q)} - |R|$$

引理成立.

定理6的证明 命 ε 为一个足够小的正数,命 $h = \frac{55}{33} + \varepsilon$.则存在 δ_0 使当 $\delta > \delta_0$ 时

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{\delta < p \leqslant 8^h \\ p \nmid q\gamma}} \frac{1}{\varphi(p)} < \log(h + \varepsilon) < 0.452 = \tau \\ \prod\limits_{\substack{\delta < p \leqslant 8^h \\ p \nmid q\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\varphi(p)}\right)^{-1} < h + \varepsilon < 1.572 = \lambda \end{cases}$$

命 $p_r = p_{r_1}$ 表示不超过 $x^{1/13}$ 的最大素数.若 $2 \leqslant k \leqslant t+1$,我们用 p_{rk} 表示不超过 $\frac{1}{x_{13}h^{k-1}}$ 的最大素数,此处 p_{n+1} 具有性质 $p_{n+1}^{1/h} < \delta_0 \leqslant p_{n+1}$.命 n 为满足 $2n > 2t + r_{t+1}$ 的一个整数,命 $r_k = r_{t+1}(t+1 \leqslant k \leqslant n)$.则我们得(注释①)

$$P_\omega(x,q,x^{1/13}) > \frac{E\mathrm{Li}x}{\varphi(q)} - |R|$$

此处

$$E > (1 - 0.007\,319\,3) \prod_{\substack{2 < p \leqslant x^{1/13} \\ p \nmid q\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\varphi(p)}\right) >$$

$$25.809\,6\mathrm{e}^{-\gamma} \prod_{\substack{p \mid q\gamma \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{c_{q\gamma}}{\log^2 x}\right)$$

$$R = O(x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{13}+\frac{2}{13h}+\frac{2}{13h^2}+\cdots}\log x) = O(x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{13}+\frac{2}{13(h-1)}}\log x) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

故得定理.

定理7 命 α,β 为两个满足 $8 > \beta > 4$ 与 $\beta \geqslant \alpha > 2$ 的正数,则

$$\sum_{\substack{x^{1/\beta} < p \leqslant x^{1/\alpha} \\ p \nmid q\gamma}} P_\omega(x,pq,x^{1/\beta}) \leqslant \left(\frac{c_{q\gamma}}{\varphi(q)} \int_\alpha^\beta \frac{\Lambda_1(u)}{u} \mathrm{d}u\right) \frac{x}{\log^2 x} + 0\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x} \log\log x\right)$$

此处 q 是一个给定正整数.

---

① Wang Yuan 1956 On the representation of large integer as a sum of a prime and a product of at most 4 primes, Acta Mathematica Sinica, 6(4): 565-582.

证明 命 $n=[\log x]$, $u_l=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}l(0\leqslant l\leqslant n)$. 则

$$\sum_{\substack{x^{1/\beta}<p\leqslant x^{1/\alpha}\\ p\nmid q\gamma}} P_\omega(x,pq,x^{1/\beta})=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p\nmid q\gamma}} P_\omega(x,x^{\frac{\frac{1}{\log x}}{\log pq}},x^{1/\beta})=\sum_{l=0}^{n-1}T_l$$

$$T_l=\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p\nmid q\gamma}} P_\omega(x,x^{\frac{\frac{1}{\log x}}{\log pq}},x^{1/\beta})\leqslant$$

$$\sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{l+1}}}<p\leqslant x^{\frac{1}{u_l}}\\ p\nmid q\gamma}}\Lambda_1\left(\frac{\log x}{\log pq}\right)\frac{c_{q\gamma}x}{\varphi(p)\varphi(q)\log^2 x}+$$

$$O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\log\frac{u_{l+1}}{u_l}\right)$$

因 $\Lambda_1\left(u+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)=\Lambda_1(u)+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$ 及 $\Lambda_1(u)$ 是一个递减函数,所以

$$T_l\leqslant\Lambda_1(u_l)\frac{c_{q\gamma}x}{\varphi(q)\log^2 x}\log\frac{u_{l+1}}{u_1}+O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\log\frac{u_{l+1}}{u_l}\right)$$

因为

$$\sum_{l=0}^{n-1}\Lambda_1(u_l)\log\frac{u_{l+1}}{u_l}-\int_\alpha^\beta\frac{\Lambda_1(u)}{u}\mathrm{d}u\leqslant$$

$$\sum_{l=0}^{n-1}(\Lambda_1(u_{l+1})-\Lambda_1(u_l))\max_{0\leqslant l\leqslant n-1}\log\frac{u_{l+1}}{u_l}=$$

$$O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

所以

$$\sum_{l=0}^{n-1}T_l\leqslant\left(\frac{c_{q\gamma}}{\varphi(q)}\int_\alpha^\beta\frac{\Lambda_1(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

定理证完.

定理 8 命 $3\leqslant\alpha<\beta\leqslant 13$ 为两个给定的数. 则

$$P_\omega(x,q,x^{1/\alpha})\geqslant P_\omega(x,q,x^{1/\beta})-\frac{c_{q\gamma}x}{\varphi(q)\log^2 x}\int_\alpha^\beta\frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u+$$

$$O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

此处 q 是一个给定的正整数.

证明 显然我们可以假定 $\alpha<U<\beta$. 我们估计 $P_\omega(x,q,x^{1/\beta})-P_\omega(x,q,x^{1/U})$ 与 $P_\omega(x,q,x^{1/U})-P_\omega(x,q,x^{1/\alpha})$.

$P_\omega(x,q,p_m)$ 与 $P_\omega(x,q,p_{m+1})$ 之差为适合下面条件

$$p \leqslant x, p \equiv a(\bmod q), p \not\equiv a_i(\bmod p_i)(i \leqslant m), p \equiv a_{m+1}(\bmod p_{m+1})$$

的素数个数,若 $p_{m+1} \nmid y$,则由定义可知它等于 $P_\omega(x, qp_{m+1}, p_m)$;否则它等于0或1,所以

$$P_\omega(x,q,p_m) - P_\omega(x,q,p_{m+1})\begin{cases} = P_\omega(x, qp_{m+1}, p_m), & p_{m+1} \nmid y \\ \leqslant 1, & p_{m+1} \mid y \end{cases}$$

将 $x^{1/U}$ 与 $x^{1/\alpha}$ 之间的素数排列为

$$p_t \leqslant x^{1/U} < p_{t+1} < \cdots < p_s \leqslant x^{1/\alpha} < p_{s+1}$$

则

$$P_\omega(x,q,x^{1/U}) = P_\omega(x,q,x^{1/\alpha}) + \sum_{\substack{t \leqslant i < s \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_\omega(x, p_{i+1}, q, p_i) + O(1)$$

命 $n = [\log x]$ 及 $u_m = \alpha + \dfrac{U-\alpha}{n}m(0 \leqslant m \leqslant n)$,并置

$$T = \sum_{\substack{t \leqslant i < s \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_\omega(x, qp_{i+1}, p_i) = \sum_{m=0}^{n-1} T_m$$

由于 $p_i < qp_{i+1} < 4qp_i$ 及 $\Lambda(u)$ 为区间(α, U)中的递减函数,所以

$$T_m = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{m+1}}} < p_{i+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_m}} \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_\omega(x, qp_{i+1}, p_i) = \sum_{\substack{x^{\frac{1}{u_{m+1}}} < p_{i+1} \leqslant x^{\frac{1}{u_m}} \\ p_{i+1} \nmid qy}} P_\omega(x, qp_{i+1}, x^{\frac{\log p}{\log x}}) \leqslant$$

$$\Lambda(u_m)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x}\log\frac{u_{m+1}}{u_m} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x \log\frac{u_{m+1}}{u_m}\right)$$

因

$$\sum_{m=0}^{n-1}\Lambda(u_m)\log\frac{u_{m+1}}{u_m} - \int_\alpha^U \frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

所以

$$T \leqslant \left(\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)}\int_\alpha^U \frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

因此

$$P_\omega(x,q,x^{1/U}) \leqslant P_\omega(x,q,x^{1/\alpha}) + \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)}\int_\alpha^U \frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

类似地,我们有

$$P_\omega(x,q,x^{1/\beta}) \leqslant P_\omega(x,q,x^{1/U}) + \left(\frac{c_{qy}}{\varphi(q)}\int_U^\beta \frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{x}{\log^2 x} +$$

$$O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

故定理得证.

命 $4 < v < 8, 2 < u \leqslant v$ 为两个给定正数,命 M 表示适合下面条件的素数集合

$$p \leqslant x, p \equiv a(\bmod q), p \not\equiv a_i(\bmod p_i), \quad i \leqslant s$$
$$p \not\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}), \quad j \leqslant t-s \tag{11}$$

此处 $p_s \leqslant x^{1/v} < p_{s+1}, p_t \leqslant x^{1/u} < p_{t+1}$ 及 q 为一个给定正整数.

M 的元素个数记为 $M_\omega(x, x^{\frac{1}{v}}, x^{\frac{1}{u}})$.

引理 4 存在诸整数列(ω_j)使 M 中至少适合同余式

$$p \not\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}), \quad 1 \leqslant j \leqslant t-s \tag{12}$$

中的 l 个的元素个数不超过

$$\frac{1}{l}\sum_{\substack{j \leqslant t-S \\ p_{s+j} \nmid y}} P_{\omega F}(x, qp_{s+j}, x^{1/v})$$

证明 命 Γ_j 为 M 的子集,其元素适合同余式

$$p \equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j})$$

现在我们来估计 Γ_j 的元素个数. 若 $p_{s+j} \mid y$,则 Γ_j 的元素个数为 0 或 1. 假定 $p_{s+j} \nmid y$. 记同余方程组

$$\begin{cases} n \equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}) \\ n \equiv a(\bmod q) \end{cases}$$

的解为 $\bar{a}_{s+j}$. 命

$$(\omega_j) \qquad \bar{a}_{s+j}, qp_{s+j}; a_i(1 \leqslant i \leqslant t)$$

则 Γ_j 的元素个数不超过 $P_{\omega_j}(x, qp_{s+j}, x^{1/v})$.

若 M 的元素至少适合 ⑫ 中 l 个同余式,则它至少属于 l 个不同的Γ_j. 因此 M 的元素,它至少适合 ⑫ 中 l 个同余式者的个数不超过

$$\frac{1}{l}\sum_{\substack{j \leqslant t-s \\ p_{s+j} \nmid y}} P_{\omega j}(x, qp_{s+j}, x^{1/v})$$

故得引理.

定理 9 M 中的元素至少满足 ⑫ 中的 m 个同余式者之个数不少于

$$P_\omega(x, q, x^{1/v}) - \frac{1}{m+1}\left(\int_u^v A_1(t)\frac{\mathrm{d}z}{z}\right)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{qy}x}{\log^3 x}\log\log x\right) \tag{13}$$

证明 由于

$$P_\omega(x,q,x^{1/v}) - M_\omega(x,x^{1/v},x^{1/u}) \leqslant \sum_{j\leqslant t-s}\ \sum_{\substack{p\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}^2)\\ p\leqslant x}} 1 \leqslant$$

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant t-s}\left(\frac{x}{p_{s+j}^2}+1\right) =$$

$$O(x^{1/u}) + O(x^{1-1/v})$$

所以由引理4与定理7可知 M 的元素至少适合 ⑫ 中的 m 个同余式者之个数不少于

$$M_\omega(x,x^{1/v},x^{1/u}) - \frac{1}{m+1}\sum_{\substack{j\leqslant t-s\\ p_{s+j}\nmid y}} P_{\omega j}(x,qp_{s+j},x^{1/v}) + O(1) \geqslant$$

$$P_\omega(x,q,x^{1/v}) - \frac{1}{m+1}\left(\int_u^v \Lambda_1(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}\right)\frac{c_{qy}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{\gamma q}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

定理证完.

由定理6及定理8可知

$$P_\omega(x,q,x^{1/6}) > \left(25.809\,6 - \int_6^{13}\frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{c_{\gamma q}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\right) >$$

$$8.4\frac{c_{\gamma q}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

(i) 命 $x=y$ 为偶数.命

(ω_1) $\qquad a=1,q=2;a_i=x,\quad i=1,2,\cdots$

由 ⑨ 可知存在正常数 x_1,使当 $x>x_1$ 时有

$$P_{\omega 1}(x,2,x^{1/6}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6\frac{\Lambda_1(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right) >$$

$$(8.4-6.588)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x} + O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right) >$$

$$\frac{c_{2x}x}{\log^2 x} > 1$$

因此由定理9可知当 $x>x_1$ 时,存在一个素数 p 满足 $1<p<x-1$ 及 $x-p$ 没有小于等于 $x^{1/6}$ 的素因子,在区间 $x^{1/6}<p'\leqslant x^{1/3}$ 中最多2个素因子,因此 $x-p$ 为不超过3个素数的乘积.因为 $x=p+x-p$,故得定理.

(ii) 命 $x=y$ 为一个奇数.命

(ω_2) $\qquad a=x-2,q=4;a_i=x,\quad i=1,2,\cdots$

则由 ⑨ 可知存在正常数 x_2,使当 $x>x_2$ 时有

$$P_\omega(x,4,x^{1/6}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6\frac{\Lambda_1(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{c_{4x}x}{2\log^2 x} + O\left(\frac{c_{4x}x}{\log^3 x}\log\log x\right) > \frac{c_{4x}x}{2\log^2 x} > 2$$

因此由定理 9 可知当 $x > x_2$ 时，存在一个素数 p 满足 $p < x - 3$ 及 $\frac{x-p}{2}$ 没有小于等于 $x^{1/6}$ 的素因子，它在区间 $x^{1/6} < p' \leqslant x^{1/3}$ 中最多只有 2 个素因子，因此 $\frac{x-p}{2}$ 为一个不超过 3 个素数的乘积，故得定理 3.

(iii) 命 k 为一个正整数. 命

$$(\omega_3) \qquad a = 1, q = 2; a_i = -2k, \quad i = 1,2,3,\cdots$$

则由 ⑨ 可知存在一个正常数 x_3 使当 $x > x_3$ 时，有

$$P_\omega(x,2,x^{1/6}) - \frac{1}{3}\left(\int_3^6 \frac{\Lambda_1(u)}{u}\mathrm{d}u\right)\frac{c_{4k}x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right) > \frac{c_{4k}x}{\log^2 x}$$

所以由 ⑨ 可知，当 $x > x_3$ 时存在不少于 $\frac{c_{4k}x}{\log^2 x}$ 个素数 p 满足 $1 < p \leqslant x$ 及 $p + 2k$ 最多只有 3 个素因子，故得定理 2.

取 $c = 1$. 则由引理 2 与定理 5 可知

$$P_{\omega_2}\left(x,2,\frac{x^{1/4}}{\log^3 x}\right) \leqslant 8\prod_{\substack{p \mid 2k \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

由于

$$Z_k(x) = \sum_{\substack{p < \frac{x^{1/4}}{\log^3 x} \\ p+2k=p'}} 1 + \sum_{\substack{\frac{x^{1/4}}{\log^3 x} < p \leqslant x \\ p+2k=p'}} 1 \leqslant O(x^{1/4}) + P_{\omega_3}\left(x,2,\frac{x^{1/4}}{\log^3 x}\right) \leqslant 8\prod_{\substack{p \mid 2k \\ p > 2}} \frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\log\log x\right)$$

故得定理 4.

附　　录

(1) 我们将弱广义黎曼猜想叙述于下：

(R_δ) 所有迪利克雷 L - 函数 $L(s,\chi)$ 的所有零点的实部皆不大于 δ^{-1}，此处 $1 < \delta \leqslant 2$.

特别地，(R_2) 就是熟知的广义黎曼猜想.

为简单计，我们将下面的命题记为 $(1, A)$：

每个充分大的偶数皆为一个素数及一个素因子个数不超过 A 的殆素数之和.

在此我们陈述下面改进得更精密的结果：

定理 10 (1,3) 可以由(R_{δ_1}) 推出来，此处 $\delta_1 \geqslant 2.475/1.475$ 及(1,4) 可以从(R_{δ_2}) 推出来，此处 $\delta_2 \leqslant 3.237/2.237$.

所有以下的结果都是在假设(R_δ) 之下推出来的，不再声明.

(2) 命 $\eta = \frac{\delta}{\delta - 1}$，则 $x^{1/u} \leqslant q \leqslant c_0 x^{1/u}$，此处 c_0 为一个常数，则估计式对于

$$P_\omega(x, q, x^{1/u}) \leqslant \Lambda(u) \frac{c_{q\gamma} x}{\varphi(q) \log^2 x} + O\left(\frac{c_{q\gamma} \log\log x}{\varphi(q) \log^3 x}\right) \tag{14}$$

对于(ω) 一致成立，此处

$$\Lambda(u) = \frac{4\eta n}{u - \eta} e^r, \quad \eta < u \leqslant 3\eta \tag{15}$$

及

$$\Lambda(u) = \frac{4ue^r}{\frac{u-\eta}{\eta} - 1 - \frac{u-\eta}{2\eta} \log \frac{u-\eta}{2\eta}}, \quad 3\eta < u \leqslant 7\eta \tag{16}$$

(3) 命 $v > 2\eta$ 为一个给定的数及 $q = x^{1/u}$，则

$$P_\omega(x, q, x^{1/v}) \leqslant \Lambda_1(u) \frac{c_{q\gamma} x}{\varphi(q) \log^2 x} + O\left(\frac{x c_{q\gamma} \log\log x}{\varphi(q) \log^3 x}\right) \tag{17}$$

对于(ω) 一致成立，此处

$$\Lambda_1(u) = \frac{4\eta u}{u - \eta} e^r \tag{18}$$

对于 $\eta < u \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{2}{v}}$ 成立，及

$$\Lambda_1(u) = \frac{2ve^r}{v\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{u}\right) - 1 - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{u}\right) \log \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{u}\right)} \tag{19}$$

对于

$$\frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{2}{v}} < v < \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{\eta} - \frac{4}{v}}, & v > 4\eta \\ \infty, & v \leqslant 4\eta \end{cases}$$

成立.

(4) 命 q 为一个整数. 则

$$P_\omega(x, q, x^{1/6.5\eta}) > \lambda(6.5\eta) \frac{c_{q\gamma} x}{\varphi(q) \log^2 x} + O\left(\frac{x c_{q\gamma}}{\log^3 x}\right) \tag{20}$$

此处

$$\lambda(6.5\eta) \geqslant 2\eta \cdot 6.453\,306 \tag{21}$$

证明类似于定理 6 的证明，本质的差别为在此我们取 $\tau = 0.452$ 与 $\lambda = 1.5715$，从而获得更为准确的估计

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}[(k+1)\tau]^{2k+4}}{(2k+4)!} < \sum_{k=0}^{6} \frac{\lambda^{k+1}[(k+1)\tau]^{2k+4}}{(2k+4)!} + \frac{\lambda^{8}(8\tau)^{18}}{18!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\tau^2 e^2}{4}\cdot\frac{656i}{6\,080}\right)^{k} < 0.007\,183\,682$$

(5) 命 $\eta < \alpha < \beta \leqslant 6.5\eta$ 为两个正数. 命 q 为一个正整数. 则

$$P_{\omega}(x,q,x^{1/\alpha}) \geqslant P_{\omega}(x,q,x^{1/\beta}) - \frac{c_{q\gamma}x}{\varphi(q)\log^2 x}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u + O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\right) \tag{22}$$

(6) 命 u, v 为两个数满足 $2\eta < v < 10\eta$ 与 $\eta < u < v$. 命 M 表示适合下面条件的素数 p 的集合

$$p \leqslant x, p \equiv a(\bmod q), p \not\equiv a_i(\bmod p_i),\quad i \leqslant s$$
$$p \not\equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}^2),\quad i \leqslant t-s \tag{23}$$

此处，$p_s \leqslant x^{1/v} < p_{s+1}, p_t \leqslant x^{1/u} < p_{t+1}$ 及 q 为一个整数，则最多适合同余式

$$p \equiv a_{s+j}(\bmod p_{s+j}),\quad 1 \leqslant j \leqslant t-s \tag{24}$$

中的 m 个的 M 的元素个数不少于

$$P_{\omega}(x,q,x^{1/v}) - \frac{1}{m+1}\left(\int_u^v \Lambda_1(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}\right)\frac{c_{q\gamma}x}{\varphi(q)\log^2 x} + O\left(\frac{c_{q\gamma}x}{\log^3 x}\log\log x\right) \tag{25}$$

(7) 计算积分。

(i) $$\Delta_1 = \int_{5\eta}^{6.5\eta}\frac{\Lambda(u)}{u}\mathrm{d}u = 2e^{r}\int_{5\eta}^{6.5\eta}\frac{\mathrm{d}u}{\frac{u-\eta}{\eta} - 1 - \frac{u-\eta}{2\eta}\log\frac{u-\eta}{2\eta}} =$$
$$2\eta e^{r}\int_4^{5.5}\frac{\mathrm{d}w}{w - 1 - \frac{w}{2}\log\frac{w}{2}} = 2\eta e^{r}\int_4^{5.5} f(w)\mathrm{d}w <$$
$$2\eta e^{r}\left(\sum_{i=0}^{1} f(4+0.02i) + \sum_{j=0}^{2} f(5.46+0.02j)\right) <$$
$$2\eta e^{r}\cdot 0.890\,506\,52$$

(ii) 在(3)中命 $v = 5\eta$. 则

$$\Delta_2 = \int_{\frac{5\eta}{3}}^{5\eta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}\mathrm{d}u =$$
$$\int_{\frac{5\eta}{3}}^{5\eta}\frac{2ve^{r}}{v\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right) - 1 - \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)\log\frac{v}{2}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{u}\right)}\frac{\mathrm{d}u}{u} =$$

$$20\eta e^{\gamma}\int_{1}^{2}\frac{dz}{(5-2z)(2z-1-z\log z)}=$$

$$20\eta e^{\gamma}\int_{1}^{2}g(z)dz<20\eta e^{\gamma}\Big(\sum_{i=0}^{7}g(1+0.02i)+\sum_{j=0}^{41}g(1.18+0.02j)\Big)<$$

$$20\eta e^{\gamma}\cdot 0.397\,237\,1$$

(8) 定理 10 的证明，命 $x=\gamma$ 为一个偶数，命

$$(\omega)\qquad a=1,q=2;a_i=x,\quad i=1,2,\cdots$$

(i) 命 $\eta=2.475$. 则由(2) ~ (7) 可知存在常数 x_1，使 $x>x_1$ 时

$$P_{\omega}(x,2,x^{1/5\eta})-\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{15\eta}{5\eta-1}}^{5\eta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>$$

$$P_{\omega}(x,2,x^{1/6.5\eta})-\left(\int_{5\eta}^{6.5\eta}\frac{\Lambda(u)}{u}du+\frac{1}{2}\int_{\frac{15\eta}{5\eta-1}}^{5\eta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+$$

$$O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}\log\log x\right)>$$

$$2\eta[6.453\,306-e^{\gamma}(0.890\,506\,52+1.986\,185\,5+0.738\,218)]\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+$$

$$O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>$$

$$0.05\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}\log\log x\right)>1$$

故由(6) 可知当 $x>x_1$ 时，存在一个素数 p 满足 $p<x-1$ 及 $x-p$ 没有小于等于 $x^{5\eta}$ 的素因子而它在区间 $x^{5\eta}<p'\leqslant x^{\frac{5\eta-1}{15\eta}}$ 中最多只有一个素因子，因此 $x-p$ 为一个最多 3 个素数的乘积. 故得(1,3).

(ii) 命 $\eta=3.237$. 则由(2) ~ (7) 可知存在 x_2，当 $x>x_2$ 时有

$$P_{\omega}(x,2,x^{1/5\eta})-\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{20\eta}{5\eta-1}}^{5\eta}\frac{\Lambda_1(u)}{u}du\right)\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>$$

$$0.01\frac{c_{2x}x}{\log^2 x}+O\left(\frac{c_{2x}x}{\log^3 x}\log\log x\right)>1$$

因此由(6) 可知当 $x>x_2$ 时，存在一个素数 p 满足 $p<x-1$ 及 $x-p$ 没有素因子小于等于 $x^{\frac{1}{5\eta}}$，而在区间 $x^{\frac{1}{5\eta}}<p'\leqslant x^{\frac{5\eta-1}{20\eta}}$ 中最多只有一个素因子. 因此 $x-p$ 为一个最多 4 个素数的乘积，故得(1,4).

(9) 可知，在定理 10 的证明中，猜想(R_δ) 可以换成

$$(\bar{R}_\delta)\qquad \sum_{D\leqslant x^{1/\eta}}\mu^2(D)\,l\max_{\substack{(\bmod D)\\(l,D)=1}}\left|\pi(x,D,l)-\frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(D)}\right|=O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)$$

此 A 为任意常数而与"O" 有关的常数仅依赖于 δ 于 A. 类似地，(R_δ) 可以换成

$$(\bar{\bar{R}}_\delta) \qquad \sum_{D\leqslant x^{1/\eta}} \mu^2(D) l \max_{\substack{(\bmod D)\\ (l,D)=1}} \left| P(x,D,l) - \frac{x}{\varphi(D)\log x} \right| = O\left(\frac{x}{\log^A x}\right)$$

此处 $P(x,D,l) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\bmod D)}} \log p \cdot e^{-\frac{\log x}{x}p}$(注释①②).

巴尔巴恩③④首先证明了$(\bar{\bar{R}}_{1,2})$.以后,潘承洞⑤又独立地证明了$(\bar{\bar{R}}_{1,5})$,并由此导出(1,5).由定理10,我们能够由$(\bar{\bar{R}}_{1\cdot 5})$推出(1,4).换言之,我们证明了:

定理 11 每个充分大的偶数都是一个素数及一个不超过4个素数的乘积之和.

注 (1,4)也被潘承洞与巴尔巴恩独立地加以证明.但他们的证明方法比这里复杂得多,事实上,他们的证明分别依赖于$(\bar{\bar{R}}_{1\cdot 6})$与$(\bar{R}_{1\cdot 6})$(注释⑥).我感谢潘承洞与巴尔巴恩先生,他们友好地将他们的结果告诉了我.

3 表偶数为素数及殆素数之和⑦

——潘承洞

设 N 为大偶数,$V(m)$ 为 m 的素因子的个数,在1948年 A.Renyi 证明了

$$N = a + b$$

这里,$V(a)=1, V(b)\leqslant K$,K 为一绝对常数.在广义黎曼猜测下王元证明了 $K\leqslant 3$.本文证明了 $K\leqslant 5$,即证明了下面的定理:

定理 1 任一充分大的偶数 N 可表成 $p+P$ 之和,其中 p 为素数,P 为一个不超过5个素因子的乘积的殆素数.

定理的证明依赖于下面的基本定理.

基本定理 令

$$P_1(N,D,l) = \sum_{\substack{p\leqslant N(\bmod D)\\ p\equiv l}} \log p \cdot e^{-p\frac{\log N}{N}} = \frac{N}{\varphi(D)\log N} + R_D(N) \qquad ①$$

$$(l,D)=1$$

① Реньи, А. 1948 Опредставлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа, ИАН, СССР2, 57-78.
② Pan Chin Tong. 1962 On the representation of larg even integer as a sum of a prime and an almost prime, Acta Math. Sinica, Vol. 12, No. 1, 95-106.
③ Барбан, М. Б. 1961 Арифметические функции на Редких множествах, Доклады Акадежии Наук УЗССР, 8, 9-11.
④ Барбан, М. Б. 1961 Новые применении большого Решета Ю. В. Линника, Труды Института Мамежамики, им. В. И. Романобского, вып. 22.
⑤ Pan Chin Tong. 1962 On the representation of larg even integer as a sum of a Prime and an almost Prime, Acta Math. Sinica, Vol. 12, NO. 1, 95-106.
⑥ Линник, Ю. В. 1960 Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди Литтльвуда, NAH СССР, Том 24, No5, 629-706.
⑦ 王元同志对本文提出了很宝贵的意见,谨此致谢.

则

$$\sum_{d \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} |\mu(d)\tau(d)R_a(N)| \leqslant \frac{N}{\log^5 N} \qquad ②$$

这里 ε 为任意小之正数，$\tau(d)$ 为除数函数.

基本定理的证明主要依赖于有关 L - 函数的零点密度的估计.

我们要采用下面的记号：

$C_1, C_2, \cdots$—— 正的绝对常数；

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$—— 任意小的正常数；

B—— 表示其模为有界量，不是各处都相同的；

$p, p_1, p_2, \cdots$—— 奇素数；

$\chi_D(n)$—— 模 D 的特征；

$\chi_D^0(n)$—— 模 D 的主特征；

$\rho_{\chi_D} = \beta_{\chi_D} + i\tau_{\chi_D}$——$L(s, \chi_D)$ 的零点；

N—— 充分大的偶数.

定理 2 设 $N(\triangle, T, D)$ 记作所有属于模 D 的 $L(s, \chi_D)$ 在下面的矩形(R)内的零点的个数(计算它们的重数)

$$\triangle \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T$$

这里 $\triangle \geqslant 1/2$，则有

$$N(\triangle, T, D) < C_{15} D^{(2+4c)(1-\triangle)} T^3 \log^6 DT$$

这里 C 由下式确定

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_D\right) \right| \leqslant 3D^C(|t| + 1)$$

$C \leqslant 1/4 + \varepsilon_1$(参考引理 1).

这里的结果当矩形 R 的面积远小于模 D 时，它优于 Tatugawa 的结果

我们要用到下面的引理.

引理 1 设 $0 \leqslant \alpha < \beta < 2$，$f(s)$ 除了 $s = 1$ 这点外在 $\sigma \geqslant \alpha$ 时是解析的，当 s 为实数时，$f(s)$ 为实数，且有

$$|\operatorname{Re} f(2 + it)| \geqslant m > 0$$

及

$$|f(\sigma' + it')| \leqslant M_{\sigma,t}, \quad \sigma' \geqslant \sigma, 1 \leqslant i \leqslant t$$

则当 T 不是 $f(s)$ 的零点的纵坐标时，有

$$|\arg f(\sigma + iT)| \leqslant \frac{\pi}{\log\left(\dfrac{\pi - \alpha}{\pi - \beta}\right)} \left(\log M_{\alpha, T+2} + \log \frac{1}{m}\right) + \frac{3\pi}{2}$$

对 $\sigma \geqslant \beta$.

引理 2　存在 $C \leqslant \frac{1}{4} + \varepsilon_1$ 使下面估计式成立

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t, \chi_D\right) \right| \leqslant 3D^{0}(|t| + 1), \quad \chi_D \neq \chi_D^0$$

证明　熟知任一特征 $\chi_D(n)$ 可表成 $\chi_D(n) = \chi_{D_1}^0(n)\chi_{D_2}(n)$，这里 $\chi_{D_2}(n)$ 为模 D_2 的原特征，$(D_1, D_2) = 1, D_1D_2 \leqslant D$.

设 $s = \frac{1}{2} + \mathrm{i}t$，我们有下面的恒等式

$$\sum_{n \geqslant z} \frac{\chi_D(n)}{n^s} = \sum_{\substack{n \geqslant z \\ (n, D_1) = 1}} \frac{\chi_{D2}(n)}{n^s} = \sum_{d \mid D_1} \frac{\chi_{D_2}(d)\mu(d)}{d^s} \sum_{nd \geqslant z} \frac{\chi_{D_2}(n)}{n^s} \tag{3}$$

而

$$\left| \sum_{nd \geqslant z} \frac{\chi_{D_2}(n)}{n^s} \right| \leqslant \int_{\frac{z}{d}}^{\infty} \left| \sum_{\frac{z}{d} \leqslant n < u} \chi_{D_2}(n) \right| \cdot |\mathrm{d}u^{-s}| < 2|s|\sqrt{D_2}\log D_2\left(\frac{z}{d}\right)^{-\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$2(|t| + 1)\sqrt{D}\log D\left(\frac{z}{d}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

由 ④ 及 ③ 推出

$$\left| \sum_{n \geqslant z} \frac{\chi_D(n)}{n^s} \right| \leqslant 2(|t| + 1)\sqrt{D}\log D\tau(D_1)z^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

另一方面

$$|L(s, \chi_D)| \leqslant \left| \sum_{n \leqslant t} \frac{\chi_D(n)}{n^s} \right| + \sum_{n > z} \frac{\chi_D(n)}{n^s} \tag{6}$$

取 $z = \sqrt{D}$，从 ⑤，⑥ 得

$$|L(s, \chi_D)| \leqslant D^{\frac{1}{4}} + 2(|t| + 1)D^{\frac{1}{4} + \varepsilon_1} \leqslant 3(|t| + 1)D^{\frac{1}{4} + \varepsilon_1}$$

引理 3　设

$$\rho_{\chi D}(s, z) = \rho_{\chi D}(s) = \sum_{n \leqslant z} \frac{\mu(n)\chi_D(n)}{n^s}$$

这里 $z \geqslant D\log D$，则

$$\sum_{\chi_D} \left| \rho_{\chi_D}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) \right|^2 \leqslant C_1 z + \varphi(D)\log z$$

证明

$$\sum_{\chi_D} \left| \rho_{\chi_D}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) \right|^2 = \sum_{\chi_D} \sum_{n \leqslant z} \frac{\mu(n)\chi_D(n)}{n^{1+s+\mathrm{i}t}} \sum_{m \leqslant z} \frac{\mu(m)\overline{\chi_D}(m)}{m^{\frac{1}{2} - \mathrm{i}t}} \leqslant$$

$$\varphi(D)\sum_{n \leqslant z} \frac{\mu^2(n)}{n} + 2\varphi(D) \sum_{\substack{m < n \leqslant z \\ n \equiv m \pmod D}} \frac{1}{(nm)^{\frac{1}{2}}} \leqslant$$

$$\varphi(D)\log z + C_1 z$$

引理 4 设

$$f_{\chi_D}(s,z) = f_{\chi_D}(s) = L(s,\chi_D)\rho_{\chi_D}(s) - 1,\quad 0 < \delta < 1$$

则

$$\sum_{\chi_D} | f_{\chi_D}(1+\delta+\mathrm{i}t) |^2 \leqslant C_4\left(\frac{D}{z}\delta^{-1}\log^3 z + \delta^{-2}\log^2 z\right)$$

证明

$$f_{\chi_D}(s) = L(s,\chi_D)\rho_{\chi_D}(s) - 1 = \sum_{n\geqslant z}\frac{a_n\chi_D(n)}{n^s}$$

这里

$$a_n = \sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{\chi_D} | f_{\chi_D}(1+\delta+\mathrm{i}t) |^2 \sum_{\chi_D}\sum_{n\geqslant z}^{d<z}\frac{a_n\chi_D(n)}{n^{1+s+\mathrm{i}t}}\sum_{m\geqslant z}\frac{a_m\bar{x}_D(m)}{1+s+\mathrm{i}t} \leqslant$$

$$\varphi(D)\sum_{n\geqslant z}\frac{a_n^2}{n^{2+2\delta}} + 2\varphi(D)\sum_{\substack{z\leqslant m<n\\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)}}\frac{| a_n a_m |}{(nm)^{1+\delta}} \leqslant$$

$$\varphi(D)\sum_{n\geqslant z}\frac{\tau^2(n)}{n^{2+2\delta}} + 2\varphi(D)\sum_{\substack{z\leqslant m<n\\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)}}\frac{\tau(n)\tau(m)}{(nm)^{1+\delta}} \leqslant$$

$$\varphi(D)(\Sigma^1 + \Sigma^2) \tag{7}$$

这里

$$\Sigma^1 = \sum_{n\leqslant z}\frac{\tau^2(n)}{n^{2+\delta}} \leqslant 4\int_z^{\infty}\sum_{z\leqslant n<u}\tau^2(n)\cdot n^{-3-2\delta}\mathrm{d}u \leqslant$$

$$C_2 z^{-1}\delta^{-1}\log^3 z \tag{8}$$

$$\Sigma^2 \leqslant 2\sum_{\substack{z\leqslant m<n\\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)}}\frac{\tau(n)\tau(m)}{(nm)^{1+\delta}} \leqslant C_3 D^{-1}\delta^{-2}\log^2 z \tag{9}$$

由 ⑦,⑧,⑨ 得

$$\sum_{\chi_D} | f_{\chi_D}(1+\delta+\mathrm{i}t) |^2 \leqslant C_4(D\cdot z^{-1}\delta^{-1}\log^3 z + \log^2 z\delta^{-2})$$

引理 5 设

$$g_{\chi_D}(s,z) = g_{\chi_D}(s) = 1 - f_{\chi_D}^2(s)$$

$$G(s,z) = G(s) = \prod_{\chi_D} g_{\chi_D}(s)$$

则 $G(s)$ 具有下面的性质:

(1) 对实数 s, $G(s)$ 取实数;

(2) $\mathrm{Re}G(2+\mathrm{i}t) \geqslant 1/2$.

证明

(2) 因 $| f_{\chi_D}(2+\mathrm{i}t) | \leqslant \left|\sum_{n\geqslant z}\frac{a_n t_D(n)}{n^{2+\mathrm{i}t}}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant z}\frac{\tau(n)}{n^2} \leqslant \frac{3\log z}{z}$,则有

$$\mathrm{Re}G(2+\mathrm{i}t) = \mathrm{Re}\prod_{\chi_D}(1-(f_{\chi_D})^2(2+\mathrm{i}t)) \geqslant 1 - \{\prod_{\chi_D}(1+|f_{\chi_D}|^2)-1\} \geqslant$$

$$2-\left(1+\frac{10}{D^2}\right)^D \geqslant \frac{1}{2}$$

引理 6 设 $f_1(s), f_2(s), \cdots, f_n(s)$ 为在带 $\alpha \leqslant \sigma \leqslant \beta$ 内解析且有界的函数，令

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} |f_i(s)|^2$$

$$M(\sigma) = \sup_{\mathrm{Re}\, s=\sigma} F(s)$$

则

$$M(\sigma) \leqslant M(\alpha)^{\frac{\beta-\sigma}{\beta-\alpha}} M(\beta)^{\frac{\sigma-\alpha}{\beta-\alpha}}$$

证明

由熟知的李特伍德定理及引理 1 得

$$N(\triangle, T, D) \leqslant C_5\delta^{-1}\int_{-T}^{T}\sum_{\chi_D}|f_{\chi_D}\triangle(-\delta+\mathrm{i}t)|^2\mathrm{d}t + \max_{\substack{\sigma\geqslant 1-\delta\\ |t|\leqslant T+2}}\sum_{\chi_D}|f_{\chi_D}(s)|^2 \qquad ⑩$$

为了利用引理 6，引入新函数

$$h_{\chi_D}(s,z) = h_{\chi_D}(s) = \frac{s-1}{s}\cos\left(\frac{s}{2T}\right)^{-1} f_{\chi_D}(s)$$

则有

$$C_6|f_{\chi_D}(s)|\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{2T}} \leqslant |h_{\chi_D}(s)| \leqslant C_7|f_{\chi_D}(s)|\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{2T}}$$

令

$$H(s) = \sum_{\chi_D}|h_{\chi_D}(s)|^2$$

$$M(\sigma) = \sup_{\mathrm{Re}\, s=\sigma} H(s)$$

则，从引理 2 及引理 3 得

$$H\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right) \leqslant C_8\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{T}}\sum_{\chi_D}\left|f_{\chi_D}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|^2 \leqslant$$

$$C_8\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{T}}(|t|+1)^2D^{2\sigma}X\left(\sum_{\chi_D}\left|\rho_{\chi_D}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|^2 + C_8D\right) \leqslant$$

$$C_8\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{T}}(|t|+1)^2D^{2\sigma}(z+D\log z)$$

所以得到

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = C_9D^{2C}T^2z \qquad ⑪$$

由引理 4 得

$$H(1+\delta+\mathrm{i}t) \leqslant C_{10}\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{T}}\sum_{\chi_D}\left|f\chi_D(1+\delta+\mathrm{i}t)\right|^2 \leqslant$$

$$C_{11}\left(\delta^{-2}\log^2 z+\frac{D}{z}\delta^{-1}\log^3 z\right)$$

取 $\delta=\frac{1}{\log DT}, z=D\log D$,得

$$M(1+\delta)=C_{12}\log^4 DT$$

$$M(\frac{1}{2})=C_9 D^{1+2\sigma}T^2\log DT$$

在引理6中命 $H(s)=F(s), \alpha=1/2, \beta=1+\delta$,则当 $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1+\delta$ 时,有

$$M(\sigma)\leqslant M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+s-\sigma}{1+s+\sigma}}M(1+\delta)^{\frac{\delta-1-s}{1+s+\delta}}\leqslant$$

$$C_{13}D^{(2+4c)(1-\sigma)}T^{4(1-\sigma)}\log^6 DT$$

这样一来得到

$$M(\Delta-\delta)\leqslant C_{14}D^{(2+4C)(1-\sigma)}T^{4(1-\Delta)}\log^6 DT \tag{12}$$

由⑩,⑫得到

$$N(\Delta,T,D)\leqslant C_{15}D^{(2+4C)(1-\sigma)}T^3\log^6 DT$$

定理得证.

定理3 设 $D\leqslant z^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}$,若 $L(s,X_D)$ 在以下区域 (R_1) 内不为零

$$1-\frac{C_{16}}{\log^{4/5}D}\leqslant\sigma\leqslant 1,\ |t|\leqslant\log^3 D \tag{R_1}$$

则

$$\sum_{\chi_D}\left|\sum_{n=1}\chi_D(n)\Lambda(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{z}}\right|\leqslant C_{17}z\mathrm{e}^{-\varepsilon_3(\log z)^{1/5}}$$

这里“$\sum_{\chi_D}$”表示求和只对那些使 $L(s,\chi_D)$ 在 (R_1) 内不为零的特征 $X_D(n)$.

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_D(n)\Lambda(n)\mathrm{e}^{-\frac{n}{z}}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{2-\mathrm{i}\infty}^{2+\mathrm{i}\infty}\frac{L'}{L}(s,\chi_D)\Gamma(s)z^s\mathrm{d}s=$$

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\infty}^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\infty}\frac{L'}{L}(s,\chi_D)\Gamma(s)z^s\mathrm{d}s+\sum_{\rho_{\chi_D}}\Gamma(\rho_{\chi_D})z^{\rho_{\chi_D}}=$$

$$\sum_{\rho_{\chi_D}}\Gamma(\rho_{\chi_D})z^{\rho_{\chi_D}}+B\log D$$

所以

$$\sum_{\chi_D}{}' \left| \sum_{n=1}^{\infty} \chi_D(n) \Lambda(n) e^{-\frac{n}{z}} \right| \leqslant \sum_{\chi_D}{}' \sum_{\rho_{\chi_D}} |\Gamma(\rho_{\chi_D})| z^{\beta_{\chi_D}} + BD\log D \qquad ⑬$$

而

$$\sum_{\chi_D}{}' \sum_{\rho_{\chi_D}} |\Gamma(\rho_{\chi_D})| z^{\beta_{\chi_D}} \leqslant \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant 1 - \frac{c_{16}}{\log^{4/5} D}} |\Gamma(\rho)| z^{\beta} \leqslant$$

$$\sum_{\substack{0 \leqslant \beta \leqslant 1 - \frac{c_{16}}{\log^{4/5} D} \\ |\tau| \leqslant \log^3 D}} |\Gamma(\beta + i\tau)| z^{\beta} + \sum_{\substack{0 \leqslant \beta \leqslant 1 - \frac{c_{16}}{\log^{4/5} D} \\ |\tau| > \log^3 D}} |\Gamma(\beta + i\tau)| z^{\beta} \leqslant$$

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1 - \frac{c_{16}}{\log^{4/5} D} \\ |\tau| > \log^3 D}} |\Gamma(\beta + i\tau)| z^{\beta} + z e^{-\varepsilon_3 (\log z)^{1/5}} \leqslant$$

$$C_{18} \log^2 z \sum_{\frac{1}{2} \leqslant \Delta \leqslant 1 - \frac{c_{16}}{\log^{4/5} D}} N(\Delta, \log^3 D, D) z^{\beta} + z e^{-\varepsilon_3 (\log z)^{1/5}} \leqslant$$

$$C_{19} \log^{20} z \sum_{\frac{1}{2} \leqslant \Delta \leqslant 1 - \frac{c_{16}}{\log^{4/5} D}} \left(\frac{D^2 + c}{z} \right)^{1-t} + z e^{-\varepsilon_3 (\log z)^{1/5}} \leqslant$$

$$C_{17} z e^{-\varepsilon_3 (\log z)^{1/5}}$$

引入下面记号.若

$$D = p_1 p_2 \cdots p_s, p_1 > p_2 > \cdots > p_s, s \leqslant 10 \log\log N$$

则令

$$D = p_1 q_1, q_1 = p_2 q_2, \cdots p_{s-2} = p_{s-1} q_{s-1}$$

$$q_{s-1} = p_s$$

$q_1, q_2, \cdots, q_{s-1}$ 称做"D 的对角线因子".

熟知任一特征 $X_D(n)$(D 无平方因子),可用唯一的方法唯一分解成属于模 D 的素因子的模,例如,若 $D = p_1 q_1$,则有

$$\chi_D(n) = \chi_{p_1}(n) \chi_{q_1}(n)$$

若 $\chi_{p_1}(n) \neq \chi_{p_1}^0(n)$,则称 $\chi_D(n)$ 对 p_1 称为是本原的.

定理 4 (A.Renyi)设 q 无平方因子,$A \geqslant C_{20}$,令

$$k = \frac{\log q}{\log A} + 1$$

若 $k \leqslant \log^3 A$,则对所有的素数 $p, A < p \leqslant 2A$,除了不超过 $A^{3/4}$ 个属于模 $D = pq$ 的例外 L - 函数外,当 $\chi_D(n)$ 对 p 为本原时,$L(s, \chi_D)$ 在下面区域内不为零

$$1 - \frac{C_{21}}{\log^{4/5} D} \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant \log^3 D$$

我们还需要下面的几个引理.

引理 7

$$\sum_{\substack{d \leqslant z \\ V(d) > 10\log\log z}} \frac{|\mu(d)|\tau(d)}{\varphi(d)} \leqslant \frac{C_{22}}{\log^5 z}$$

证明

$$\sum_{\substack{d \leqslant z \\ V(d) > 10\log\log z}} \frac{|\mu(d)|\tau(d)}{\varphi(d)} \leqslant 2^{-10\log\log z} \sum_{d \leqslant z} \frac{\tau^2(d)}{\varphi(d)} \leqslant \frac{C_{22}}{\log^5 z}$$

容易证明下面的引理.

引理 8 设$\{p^*\}$为一素数序列,具有下面的性质:任一区间$(A,2A)$内含有不大于$A^{3/4}$个元素,则有

$$\sum_{p^* > M} \frac{1}{p^* - 1} \leqslant \frac{C_{23}}{M^{1/4}}$$

引理 9

$$\sum_{p > N} \chi_D(p) \log p \cdot e^{-\frac{p\log N}{N}} \leqslant C_{24} N^{\frac{1}{2}}$$

引理 10

$$\sum_{p \leqslant N} \chi_D(p) \log p \cdot e^{-\frac{p\log N}{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_D(n) \Lambda(n) e^{-\frac{n\log N}{N}} + BN^{\frac{1}{2}}$$

引理 11 对所有的$D \leqslant \exp(C_{25}\sqrt{\log N})$,除了某个$\tilde{D}$的倍数外,对$(l,D)=1$,有

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ p \equiv l(\bmod D)}} \log p \cdot e^{-\frac{p\log N}{N}} = \frac{N}{\varphi(D)\log N} + BNe^{-C_{26}\sqrt{\log N}} \tag{14}$$

对于$\tilde{D} \mid D$,则在⑭内还必须加上项$\frac{BN^{1-\frac{C(\varepsilon)}{D^{\varepsilon}}}}{\varphi(D)}$,这里$\varepsilon > 0$,是任意的,$C(\varepsilon)$是依赖于$\varepsilon$的正数.

引理 12 对$D < \sqrt{N}$,下式一致成立

$$p_1(N,D,l) < \frac{C_{27}N}{\varphi(D)}$$

现考虑$D = p_1 p_2 \cdots p_s \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}, p_1 > p_2 > \cdots > p_s, s \leqslant 10\log\log N$,有$D > \exp(\log N)^{\frac{2}{5}}$,则

$$p_1 > D^{\frac{1}{V(D)}} > \exp(\log N)^{\frac{1}{3}} \tag{15}$$

另一方面有

$$q_1 < p_1^{V(D)} < p_1^{10\log\log N}$$

所以

$$k_1 = \frac{\log q_1}{\log \frac{p_1}{2}} + 1 < 11\log\log N \qquad ⑯$$

对固定的 q_1 利用定理 4 到 ⑮,我们只要考虑区间$(A,2A)$,这里

$$A = 2^k l, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$l = \exp(\log N)^{\frac{1}{3}}$$

我们称 $D > \exp(\log N)^{\frac{2}{5}}$ 为"条件 1",其次假如 p_1 是 D 的最大素因子,$D = p_1 q_1$,则 p_1 对 q_1 不是例外的(在定理 4 的意义下).这个我们称为"条件 2".

假若两个条件都满足,则由定理 3,4 及引理 9,10 得到

$$P_1(N,D,l) = \frac{1}{\varphi(P_1)}P_1(N,q_1,l) + \frac{BN}{\varphi(D)}\exp[-\varepsilon_3(\log N)^{\frac{1}{3}}] \qquad ⑰$$

若 $q_1 = p_2 q_2$ 亦满足条件 1 及 2,则我们得到

$$P_1(N,D,l) = \frac{1}{\varphi(p_1 p_2)}P_1(N,q_2,l) + \frac{BN}{\varphi(D)}\exp[-\varepsilon_3(\log N)^{\frac{1}{5}}] \qquad ⑱$$

假若对某个 m 破坏了条件 1,即 $q_m < \exp(\log N)^{\frac{2}{5}}$,则由引理 11 得

$$p_1(N,D,l) = \frac{1}{\varphi(D)}\frac{N}{\log N} + \frac{BN}{\varphi(D)}\exp(-\varepsilon_3(\log N)^{\frac{1}{5}}) + E_1(q_m)\frac{N^{1-\frac{C(s)}{\tilde{D}^s}}}{\varphi(D)} \qquad ⑲$$

这里

$$E_1(q_m) = \begin{cases}1, & \tilde{D} \mid q_m \\ 0, & \tilde{D} \nmid q_m\end{cases}$$

若破坏了条件 2,即 p_{m+1} 对 q_{m+1} 而言是例外素数,则由引理 12 得

$$P_1(N,D,l) = \frac{BN}{\varphi(D)} \qquad ⑳$$

由引理 7 得

$$\sum_{d \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}} |\mu(d)\tau(d)Rd(N)| \leqslant \sum_{\substack{d \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2} \\ V(d) \leqslant 10\log\log N}} |\mu(d)\tau(d)Rd(N)| + \sum_{\substack{d \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2} \\ V(d) > 10\log\log N}} |\mu(d)\tau(d)Rd(N)| \leqslant$$

$$\sum_{\substack{d \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2} \\ V(d) \leqslant 10 \log\log N}} |\mu(d)\tau(d)R_d(N)| + \frac{BN}{\log^5 N} \qquad ㉑$$

由 ⑲,⑳ 及引理 8 得

$$\sum_{\substack{d \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2} \\ V(d) \leqslant 10 \log\log N}} |\mu(d)\tau(d)R_d(N)| \leqslant \left(\sum_{d \leqslant N^{\frac{1}{3}-\varepsilon_2}} \frac{|\mu(d)|\tau(d)}{\varphi(d)} \right) N e^{-\varepsilon_3 (\log N)^{1/5}} + \frac{\tau(\tilde{d})}{\varphi(\tilde{d})} N^{1-\frac{c(\varepsilon)}{\tilde{d}}} \left(\sum_{d \leqslant N} \frac{\tau(d)}{\varphi(d)} \right)^2 + N \sum_{d \leqslant N} \frac{\tau(d)}{\varphi(d)} \sum_{p^* > e^{(\log N)^{1/3}}} \frac{1}{p^* - 1} \leqslant \frac{N}{\log^5 N} \qquad ㉒$$

由 ㉑,㉒ 基本定理得证.

4 迪利克雷 L - 函数的零点"密度"及素数与"殆素数"之和问题

—— 巴尔巴恩

命 $\pi(x,D,l)$ 表示区间 $(1,x)$ 中的素数满足 $\equiv l(\bmod D)$ 者之个数. 本文对于 $(l,D)=1$ 及"几乎"所有 $D \leqslant x^{\frac{3}{8}-\varepsilon}$,我们将证明关于 $\pi(x,D,l)$ 的一条中值公式,此后我们用 ε 表示任意给定正数.

定理 1 给予任意大数 A,不等式

$$\sum_{D \leqslant x^{3/8-\varepsilon}} \mu^2(D) \max_{\substack{l(\bmod D) \\ (l,D)=1}} \left| \pi(x,D,l) - \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(D)} \right| = O\left(\frac{x}{\log^A x} \right) \qquad ①$$

成立.

由定理 1 及塞尔贝格筛法可得:

定理 2 每个充分大的偶数为一个素数及一个不超过 4 个素数的乘积之和.

我们将这个问题的历史叙述如下.

在 1947 年,瑞尼①②证明了下面的定理,它是对于未解决的两项哥德巴赫猜想的重要逼近结果.

存在一个绝对常数 R 使每一大偶数都是一个素数及一个素因子个数不超过 R 的殆素数之和.

瑞尼定理中的常数 R 依赖于林列克③中某些分析引理中的一系列常数,估计 R 需要复杂的计算,而其值将是很大的.

---

① A. Renyi. Izy. Akad. Nauk SSSR, Ser, Mat; 1948,12:57-78.
② A. Renyi, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1947,56:455-458.
③ Ju. V. Linnik, Mat. Sbornik, 1944,57:3-12.

用瑞尼的方法及迪利克雷 L - 级数零点“密度”的某些近代结果，作者①证明了如果求和范围为 $D \leqslant x^{1/6-\varepsilon}$，则定理 1 的结论成立，并由此推出 $R = 9$. 注意，在假定广义黎曼猜想之下，$R = 3$ 已经证明了(注释②).

进一步的进展与 L - 级数的“密度”定理的精密化相关联.

命 $N(\alpha, T)$ 表所有 mod D 的 L - 函数在区域

$$\alpha < \sigma < 1, \quad |t| \leqslant T \qquad ②$$

中的零点个数，此处多重零点将计算其重数.

注释③中的方法表明求和范围为 $D \leqslant x^{\frac{1}{a}-\varepsilon}$ 的关系式 ① 可以由下面的估计推出来

$$N(\alpha, T) \ll T^{c_1} D^{a(1-\alpha)} \log^{c_2} DT \qquad ③$$

此处 a, c_1, c_2 为绝对常数.

用林尼克的新“离差法”证明了梯其玛奇的除数问题④与哈代 - 李特伍德问题⑤. 我们很有兴趣地注意到在这些问题的著名条件解决⑥⑦中，黎曼猜想可以换成“密度”猜想，即 ③ 对于 $a = 2$ 成立.

在注释③ 中，我们用了塔吐沙娃的“密度”定理，由它得到式 ③，其中 $a = 6$.

我们的定理 1 的获得基于改进的塔吐沙娃定理及林尼克③ 关于 L - 级数在半直线上六次矩的估计的一条深刻定理.

我们从下面的引理开始.

引理 1　命 $0 \leqslant \alpha < \beta < 2$，命 $f(s)$ 为一个解析函数，当 s 为实值时亦取实值，当 $\sigma \geqslant \alpha$ 时，除 $s = 1$ 外为正则的. 又命 $|\mathrm{Re} f(2 + \mathrm{i}t)| \geqslant m > 0$ 及

$$|f(\sigma' + \mathrm{i}t')| \leqslant M_{\sigma,t}, \quad \sigma' \geqslant \sigma, 1 \leqslant t' \leqslant t$$

则若 T 非 $f(s)$ 的零点的纵坐标，当 $\sigma \geqslant \beta$ 时有

$$|\arg f(\sigma + \mathrm{i}T)| \leqslant \frac{\pi}{\log\left\{\dfrac{2-\alpha}{2-\beta}\right\}}\left(\log M_{\alpha, T+2} + \log \frac{1}{m}\right) + \frac{3\pi}{2}$$

关于证明，我们引用注释，例如注释⑧.

我们引入下面的记号

$$Q_z(s, \chi) = \sum_{n<z} \mu(n) \chi(n) n^{-s}$$

---

① M. B. Barban, Trudy Inst. Mat. Akad. Nauk UzSSR, 1961, 22: 1-20.
② Wang Yuan, Acta Math. Sinica, 1960, 10: 168-181.
③ M. B. Barban, Trudy Inst. Mat. Akad. Nauk UzSSR, 1961, 22: 1-20.
④ Ju. V. Linnik, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1961, 137: 1299-1302.
⑤ Ju. V. Linnik, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat, 1960, 24: 629-706.
⑥ E. Titchmarsh, Rend. Cir. Mat. Palermo, 1930, 54: 414-429.
⑦ C. Hooley, Acta Math, 1957, 97: 189-210.
⑧ E. Titchmarsh. The theory of the Riemann zeta function, Clarendon Press, Oxford, 1951.

$$f_z(s,\chi) = L(s,\chi)Q_z(s,\chi) - 1$$

$$h_z(s,\chi) = 1 - f_z^2(s,\chi)$$

$$K_z(\sigma,T) = \max_{|t|} \sum_{\chi} |f_z(\sigma + \mathrm{i}t,\chi)|^2$$

$L(s,\chi)$ 所有的零点亦是 $h_z(s,\chi)$ 的零点. 因此 $N(\alpha,T) \leqslant N_1(\alpha,T)$, 此处 $N_1(\alpha,T)$ 表示 $H_z(s) = \prod_{\chi} h_z(s,\chi)$ 在区域 ② 中的零点个数. 将熟知的李特伍德定理用于这个函数. 因 $N_1(\alpha,T)$ 当 α 递增时亦递增, 所以

$$N_1(\alpha,T) \leqslant \delta^{-1}\int_{\alpha-\delta}^{\alpha} N_1(\sigma,T)\mathrm{d}\sigma \leqslant \delta^{-1}\int_{\alpha-\delta}^{2} N_1(\sigma,T)\mathrm{d}\sigma =$$
$$\frac{\delta^{-1}}{2\pi}\int_{-T}^{T}\{\log|H_z(\alpha - s + \mathrm{i}t)| - \log|H_z(2 + \mathrm{i}t)|\}\mathrm{d}t +$$
$$\frac{\delta^{-1}}{2\pi}\int_{\alpha-\delta}^{2}\{\arg H_z(\sigma + \mathrm{i}T) - \arg H_z(\sigma - \mathrm{i}T)\}\mathrm{d}\delta +$$
$$O(\delta^{-1}) \qquad ④$$

此处量 δ 将于以后确定.

以下将假定 D 充分大, 及 $z \geqslant D$.

当 $\sigma > 1$ 时我们有

$$f_z(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\sum_{\substack{d|n\\ d<z}}\mu(d)\chi(d)\chi\left(\frac{n}{d}\right) - 1 =$$
$$\sum_{n\geqslant z}\chi(n)n^{-s}\sum_{\substack{d|n\\ d<z}}\mu(d) = \sum_{n\geqslant z}\chi(n)a_n n^{-s}$$
$$|a_n| \leqslant \tau(n)$$

此处 $\tau(n)$ 表示 n 的因子个数.

因对于任意 ε 皆有 $\tau(n) = O(n^{\varepsilon})$, 我们得

$$|f_z(2 + \mathrm{i}t,\chi)| \leqslant \sum_{n\geqslant z}\tau(n)n^{-2} \leqslant \sum_{n\geqslant D} n^{0\cdot 1}n^{-2} < D^{-\sigma\cdot 8}$$

现在将引理 1 用于 ④, 并且

$$f(s) \to H_z(s), \alpha \to (\alpha - 2\delta), \beta \to (\alpha \to \delta)$$

因 $H_z(s)$ 的迪利克雷级数有正系数, 所以当 s 为实数时, $H_z(s)$ 亦然(注释①). 其次

$$\mathrm{Re}H_z(2 + \mathrm{i}t) = \mathrm{Re}\prod_{\chi}\{1 - f_z^2(2 + \mathrm{i}t,\chi)\} = 1 + \mathrm{Re}\{\prod_{\chi}(1 - f_z^2) - 1\} \geqslant$$
$$1 - |\prod_{\chi}(1 - f_z^2) - 1| \geqslant 1 - \{\prod_{\chi}(1 + |f_z|^2) - 1\} \geqslant$$

① K. Prachar. Primzahlverteilung, Springer Verlag, 1957.

$$1-\{\prod_{\chi}(1+D^{-1.6}-1\}\geqslant 2-(1+D^{-1.6})^{D}\geqslant\frac{1}{2}$$

所以 m 可以取为$\frac{1}{2}$.最后

$$|H_z(s)|\leqslant\prod_{\chi}(1+|f_z(s,\chi)|^2)\leqslant\exp\sum_{\chi}|f_z(s,\chi)|^2$$

因此 $M_{\sigma,t}$ 可以取做 $\exp\max\limits_{\sigma<\sigma'\leqslant 2}K_z(\sigma',t)$.

我们还有 $|H_z(2+\mathrm{i}t)|\geqslant\mathrm{Re}H_z(2+\mathrm{i}t)\geqslant\frac{1}{2}$,所以综合上述估计,我们有下面的引理.

引理 2 若 $z\geqslant D$,则

$$N(\alpha,T)\ll\delta^{-2}T\max_{\alpha-3\delta<\sigma<2}K_z(\sigma,T+2)$$

为了估计 $K_z(\sigma,T)$,我们需用解析函数的凸定理的经典方法,我们从 $K_z(1+\delta,T)$ 的估计开始.

引理 3 若 $z\geqslant D$ 及 $0<\delta\leqslant 3$,则

$$K_z(1+\delta,T)\ll\delta^{-5}$$

证明 我们有

$$\sum_{\chi}|f_z(1+\delta+\mathrm{i}t,\chi)|^2=\sum_{m,n\geqslant z}\sum_{\substack{(m,D)=1\\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)}}\frac{\varphi(D)}{(mn)^{1+\delta}}\sum_{\substack{d\mid m\\ d<z}}\mu(d)\sum_{\substack{d\mid n\\ d<z}}\mu(d)\left(\frac{m}{n}\right)^{\mathrm{i}t}\leqslant$$

$$\varphi(D)\sum_{\substack{m\geqslant z\\ (m,D)=1}}\frac{\tau(m)}{m^{1+\delta}}\sum_{\substack{n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)\\ n\geqslant z}}\frac{b_z(n)}{n^{1+\delta}}$$

此处 $b_z(n)=\sum\limits_{\substack{d\mid n\\ d\geqslant n/z}}1$.

因$(m,D)=1$,我们有

$$\sum_{n\leqslant x}b_z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)}}\sum_{\substack{d\mid n\\ d\leqslant n/z}}1=\sum_{d<x/z}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)\\ n\equiv o(\mathrm{mod}\ d)}}1\ll$$

$$\sum_{d<x/z}\left(\frac{x}{Dd}+1\right)\ll\frac{x}{D}\log x+\frac{x}{z}\ll\frac{x\log x}{D}$$

所以

$$K_z(1+\delta,T)\ll\frac{\log z}{z^{\delta}\delta^2}\sum_{m\geqslant z}\frac{\tau(m)}{m^{1+\delta}}\ll\frac{\log z}{z^{\delta}\delta^{z}}\zeta^2(1+\delta)\ll-\frac{\log z}{z^{\delta}\delta^4}$$

因 $\delta\log z\ll z^{\delta}$,故得引理 3.

引理 4 命 $z=D$ 及对于所有 $\chi(\mathrm{mod}\ D)$ 有

$$\max_{|t|\leqslant T}\left|L\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\right)\right|\leqslant MT^{\tau_0}$$

则

$$K_z(\frac{1}{2},T) \leqslant M^2 T^{2c_0}\varphi(D)\log D$$

证明 显然

$$K_z\left(\frac{1}{2},T\right) \ll M^2 T^{2c_0} \max_{|t|\leqslant T}\sum_{\chi}\left\{\left|Q_z\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\right)\right|^2+1\right\} \ll$$

$$M^2 T^{2c_0} \max_{|t|\leqslant T}\varphi(D) \sum_{\substack{m,n<z \\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ D)}} \sum_{(m,D)=1} \frac{\mu(m)\mu(n)}{(mn)^{1/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}$$

因 $z = D$,将同余式变成等式即得引理 4.

引理 5 命 $z = D$ 及 $T \geqslant 2$.则在引理 4 的假定下,有

$$K_z(\sigma_1 T) \ll \begin{cases} T^{2c_0}\{M^2D^2\}^{2(1-\sigma)}\log^5 D, & \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1 \\ \log^5 D, & 1 \leqslant \sigma \leqslant 4 \end{cases}$$

证明 由解析函数的凸定理(注释①) 及引理 3 与引理 4 可知,当$\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$ 时有

$$K_z(\sigma,T) \ll \{M^2 T^{2c_0}\varphi(D)\log D\}^{\frac{1+\delta-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta}}\delta^{\frac{-5(\delta-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}+\delta}}$$

命 $\delta = \frac{1}{\log D}$,则由 L - 级数熟知的估计,即 $M \ll D^{1/2}$ 可以推出引理的第一部分,由引理 3 即得第二部分.

基本引理 假定对于所有 $\chi(\mathrm{mod}\ D)$ 皆有

$$\max_{|t|\leqslant T}\left|L\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi\right)\right| \leqslant MT^{c_0}$$

则

$$N(\alpha,T) \ll T^{1+2c_0}\{M^2D\}^{2(1-\sigma)}\log^7 D$$

若 $\alpha > \frac{1}{2}+\frac{3}{\log D}$,则由引理 2 与引理 5 可得基本引理.

若 $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}+\frac{3}{\log D}$,则由粗略估计 $N(\alpha,T) \leqslant DT\log DT$ 即得基本引理.

特别地,置 $M = D^{\frac{1}{4}}\log D$,则由 L - 级数的"渐近函数方程"可知 M 的这种选取是可能的.例如,由注释②,得 ③,其中 $a = 3$.

对于"几乎所有"D,由林尼克关于 L - 级数的六次矩的估计可得一个相当精密的结果.这将在以后被使用.

由我以前的工作可知由 ③,其中 $a = \frac{8}{3} - \epsilon$,即可推出定理 1.

---

① K. Prachar. Primzahlverteilung, Springer Verlag, 1957.
② Ju. V. Linnik, Mat. Sbornik, 1961,53:3-83.

由林尼克关于 L - 级数的六次阶的估计(注释①)

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1\left(1+\frac{1}{\log^{20} D_1}\right)} \sum_{\chi_0} \left| L\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t, \chi_D\right) \right|^6 \ll D_1^2(|t|+1)^{c_0}\exp(\log D_1)^{\epsilon}$$

我们立刻得:

引理6 在区间 $D_1 \leqslant D \leqslant D_1\left(1 + \frac{1}{\log^{20} D_1}\right)$ 中最多除去 $D_1^{1-\epsilon}$ 个 D,我们有

$$\max_{\chi(\mathrm{mod}\ d)} \left| L\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t, \chi\right) \right| \ll D^{\frac{1}{6}+\epsilon}(|t|+1)^{c_0}$$

因此若 D 非引理6意义下被"除去"的,则由基本引理可得式③,其中 $a = \frac{8}{3} + \epsilon$. 注释②中的结果说明只要考虑 $D > x^{1/7}$ 的情况即足.

命 $\sum{}'$ 表示 D 的一个和,此处 D 表示引理6意义下被"除外"者.则

$$\sum_{x^{\frac{1}{7}} \leqslant D \leqslant x^{\frac{3}{8}-\epsilon}}{}' \mu^2(D) \max_{\substack{l(\mathrm{mod}\ D)\\(l,T)=1}} \left| \pi(x,D,l) - \frac{\mathrm{Li}\,x}{\varphi(D)} \right| \ll \sum_{x^{\frac{1}{7}} \leqslant D \leqslant x^{\frac{3}{8}-\epsilon}} \frac{x}{D} \ll$$

$$x \sum_{n \leqslant \log^{22} x} \sum_{x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20} x}\right)^n \leqslant D \leqslant x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20} x}\right)^{n+1}} \frac{1}{D} \ll$$

$$x \sum_{n \leqslant \log^{22} x} \frac{1}{x^{\frac{1}{7}}\left(1 + \frac{1}{\log^{20} x}\right)^n} \sum_{x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20} x}\right)^n \leqslant D \leqslant x^{\frac{1}{7}}\left(1+\frac{1}{\log^{20} x}\right)^{n+1}} 1 \ll \frac{x}{\log^A x}$$

定理1证完.

由定理1及王元③或列文④形式的塞尔伯格筛法可推出定理2.

定理3 区间$(2,N)$中的孪生素数对,即 p 与 $p+2$ 同时为素数的个数不超过

$$\left(\frac{16}{3} + \epsilon\right) 2 \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{N}{\log^2 N} \qquad ⑤$$

此处 $N \geqslant N(\epsilon)$.

过去的最佳记录是属于塞尔伯格⑤的,在他的结果中,式⑤中的 $\frac{16}{3}$ 需换成8.令人感兴趣的是塞尔伯格曾断言他的结果是用"纯"筛法所能达到的极限.

在此,我们可以用维诺格拉多夫⑥方法证明,或者在定理3对于用 $4-2^{\epsilon}$ 代替 $\frac{16}{3}$ 成立,或者存在无穷多个素数 p 使 $p+2$ 最多为2个素数的乘积.

---

① Ju. V. Linnik, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat, 1960, 24: 629-706.
② M. B. Barban, Trudy Inst. Mat. Akad. Nauk U, SSR, 1961, 22: 1-20.
③ Wang Yuan, Acta Math. Sinica, 1960, 10: 168-181.
④ B. V. Levin, Dokl. Akad. Nauk UzSSR, 1962, 11: 7-9.
⑤ A. Selberg, Den 11-te Skan. Mat. Kong, 1949, 13-22.
⑥ A. I. Vinogradov, Vest. Leningrad Univ, 1959, 7: 26-31.

现在我们给塞尔伯格筛法以下面的形式.

引理 7 命 $a_1,\cdots,a_N$ 为一个整数集合满足

$$\sum_{a_n\equiv 0(\bmod d)} 1=\frac{N}{f(d)}+R_d$$

此处$f(d)$为积性函数及 $p/f(p)=O(1)$. 若我们用 N_z 表示不被不大于z的素数整除的 a_n 的个数,则

$$N_z\leqslant\frac{N}{\sum_{m\leqslant z}\frac{\mu^2(m)}{f_1(m)}}+O\left\{(\log\log z)^c\sum_{d\leqslant z^2}\mu^2(d)R_d\mid\tau(d)\right\}$$

此处 $f_1(m)$ 表示 $f(m)$ 的麦比乌斯变换及 $\tau(m)$ 表示 m 的因子个数.

关于塞尔伯格方法的全面阐述可以参看相关注释①. 为了从引理 7 推出定理 3,我们取$\{a_n\}$为集合$\{p-2\}$,此处 p 过所有不大于N的素数,及 $z=N^{\frac{3}{16}-\varepsilon}$.

主项可以用熟知的方法来计算,参见相关注释②. 误差项为和

$$\sum_{\substack{d\leqslant N^{\frac{3}{8}-\varepsilon}\\ d\equiv 1(\bmod 2)}}\mu^2(d)\left|\pi(n,d,2)-\frac{\mathrm{Li}N}{\varphi(d)}\right|\tau(d)$$

由定理 1 可知满足 $\tau(d)\leqslant\log^{\frac{A}{2}}N$ 的d构成的部分和远远小于$N/\log^{\frac{A}{2}}N$. 其余部分则远小于

$$\sum_{\substack{d\leqslant N^{\frac{3}{8}-\varepsilon}\\ \tau(d)\geqslant\log^{\frac{A}{2}}N}}\frac{N}{d}\mu^2(d)\tau(d)\ll N\sum_{d\leqslant N^{\frac{3}{8}-\varepsilon}}\frac{\mu^2(d)}{d}\tau(d)\frac{\tau(d)}{\log^{\frac{A}{2}}N}\ll\frac{N}{\log^{\frac{A}{2}-5}N}$$

因 A 可以任意大,故定理成立.

注 定理 1 是作者于 1965 年证明的. 用这条定理来估计瑞尼的常数 R,我们征引王元的文章③,这是塞尔伯格"线性" 筛法的已知最佳结果,注释③ 是用中文发表的,应用这个方法时需复杂的计算,列文友好地告诉我,$R\leqslant 4$ 可以由他关于塞尔伯格新方法与定理 1④⑤中推出来. 然后王元③ 又肯定了由定理 1 及他的工作可导出同样的结论,王元的工作的详细阐述发表于相关注释③ 的英文翻译本所加的附录之中,我已注意到与定理 1 相类似的结果已由潘承洞独立地证明了,但他的结果不是用术语 $\pi(x,D,l)$ 来表述的,而是用一个"加权" 和,由此可以推出定理 2,但不能推出定理 3.

作者感谢王元与列文,他们系统地与友好地将他们的结果告诉了我.

---

① K. Prachar. Primzahlverteilung, Springer Verlag, 1957.
② N. E. Klimov, Usp. Mat. Nauk, 1958,3: 145-164.
③ Wang Yuan, Acta Math. Sinica, 1960,10:168-181.
④ B. V. Levin, Dokl. Akad. Nauk UzSSR, 1962,11: 7-9.
⑤ B. V. Levin, Mat. Sbornik, 1963, 61:389-407.

5 哥德巴赫－欧拉问题与孪生素数问题研究的新结果

——布赫夕塔布

关于表偶数为两个素数之和的哥德巴赫－欧拉问题至今尚未解决.由埃拉朵斯染尼氏筛法及林尼克与其后继者所发展的迪利克雷 L－级数理论可以证明存在一个整数 k 使每个大偶数 $2N$ 均可以表示为 $2N=p+n$,此处 p 为一个素数及 n 最多只有 k 个素因子.瑞尼[①]首先证明了 k 的存在性.$k=4$ 是由列文、巴尔巴恩、王元与潘承洞[②③④]得到的.对于孪生素数问题,他们也得到了类似结果,即存在无穷多个素数 p 使 $p+2$ 最多 k 个素因子.本文,我将证明 $k=3$.

定理 1 存在 N_0 使每个大于 N_0 的偶数都可以表成一个素数及一个素因子个数不超过 3 的殆素数之和.

定理 2 存在无穷多个素数 p 使 $p+2$ 为一个不超过 3 个素数的乘积.

证明基于下面的巴尔巴恩定理.

定理 3 命 ν 为一个小于 8/3 的数及 A 为一个正常数,则

$$\sum_{D\leqslant x^{\nu}}\mu^{2}(D)\max_{\substack{a(\mathrm{mod}\,D)\\(a,D)=1}}\left|\pi_{a}(x,D)-\frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(D)}\right|=O\left(\frac{x}{\ln^{A}x}\right)$$

此处 $\pi_a(x,D)$ 表示适合 $p\leqslant x$ 及 $p\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ D)$ 的素数个数,$\varphi(D)$ 为欧拉函数及 $\mu(D)$ 为麦比乌斯函数.

定理 2 的证明 注意习知定理 1 可以用类似的方法来证明.

命 q 为一个整数及 $2<p_1<\cdots<p_r$ 为素数列,此处 $p_i\nmid q$ 与 $p_r\leqslant z<p_{r+1}$.命 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为一个整数集合满足 $(\alpha,q)=1$ 及 $p_i\nmid\alpha_i$,我们将它们记为 ω.我们用 $P_{\omega}(x,q,z)$ 表示适合 $p\equiv\alpha(\mathrm{mod}\ q)$ 与 $p\not\equiv\alpha_i(\mathrm{mod}\ p_i)(1\leqslant i\leqslant r)$ 的素数 p 的个数,由由布朗方法可以证明

定理 4 存在非递减函数 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$,使当 $\alpha>0$ 及 $q<x^{\nu}$ 时有

$$P_{w}\left(x,q,\left(\frac{x^{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right)>\left\{B_0\lambda(\alpha)+O\left(\frac{1}{(\nu\ln x-\ln q)^{1/2}}\right)\right\}\frac{c(q)\mathrm{Li}(x)}{\nu\ln x-\ln q}-r_{\omega}\left(x,q\left(\frac{x^{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right)$$

$$P_{w}\left(x,q,\left(\frac{x^{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right)<\left\{B_0\Lambda(\alpha)+O\left(\frac{1}{(\nu\ln x-\ln q)^{1/2}}\right)\right\}\frac{c(q)\mathrm{Li}(x)}{\nu\ln x-\ln q}+$$

---

① A. Renyi, Izv. Akzd. Nauk SSSR, Ser. Mat, 1948,12:57-78.
② Wang Yuan, Sci. Sinica, 1962,11:1033-1054.
③ B. V. Levin, Dokl. Akad. Nauk UzSSR, 1962,11:7-9; Mat. Sbornik, 1963, 61:389-407.
④ M. B. Barban, Mat. Sbomik, 1963, 61:418-425.

$$r_{\omega}\left(x,q,\left(\frac{x^{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right) \qquad ①$$

此处 B 是一个与 ω 无关的常数；当 $\alpha \geqslant 10$ 时，$\lambda(\alpha) > 0, c(q) = \frac{1}{\varphi(q)}\prod_{\substack{p\mid q\\ p\neq 2}}\frac{p-1}{p-2}$，及

$$r_{w}\left(x,q\left(\frac{x^{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right) > \sum_{D\in\Omega}\mu^2(D)\max_{\substack{a(\bmod D)\\(D,a)=1}}\left|\pi_a\left((x,D)-\frac{\mathrm{Li}(x)}{\varphi(D)}\right)\right| \qquad ②$$

其中区域 $\Omega = \Omega\left(x,q,\left(\frac{x^{\nu}}{q}\right)^{1/\alpha}\right)$ 包括满足 $D = qm, m < x^{\nu}/q$ 及 m 的最大素因子小于 $(x^{\nu}/q)^{1/\alpha}$ 的诸数 D.

我们得到通常的公式 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$. 每隔步长 0.01，给出 $\Lambda(\alpha)$ 一个值. 此处 $\alpha \leqslant 10$. 取 $\lambda(10) = 9.999\,942$. 这些值是以列宁命名的莫斯科师范大学的"明斯克 1"计算机上算出来的，这样就定义了两个阶梯函数 $\Lambda_0(\alpha)$ 与 $\lambda_0(\alpha)$ 之值，其中当 $\alpha < 10$ 时，$\lambda_0(\alpha) = 0$. 由王元的工作表明，用布赫夕塔布方法可以证明下面的定理.

定理 5 命 $\beta > 1$. 若 $\Lambda(\alpha)$ 与 $\lambda(\alpha)$ 换为

$$\left\{\begin{aligned}\bar{\lambda}(\alpha) &= \begin{cases}\max\left(\lambda(\alpha),\lambda(\beta)-\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{\Lambda(z)}{z}\mathrm{d}z\right), & 1<\alpha\leqslant\beta\\ \lambda(\alpha), & 0<\alpha\leqslant 1 \text{ 或 } \alpha>\beta\end{cases}\\ \bar{\Lambda}(\alpha) &= \begin{cases}\max\left(\Lambda(\alpha),\Lambda(\beta)-\int_{\alpha-1}^{\beta-1}\frac{\lambda(z)}{z}\mathrm{d}z\right), & 1<\alpha\leqslant\beta\\ \Lambda(\alpha), & 0<\alpha\leqslant 1 \text{ 或 } \alpha>\beta\end{cases}\end{aligned}\right. \qquad ③$$

则不等式 ① 仍然成立，此处误差项满足 ② 并具有同样的 Ω.

从 $\lambda_0(\alpha)$ 与 $\Lambda_0(\alpha)$ 出发，由 ③ 可得区间 $0 < \alpha \leqslant 10$ 上的函数贯

$$\lambda_0(\alpha) \leqslant \lambda_1(\alpha) \leqslant \lambda_2(\alpha) \leqslant \cdots \leqslant \Lambda_2(\alpha) \leqslant \Lambda_1(\alpha) \leqslant \Lambda_0(\alpha)$$

在同样的计算机上连续迭代，我们得到一张表，具有足够多的 $\lambda(\alpha)$ 与 $\Lambda(\alpha)$ 的值，此处为简单计，我们略去了足标，特别地，我们得到下表诸值。

α	$\alpha \leqslant 3$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
$\Lambda(\alpha)$	3.580 161	3.586 19	3.607 11	3.640 53	3.684 37	3.736 96
α	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1
$\Lambda(\alpha)$	3.796 94	3.863 18	3.934 73	4.010 79	4.090 72	4.173 92
α	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
$\Lambda(\alpha)$	4.259 94	4.348 34	4.438 77	4.530 94	4.624 55	4.719 40
α	4.8	4.9	5.0			
$\Lambda(\alpha)$	4.815 26	4.911 97	5.009 38			

下面的定理可用证明定理 5 的方法类似地来证明.

定理6 命$\frac{3}{8}\nu < \alpha \leqslant \beta$及$\nu_1 < \nu$,则

$$\sum_{x^{3/8\beta} \leqslant p < x^{3/8\alpha}} P_\omega(x,p,p) < \frac{B_0}{\nu_1} \cdot \frac{\mathrm{Li}(x)}{\ln x}\int_{\alpha-1}^{\beta-1} \frac{\Lambda(z)}{z}\mathrm{d}z + O\left(\frac{x}{\ln^{5/2}x}\right) \qquad ④$$

定理7 命$\frac{3}{8}\nu < \alpha \leqslant \beta \leqslant \delta$及$\nu_1 < \nu$.则

$$\sum_{x^{\frac{3}{8}\beta} \leqslant p < x^{\frac{3}{8}\alpha}} P_\omega(x,p,x^{3/8}) < \frac{\beta_0}{\nu_1} \cdot \frac{\mathrm{Li}(x)}{\ln x}\int_{\alpha-1}^{\beta-1} \Lambda\left(\frac{\delta z}{z+1}\right)\mathrm{d}z + O\left(\frac{x}{\ln^{5/2}x}\right) \qquad ⑤$$

当$4 \leqslant n \leqslant 10$时,考虑区间$I_n = [x^{n/64}, x^{(2n-1)/64}]$;当$18 \leqslant n \leqslant 20$时,考虑$I_n = [x^{n/64}, x^{(2n+1)/64}]$;当$4 \leqslant n \leqslant 10$时,考虑$L_n = [x^{n/64}, x^{(2n+1)/64}]$.假定$c_n$与$d_n$对应于$I_n$与$L_n$,此处$c_4 = 4/21$;当$5 \leqslant n \leqslant 10$时,$c_n = 1/21$;当$18 \leqslant n \leqslant 20$时,$c_n = (21-n)/n$;$d_n = (21-2n)/21$.

定理8 命$G(x)$表示$p < x-2$且满足下面条件的素数p的个数:

(1)$p+2 \not\equiv 0 \pmod{p_i}(p_i < x^{1/16})$;

(2)$p+2$最少有4个互不相同的素因子,这种素数的集合记为G.命

$$S(x) = \sum_{4 \leqslant n \leqslant 10} c_n \sum_{p_i \in I_n} P(x,p_i,x^{n/64}) + \sum_{18 \leqslant n \leqslant 20} c_n \sum_{p_i \in I_n} P(x,p_i,x^{1/16}) + \sum_{4 \leqslant n \leqslant 10} d_n \sum_{p_i \in L_n} P(x,p_i,p_i) \qquad ⑥$$

则$G(x) \leqslant S(x)$.

命M表示适合下面条件的诸素数:$p < x-2$及$p+2 \not\equiv 0 \pmod{p_i}(p_i < x^{1/16})$.对于每个$p+2$,此处$p \in G(G \subset M)$,它可以表成$p+2 = p_\alpha^{(k_1)}p_\beta^{(k_2)}p_\gamma^{(k_3)}p_\delta^{(k_4)}m$,此处$p_\alpha^{(k_1)} < p_\beta^{(k_2)} < p_\gamma^{(k_3)} < p_\delta^{(k_4)}$为$p+2$的四个最小互异的素因子,当$4 \leqslant t \leqslant 10$时,记$x^{t/64} \leqslant p^{(t)} < x^{(t+1)/64}$及$x^{21/64} \leqslant p^{(21)} < x$.则$S(x) = \sum_{p \in M} T(p)$,此处

$$T(p) = \sum_{p_i|(p+2)} \sum_{\substack{4 \leqslant n \leqslant 10 \\ p_i \in I_n, p \in M_n}} c_n + \sum_{p_i|(p+2)} \sum_{\substack{13 \leqslant n \leqslant 20 \\ p_i \in I_n}} c_n + d(p)$$

$p \in M_n$表示$p+2 \not\equiv 0 \pmod{p_i}(p_i \leqslant x^{n/64})$;当$p_\alpha^{(k_1)} \in L_n(4 \leqslant n \leqslant 10)$时,$d(p) = d_n$,否则$d(p) = 0$.

对于$p \in G$,在和$T(p)$中取e_n及$d_n = d(p)$,此处p_i为$p_\alpha^{(k_1)}p_\beta^{(k_2)}p_\gamma^{(k_3)}p_\delta^{(k_4)}$的素因子,则得其值$U(p) \leqslant T(p)$为了证明定理,只要能证明对于所有$p \in G$,$U(p) \geqslant 1$即足.事实上

$$S(x) \geqslant \sum_{p \in G} T(p) \geqslant \sum_{p \in G} U(p) \geqslant \sum_{p \in G} 1 = G(x)$$

为了证明对于所有$p \in G$,$U(p) \geqslant 1$,我们考虑所有可能的k_1,k_2,k_3,k_4.经过对这个函数作108次计算,我们得$U(p) \geqslant 1$.

在 ⑥ 中，$S(x)$ 可以表示为 10 个形如 $c_n \sum_{p_i \in I_n} P(x, p_i, x^{5/64})$ 及 7 个形如 $d_n \sum_{p_i \in I_n} P(x, p_1, p_i)$ 的项之和，这些可以由 $\Lambda(\alpha)$ 的表与定理 6 与 7 来加以估计. 取 $\nu_1 = 3/8 - 1/10^7$. 则得 $G(x) \leqslant S(x) < 15.0607 B_0 x/\ln^2 x (x > x_0)$. 命 $P(x)$ 表示适合 $p \leqslant x$，及 $p+2$ 不能被任何小于等于 $x^{1/16}$ 的素数整除的素数的个数. 命 $a = a_1 = \cdots = a_r = -2$. 则当 $x > x_0$ 时

$$P(x) = P_\omega(x, 1, x^{1/16}) > 8/3 B_0 \lambda(6) x/\ln^2 x > 15.9979 B_0 x/\ln^2 x$$

命 $K(x)$ 表示适合 $p \leqslant x$ 及 $p+2$ 无平方因子且无不大于 $x^{1/16}$ 的素因子的素数 p 的个数，则当 $x > x_0$ 时

$$K(x) < 0.0001 B_0 x/\ln^2 x$$

命 $F(x)$ 为适合 $p \leqslant x$ 的素数个数，此处 p 满足：

(1)$p+2$ 没有小于等于 $x^{1/16}$ 的素因子；

(2)$p+2$ 没有平方因子；

(3)$p+2$ 最多只有 3 个素因子，则当 $x > x_0$ 时

$$F(x) \leqslant P(x) - G(x) - K(x) - 2 > 0.937 B_0 x/\ln^2 x$$

因当 $x \to \infty$ 时，$F(x) \to \infty$. 故得定理 2. 为了证明定理 1，在 $G(x), M, P(x), K(x), F(x)$ 的定义中，$p+2$ 需换成 $2N-p$. 并在 $P(x, p_i, x^{n/64})$ 与 $P(x, p_i, p_i)$ 的定义中，我们取 $a_i = 2N (1 \leqslant i \leqslant r)$.

6 素数论中的一个初等方法

——沃恩

6.1 引论

命

$$T(Y, Q) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \max_{X \leqslant Y} |\psi(X, \chi)| \tag{①}$$

此处

$$\psi(X, \chi) = \sum_{n \leqslant X} \Lambda(n) \chi(n) \tag{②}$$

及 $\sum^*$ 表示过模 q 的原特征求和，T 的估计是朋比尼 - 维诺格拉多夫关于算术级数素数定理的要素. 又命

$$H_r(Y, Q) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \max_{X \leqslant Y} |M_r(X, \chi)| \tag{③}$$

此处

$$M_r(X,\chi) = \sum_{\substack{n\leq Y\\(n,r)=1}} \mu(n)\chi(n) \tag{④}$$

本文的目的是描述下面两个定理的证明，这一证明的想法已含于相关注释①②之中.

定理 1 命 $Q \geqslant 1, Y \geqslant 2, L = \log YQ$.则

$$T(Y,Q) \ll (Y + Y^{\frac{5}{6}}Q + Y^{\frac{1}{2}}Q^2)L^4 \tag{⑤}$$

定理 2 命 $Q \geqslant 1, Y \geqslant 2, r \geqslant 1, L = \log YQ$.则

$$H_r(Y,Q) \ll (Y + d(r)Y^{\frac{5}{6}} + Y^{\frac{1}{2}}Q^2)L^4 \tag{⑥}$$

由定理 1 及西格尔 - 瓦尔菲茨定理易推出：

定理 3(朋比尼 - 维诺格拉多夫) 命 $Q \geqslant 1, Y \geqslant 2, L = \log YQ$,则

$$\sum_{q\leq Q} \sup_{\substack{q,X\\(a,q)=1,X\leq Y}} \left|\psi(X,q,a) - \frac{X}{\phi(q)}\right| \ll A^{Y(\log Y)^{-A}+Y^{\frac{1}{2}}QL^4} \tag{⑦}$$

类似地，由定理 2 可推出：

定理 4 命 $Q \geqslant 1, Y \geqslant 2, L = \log YQ$,则

$$\sum_{q\leq Q} \sup_{\substack{q,X\\X\leq Y}} \left| \sum_{\substack{n\leq X\\n\equiv a(\mathrm{mod}\ q)}} \mu(n)\right| \ll A^{Y(\log Y)^{-A}+Y^{\frac{1}{2}}QL^4} \tag{⑧}$$

6.2 定理 1 与 3 的证明

引理 1 假定 $a_m(m = 1,\cdots,M)$ 与 $b_n(n = 1,\cdots,N)$ 为复数,则

$$\sum_{q\leq Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \left| \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_m b_n \chi(mn)\right| \ll$$

$$\left((M + Q^2)(N + Q^2)\sum_m |a_m|^2 \sum_n |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

这是大筛法不等式与柯西不等式的直接推论，例如，见茄勒革尔③④.

引理 2 在引理 1 的前提下有

$$\sum_{q\leq Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \sup_{X\leq Y} \left| \sum_{\substack{m=1\\mn\leq X}}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_m b_n \chi(mn)\right| \ll$$

$$\left((M + Q^2)(N + Q^2)\sum_m |a_m|^2 \sum_n |b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \log YMN \tag{⑨}$$

证明 命

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \mathrm{d}\alpha$$

---

① Vaughan, R. C. Sommes trigonometriques sur les nombres premiers. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Serie A, 1977, 285:981-983.

② Vaughan, R. C. On the distribution of ap modulol. Mathematika 1977, 24:135-141.

③ Gallagher, P. X. The large sieve. Mathematika, 1967, 14:14-20.

④ Montgomery, H. L. and Vaughan, R. C. The large sieve. Mathematika, 1973, 20:119-134.

及 $\gamma > 0$,当 $0 \leqslant \beta < \gamma$ 时,定义 $\delta(\beta) = 1$,而当 $\beta > \gamma$ 时,定义 $\delta(\beta) = 0$,则 $C > 0$,且易见当 $A \geqslant 1, \beta \geqslant 0, \beta \neq \gamma$ 时有

$$\delta(\beta) = \int_{-A}^{A} e_i\beta\alpha \frac{\sin \gamma\alpha}{C\alpha} d\alpha + O(A^{-1} \mid \gamma - \beta \mid^{-1})$$

命 $\gamma = \log\left([X] + \frac{1}{2}\right), \beta = \log mn$,则

$$\sum_{m} \sum_{\substack{n \\ mn \leqslant X}} a_m b_n \chi(mn) = \int_{-A}^{A} \sum_{m} \sum_{n} a_m m^{i\alpha} b_n n^{i\alpha} \chi(mn) \cdot \frac{\sin \gamma\alpha}{C\alpha} d\alpha + O(XA^{-1} \sum_{m} \sum_{n} \mid a_m b_n \mid)$$

在引理 1 中取 $A = YMN$,则得所需之结论.

若 $Q^2 > Y$,则在引理 2 中取 $M = 1, a_1 = 1, b_n = \Lambda(n)$ 即得定理 2.因此可以假定 $Q^2 \leqslant Y$.

命

$$u = \min(Q^2, Y^{\frac{1}{3}}, YQ^{-2}) \quad ⑩$$

如同 $Q^2 > Y$ 时一样应用引理 2,则得

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \sup_{X \leqslant u^2} \mid \psi(X, \chi) \mid \ll (u^2 Q + uQ^2) L^2 \quad ⑪$$

考虑恒等式

$$\sum_{u < n \leqslant X} \Lambda(n) f(n) = S_1 - S_2 - S_3 \quad ⑫$$

此处

$$S_1 = \sum_{m \leqslant u n} \sum_{X/m} \mu(m)(\log n) f(mn) \quad ⑬$$

$$S_2 = \sum_{m \leqslant u^2} \sum_{n \leqslant X/m} c_m f(mn), c_m = \sum_{\substack{a \leqslant u, b \leqslant u \\ ab = n}} \mu(a) \Lambda(b) \quad ⑭$$

$$S_3 = \sum_{\substack{m < u \ n > u \\ mn \leqslant X}} \sum \tau_m \Lambda(n) f(mn), \tau_m = \sum_{\substack{d \mid m \\ d \leqslant u}} \mu(d) \quad ⑮$$

这可以由比较下面迪利克雷级数的恒等式的系数而求得

$$\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\right) = G(s)(-\zeta'(s)) - F(s)G(s)\zeta(s) - (\zeta(s)G(s) - 1)\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\right) \quad ⑯$$

此处

$$F(s) = \sum_{n \leqslant u} \Lambda(n) n^{-s}, \quad G(s) = \sum_{n \leqslant u} \mu(n) n^{-s} \quad ⑰$$

在 ⑫ 中记 $f(n) = \chi(n)$,则可见只要证明当 $j = 1,2,3$ 时,和

$$T_j = \sum_{q \leqslant Q} \frac{q}{\phi(q)} \sum_{\chi}{}^{*} \sup_{u^2 < X \leqslant Y} \mid S_j \mid$$

适合 ⑤ 即可，其中 T 需换成 T_j. 注意在 $\sum_{n\leqslant X}\Lambda(n)\chi(n)$ 中 $n\leqslant u$ 之诸项可由 ⑪ 估计.

由 ⑮ 可知

$$T_3\leqslant\sum_{m\in M}T_3(M)$$

此处 $M=\{2^ku\mid k=0,1,\cdots;2^ku^2\leqslant Y\}$ 及

$$T_3(M)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{u^2<X\leqslant Y}|S_3(M)|$$

其中

$$S_3(M)=\sum_{M<m\leqslant 2M}\sum_{u<m\leqslant X/m}\tau_m\Lambda(n)\chi(mn)$$

由引理 2 得

$$T_3(M)\ll\Big((M+Q^2)(YM^{-1}+Q^2)\sum_{m\leqslant 2M}d(m)^2\sum_{n\leqslant Y/M}\Lambda(n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\log Y\ll$$
$$(Y+Y^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}Q+YM^{-\frac{1}{2}}Q+Y^{\frac{1}{2}}Q^2)(\log Y)^3$$

由此易得所需的结论.

舒尔(1875.1—1941.1). 犹太数学家. 生于俄国莫吉廖夫，卒于巴基斯坦特拉维夫.

记 $\log n=\int_1^n \mathrm{d}\alpha/\alpha$，并交换求和与积分运算次序，则由 ⑬ 得

$$S_1=\int_1^X\sum_{m\leqslant\min(u,X/\alpha)}\mu(m)\chi(m)\sum_{\alpha\leqslant n\leqslant X/m}\chi(n)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}$$

运用波利亚 - 维诺格拉多夫不等式(舒尔(Schur)的证明是初等的)可知当 $q>1$ 时有

$$T_1\ll(Y+uQ^{\frac{5}{2}})(\log Y)^2$$

与 ⑩ 相结合仍可得相宜的估计.

综合上述方法可得 T_2 的估计. 将和 S_2 分割成两部分

$$S_2=S'_2+S''_2$$

此处 S'_2 含有 $m\leqslant u$ 诸项而 S''_2 则含有 $u<m\leqslant u^2$ 诸项，如 S_1 一样，可以处理 S'_2，而 S''_2 可以如 S_3 来处理，这样即可得 T_2 的一个适当上界并完成定理 1 的证明.

如同定理 1 推出相关注释①的系 1.1.1 一样，可以由定理 1 推出定理 3.

6.3 定理 2 与 4 的证明

定理 2 的证明类似于定理 1 的证明，但需换一个恒等式

① Vaughan, R. C. Mean value theorems in prime number theory. J. London Math. Soc. 1975, 10(2): 153-162.

$$\sum_{n\leqslant X}\mu(n)f(n) = 2S_1 - S_2 - S_3 \quad ⑱$$

此处

$$S_1 = \sum_{n\leqslant u}\mu(n)f(n) \quad ⑲$$

$$S_2 = \sum_{n\leqslant u^2}\sum_{n\leqslant X/m} c_m f(mn)$$

$$c_m = \sum_{\substack{a\leqslant u,\, b\leqslant u\\ ab=n}}\mu(a)\mu(b) \quad ⑳$$

$$S_3 = \sum_{m>u}\sum_{\substack{n>u\\ mn\leqslant X}}\tau_m\mu(n)f(mn) \quad ㉑$$

$$\tau_m = \sum_{\substack{d\mid m\\ d\leqslant u}}\mu(d)$$

这是下面恒等式的直接推论

$$\frac{1}{\zeta(s)} = 2G(s) - G(s)^2\zeta(s) - (\zeta(s)G(s)-1)\left(\frac{1}{\zeta(s)} - G(s)\right) \quad ㉒$$

其中 $G(s)$ 满足 ⑰.

定理2证明中的情况 $Q^2 > Y$ 可以如定理1证明中所用的方法来处理,命 u 适合 ⑩,则如前一样,⑪ 中将 $\psi(X,\chi)$ 换成 $M_r(X,\chi)$ 仍成立,在 ⑱ 中,当 $(n,r)=1$ 时,命 $f(n)=\chi(n)$;当$(n,r)>1$ 时,命 $f(n)=0$.则估计

$$T_j = \sum_{q\leqslant Q}\frac{q}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{u^2\leqslant X\leqslant Y}|S|,\quad j=1,2,3$$

即是.

类似于 ⑪,可以估出 T_1.用定理2中对应和的估计方法可以估计 T_3.类似地,用将 S_2 按 $m\leqslant u$ 及$m>u$ 划分为S_2' 与S_2'' 的方法可以估计T_2,所以 $T_2\leqslant T_2' + T_2''$,此处 T_2' 与T_2'' 对应于T_2 中将 S_2 分别换成 S_2' 与S_2'',T_2'' 可以类似于 T_3 来处理,剩下需处理者为 T_2'.

当 χ 为模 $q>1$ 的非主特征时,由波利亚 – 维诺格拉多夫不等式得

$$\sum_{\substack{n\leqslant Z\\ (n,r)=1}}\chi(n) = \sum_{d\mid r}\mu(d)\chi(d)\sum_{m\leqslant Z/d}\chi(m) \ll d(r)q^{\frac{1}{2}}\log q$$

所以

$$T'_2 \ll (Y + d(r)uQ^{\frac{5}{2}})L^2$$

由 ⑩ 可知 $uQ^{5/2}\leqslant Y^{5/6}Q$.由此可得定理2.

定理4的证明较之定理3的证明复杂些,其中的主要困难为原特征的归化.

注意

$$\sup_a\sup_{X\leqslant Y}\Big|\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n=a(\bmod q)}}\mu(n)\Big| \leqslant \sum_{r\mid q}\sup_{\substack{b\\ (b,q/r)=1}}\sup_{X\leqslant Y/r}\Big|\sum_{\substack{m\leqslant X\\ m=b(\bmod q/r)\\ (q,r)=1}}\mu(m)\Big|$$

所以

$$\sum_{q\leqslant Q}\sup_{a}\sup_{X\leqslant Y}\Big|\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv a(\bmod q)}}\mu(n)\Big|\leqslant\sum_{r\leqslant Q}F_r(Y/r,Q/r) \qquad ㉓$$

此处

$$F_r(Y,Q)=\sum_{q\leqslant Q}\sup_{\substack{a\\(a,q)=1}}\sup_{X\leqslant Y}\Big|\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv a(\bmod q)\\(n,r)=1}}\mu(n)\Big|$$

当$(a,q)=1$时

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv a(\bmod q)\\(n,r)=1}}\mu(n)\ \frac{1}{\phi(q)}\sum_{X\bmod q}\bar{\chi}(a)\sum_{\substack{n\leqslant X\\(n,r)=1}}\chi(n)\mu(n)$$

所以

$$\Big|\sum_{\substack{n\leqslant X\\ n\equiv a(\bmod q)\\(n,r)=1}}\mu(n)\Big|\leqslant\frac{1}{\phi(q)}\sum_{d\mid q}\sum_{X\bmod q}{}^{*}\Big|\sum_{\substack{n\leqslant X\\(n,rq/d)=1}}\chi(n)\mu(n)\Big|$$

这儿用到

$$F_r(Y,Q)\leqslant\sum_{k\leqslant Q}\frac{1}{\phi(k)}G_{rk}(Y,Q/k) \qquad ㉔$$

其中

$$G_r(Y,Q)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi}{}^{*}\sup_{X\leqslant Y}\Big|\sum_{\substack{n\leqslant X\\(n,r)=1}}\chi(n)\mu(n)\Big| \qquad ㉕$$

命 $R=Q$.则由 ③,④ 与分别积分可知

$$G_r(Y,Q)-G_r(Y,R)\leqslant Q^{-1}H_r(YQ)+\int_R^Q\alpha^{-2}H_r(Y,\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

所以由定理 2 得

$$G_r(Y,Q)-G_r(Y,R)\ll(YR^{-1}+Y^{\frac{1}{2}}Q)L^4+d(r)Y^{\frac{5}{6}}L^5 \qquad ㉖$$

假定 $q\leqslant(\log Z)^A$ 及χ 为模 q 的一个特征,则由迪利克雷 L－函数理论的标准应用可知

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\\(n,r)=1}}\chi(n)\mu(n)\ll A^{d(r)Z\exp(-c(\log Z)^{\frac{1}{2}})}$$

此处 c 为一个正常数,因此由 ㉕ 可知

$$G_r(Y,(\log Y)^B)\ll B^{d(r)Y\exp\left(\frac{1}{2}c(\log Y)^{\frac{1}{2}}\right)}$$

这与 ㉖ 联合并适当地选取 B 取得

$$G_r(Y,Q)\ll A^{(YL^{-A-4}+Y^{\frac{1}{2}}QL^4)d(r)}$$

所以由 ㉔ 得

$$F_r(Y,Q)\ll A^{(YL^{-A-2}+Y^{\frac{1}{2}}QL^4)d(r)}$$

因此当 $Q \leqslant Y^{1/2}$ 时，由 ㉓ 得

$$\sum_{q \leqslant Q} \sup_{\substack{a, X \\ X \leqslant Y}} \left| \sum_{\substack{n \leqslant X \\ n \equiv a(\bmod q)}} \mu(n) \right| \ll A^{YL^{-A} + Y^{\frac{1}{2}} QL^4}$$

注 当 $Q > N^{1/2}$ 时，定理的结论是显然的，定理 4 证完.

注(潘承彪) 由 ⑫，我们可以给出 $S(\alpha) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) e(n\alpha)$ 的估计，即当 $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < q^{-2}, (a, q) = 1$ 时有

$$S(\alpha) \ll (xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}) \log^{\frac{7}{2}} x$$

不失一般性，我们可以假定 $q \leqslant x$. 因

$$\sum_{m \leqslant y} \max_{\omega} \left| \sum_{\omega \leqslant n \leqslant x/m} e(mn\alpha) \right| \sum_{m \leqslant y} \min\left(\frac{x}{m}, \frac{1}{\| m\alpha \|} \right) \ll (xq^{-1} + yrq) \log qy$$

此处 $\| \xi \|$ 表示 ξ 至最近整数的距离，取 $f(n) = e(nx)$. 则由 ⑬，⑭ 与 ⑮ 得

$$S_1 \ll \log x \sum_{m \leqslant u} \max_{\omega} \left| \sum_{\omega \leqslant n \leqslant x/m} e(mn\alpha) \right| \ll (xq^{-1} + u + q) \log^2 x$$

$$S_2 \ll \log x \sum_{m \leqslant u^2} \left| \sum_{n \leqslant x/m} e(mn\alpha) \right| \ll (xq^{-1} + u^2 + q) \log^2 x$$

与

$$\begin{aligned}
S_3 &\ll \log x \max_{u < M < x/u} \left| \sum_{M < m \leqslant 2M} \tau_m \sum_{u < n \leqslant x/m} \Lambda(n) n(mn\alpha) \right| \ll \\
&\log^{\frac{5}{2}} x \max_{u < M < x/u} M^{1/2} \left(\sum_{M < m \leqslant 2M} \left| \sum_{u < n \leqslant x/m} \Lambda(n) e(mn\alpha) \right|^2 \right)^{1/2} \ll \\
&x^{1/2} \log^3 x \max_{u < M < x/u} \max_{u < n_1 \leqslant x/m} \left(\sum_{u < n_2 \leqslant x/M} \left| \sum_{\substack{M < m \leqslant 2M \\ m \leqslant x/n_1 \\ m \leqslant x/n_2}} e((n_1 - n_2) m\alpha) \right| \right)^{1/2} \ll \\
&x^{1/2} \log^3 x \max_{u < M < x/u} \max_{u < n_1 \leqslant x/M} \left(\sum_{u < n_2 \leqslant x/M} \min\left(M, \frac{1}{\| (n_1 - n_2)\alpha \|} \right) \right)^{1/2} \ll \\
&x^{1/2} \log^3 x \max_{u < M < x/u} \left(M + \sum_{1 \leqslant m \leqslant x/M} \min\left(\frac{x}{m}, \frac{1}{\| m\alpha \|} \right) \right)^{1/2} \ll \\
&(xq^{-1/2} + xu^{-1/2} + x^{1/2} q^{1/2}) \log^{7/2} x
\end{aligned}$$

取 $u = x^{2/5}$，即明所欲证.

7 表偶数为一个素数及一个殆素数之和

——瑞尼

关于表偶数为两个素数之和及表奇数为三个素数之和的问题是 1742 年哥德巴赫与欧拉通信中提出来的.

在 1937 年，维诺格拉多夫院士①用他关于三角和的估计方法证明了关于奇数的哥德巴赫定理，在 1938 年，朱达科夫②应用维诺格拉多夫方法证明了几乎所有偶数都是两个素数之和，其他类型的变体结果则是布朗③ 在 1920 年得到的，他用初等的埃拉朵斯染尼氏筛法证明了每个大偶数都可以表为两个殆素数之和，即 $2N = P_1 + P_2$，此处 P_1 与 P_2 最多只有 9④个素因子.

一个条件结果是埃斯特曼⑤在 1932 年证明的. 即每个大偶数是一个素数及一个素因子个数不超过 6 的殆素数之和. 埃斯特曼的结果是基于假定所有迪利克雷 L – 级数著名的未被证明的黎曼猜想之下证明的、本文不作任何假定，我们将证明：

定理 1 每个偶数都可以表示为 $2N = p + P$，此处 p 为一个素数而 P 为一个殆素数，即 P 最多只有 K 个素因子，此处 K 为一个绝对常数.

本文仅给出证明的主要步骤，详细证明将于另文发表.

黎曼猜想可以用关于 L – 级数零点的一条新定理(定理 2) 来代替，这条定理是用林尼克的两个方法来证明的，即大筛法⑥与含于其文⑦中的方法.

为了叙述定理 2，我们引入某些定义. 习知模 D 的 $\varphi(D)$ 个特征中的任何特征皆可以唯一地表成模 D 的素因子的特征之积，此处 D 是一个无平方因子数，因此若 $D = pq$，此处 p 为一个素数及 $(p, q) = 1$，则模 D 的每一个特征皆可以表为形式 $\chi_D(n) = \chi_p(n)\chi_q(n)$，此处 $\chi_p(n)$ 与 $\chi_q(n)$ 分别表示模 p 与模 q 之特征. 若 $\chi_p(n)$ 非主特征，则称 $\chi_D(n)$ 为关于 p 的原特征. 显然，若关于 D 的每个素因子，$\chi_D(n)$ 都是原特征，它就是通常意义下的原特征.

定理 2 命 q 为一个无平方因子数，$A \geqslant C_1$⑧，$k = \dfrac{\log q}{\log A} + 1$ 及 $k \leqslant \log^3 A$. 对于所有适合 $A \leqslant p \leqslant 2A$ 及 $(p, q) = 1$ 的素数，最多除去不超过 $A^{3/4}$ 个这种素数，模 $D = pq$ 的 L – 函数

$$L(s, \chi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + \mathrm{i}t$$

此处 $\chi(n)$ 为关于 p 的原特征，在区域 $\sigma \geqslant 1 - \dfrac{\delta}{k+1}$，$|t| \leqslant \log^3 D$ 中没有零点，其中 $\delta > 0$ 为一个常数.

例如，由定理 2 可以推出存在无穷多个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 使当 $\chi(n)$ 非

---

① I. M. Vinogradov. C. R. Acad. URSS, 1937, 15:291-294.
② N. G. Tchudakov, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat, 1938, 1:25-40.
③ V. Brun, Skr. Norske Vid. Akad; Kristiania, I, 1920, 3
④ 9 可以换成 4，见 V. A. Tartakovskii, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1939, 23:126-129. 与 A. A. Buchstab, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1940, 29:544-548.
⑤ T. Estermann, J. Reine Angew. Math, 1932. 168:106-116.
⑥ Ju. V. Linnik, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1914, 30:292-294.
⑦ Ju. V. Linnik, Mat. Sbornik, 1944, 15:3-12.
⑧ $C_1, C_2, \cdots$ 均表示绝对常数.

主特征模 p_n 时，当 $s=\sigma+\mathrm{i}t,\sigma\geqslant 1-\delta/2,|t|<\log^3 p_n$ 时有 $L(s,\chi)\neq 0$，此处 $\delta>0$ 为一个常数.

命

$$H(2N)=\sum_{\substack{p<2N\\(2N-p,B)=1}}\log p\cdot\exp\left(-p\frac{\log 2N}{2N}\right) \qquad ①$$

此处 $B=\prod_{c_2\leqslant p\leqslant(2N)^{1/R}}p$ 及 R 为一个给定整数，命

$$P_Q(x)=\sum_{\substack{p<x\\p\equiv l(\bmod Q)}}\log p\cdot\exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right)=\frac{x}{\varphi(Q)\log x}+R_Q(x) \qquad ②$$

此处 $(l,Q)=1$. 则由布朗方法可知

$$H(2N)>\frac{C_3N}{\log^2N}=\sum_{Q\leqslant E}|R_Q(2N)| \qquad ③$$

此处集合 E 的定义为：若 $c_2\leqslant p_i\leqslant(2N)^{\frac{1}{Rh^{[i/2]}}},i=1,\cdots,r$，则 E 含有形如 $Q=p_1p_2\cdots p_r$ 的无平方因子数，其中 $h=1.25$.

如果我们能够证明当 $N\geqslant c_4$ 时有 $H(2N)>0$，则定理 1 对于 $K=\max(R+c_2,c_4)$ 成立，因此问题归结为估计

$$\sum_{Q\leqslant E}|R_Q(2N)| \qquad ④$$

我们将证明

$$\sum_{Q\leqslant E}|R_Q(2N)|<\frac{4N}{\log^3N} \qquad ⑤$$

为了估计 ④，我们由定理 2 来推出定理 3.

定理 3 命 q_1 是一个无平方因子整数，$A\geqslant c_1$ 及

$$\exp((\log x)^{2/5})<Aq_1<\sqrt{x}$$

命 $k_1=\log q_1/\log\frac{p_1}{2}+1$，此处 p_1 为素数，$A\leqslant p_1<2A$ 及 $(p_1,q_1)=1$. 假定 $k_1\leqslant\log^3A$. 则最多除去 $A^{3/4}$ 个素数，对于所有素数 p_1 皆有

$$\left|\sum_{p\leqslant x}\chi(p)\log p\cdot\exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right)\right|\leqslant x^{1-\frac{\delta_1}{k_1+1}} \qquad ⑥$$

此处 $\chi(n)$ 为模 p_1q_1 的特征，它关于 p_1 为原特征，及 $\delta_1>0$ 为一个常数.

容易由定理 2 及熟知的李特伍德公式①推出

$$\sum_{1}^{\infty}\Lambda(n)\chi(n)e^{-\frac{n}{Y}}=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{2-\mathrm{i}\infty}^{2+\mathrm{i}\infty}\frac{L'}{L}(s,\chi)\Gamma(s)Y^s\mathrm{d}s \qquad ⑦$$

① Ju. V. Linnik, Mat. Sbornik, 1944, 15: 3-12.

从熟知的梯其玛奇①、帕奇②与西格尔③的结果可知

$$P_D(x) = \frac{x}{\varphi(D)\log x} + O(x\exp(-c_6\sqrt{\log x})) \tag{⑧}$$

对于所有 $D \leqslant \exp(c_5\sqrt{\log x})$ 成立,最多除掉某整数 D_1 ④的倍数的 D,D_1 是可能存在的.

当 $D_1 \mid D$ 时有

$$P_D(x) = \frac{x}{\varphi(D)\log x} + O(x\exp(-c_6\sqrt{\log x})) + O\left(\frac{1}{\varphi(D)}x^{1-\frac{C_\varepsilon}{D_1{}^\varepsilon}}\right) \tag{⑨}$$

此处 ε 为任意正数及 C_ε 仅依赖于 ε. 进而言之,我们需要布朗 - 梯其玛奇公式⑤

$$P_D(x) = O\left(\frac{x}{\varphi(D)}\right) \tag{⑩}$$

对于 $D \leqslant \sqrt{x}$ 一致成立.

研究和④,命 $2N = x$ 及

$$S_\chi(x) = \sum_{p\leqslant x}\chi(p)\log p \cdot \exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right) \tag{⑪}$$

若 $Q \geqslant \exp((\log x)^{2/5})$ 及 $Q = p_1q_1$,此处 p_1 为 Q 的最大素因子及它不是定理 3 意义下被除去的一个,则由

$$P_Q(x) = \frac{1}{\varphi(Q)}\sum_{(\chi)}\bar{\chi}(l)S_\chi(x) \tag{⑫}$$

可得

$$P_Q(x) = \frac{1}{\varphi(p_1)}Pq_1(x) + O(x^{1-\frac{\delta_1}{k_1+1}}) \tag{⑬}$$

这个手续可以对于 $q_1 = p_2q_2, q_2 = p_3q_3$ 等加以继续,直至经过一定步骤,例如 s 步,之后,定理3的条件对于 $q_s = p_{s+1}q_{s+1}$ 不成立.则若 $q_s < \exp(\log x)^{2/5}$,我们用⑧或⑨,而当 $q_s \geqslant \exp(\log x)^{2/5}$ 及 p_{s+1} 为一个被除去的素数,我们用⑩.则④的估计归结为下面四种项的和的估计:

(1) $x\exp(1-c_6\sqrt{\log x})$.

(2) $\frac{1}{\varphi(D)}{}'x^{1-\frac{C_\varepsilon}{D_1^\varepsilon}}$.

---

① E. C. Titchmarsh, Rend. Cir. Mat. Palermo, 1930,54:414-429.
② A. Page, Proc. London Math. Soc, 1935,39:116-141.
③ C. L. Siegel, Acta Arith, 1936,1:83-86.
④ D_1 为模,其对应的 L - 级数在区域 $\sigma > 1 - c_7/\sqrt{\log x}$ 中有西革尔零点 $\rho = \sigma + it$.
⑤ E. C. Titchmarsh, Rend. Cir. Mat. Palermo, 1930,54:414-429.

(3) $\frac{x}{\varphi(D)}$.

(4) $x^{1-\frac{\delta_1}{k_1+1}}$.

类型(1) 的项的和明显地有 $O(N/\log^4 N)$.

类型(2) 的项的和不超过

$$N\log^3 N \cdot \exp\left(-\log D_1 - \frac{C_\varepsilon}{D_1^\varepsilon}\log N\right) \tag{⑭}$$

尽管 D_1 的值是未知的,但我们可以证明对于 $1 \leqslant D_1 < \infty$, $N \geqslant c_4$ 及 $\varepsilon = 1/8$, ⑭ 的极大不超过 $N/\log^3 N$.

在估计类型(3) 的项的和时,需注意对于任何 q,在任何区间$(A,2A)$ 中被除去的素数 p' 的个数不超过 $A^{3/4}$,所以

$$\sum_{p' \geqslant T} \frac{1}{p'-1} < \frac{\log^2 T}{T^{1/4}}, \quad T \geqslant c_8 \tag{⑮}$$

最后,下述关于 E 的初等性质对于类型(4) 的项的和的估计是需要的:整数 $Q = pq$ 的个数,此处 p 为 Q 的最大素因子,它属于 E 并满足 $p < q^{1/k}$(k 为整数大于等于 1),不超过 $(2N)^{40k/Rh^{k/2}}$.

因此我们证明了,对于充分大的 R,当 $N > c_8$ 时,任何类型项的和均不超过 $N/\log^3 N$,即

$$\sum_{Q \leqslant E} |R_Q(2N)| < \frac{4N}{\log^3 N}, \quad N > c_8 \tag{⑯}$$

由 ③ 与 ⑯ 可知当 $N > c_4$ 时有 $H(2N) > c_9 N/\log^2 N$,故得定理 1. 方程 $2N = p + P$ 的解数不小于 $c_9 N/\log^3 N$.

很自然地希望能证明解数为 $O(N/\log^2 N)$. 结果减弱的原因在于我们用和 $\sum \log p \cdot \exp\left(-p\frac{\log x}{x}\right)$ 代替 $\sum \log p$,从而使运用李特伍德公式时,定理 2 中无零点的矩形的长边可以减少.

类似于定理 1,我们有:

定理 4 存在无限多个素数 p 使 $P = p + 2$ 为一个殆素数,即 P 的素因子个数不超过一个绝对常数.

定理 4 给出著名孪生素数对有无穷多这一猜想的一个迫近结果.

哥德巴赫数与姚琦

第十章

1 哥德巴赫数(一)[①]

——潘承洞 潘承彪

我们把能够表为两个奇素数之和的偶数称为哥德巴赫数,而把不能够表为两个奇素数之和的偶数称为非哥德巴赫数.我们把所有不超过 x 的非哥德巴赫数所组成的集合及其个数均用 $E(x)$ 来表示,$E(x)$ 亦称为哥德巴赫数的例外集合.这样,关于偶数的哥德巴赫猜想就是要证明:当 $x \geqslant 4$ 时有

$$E(x) = 2$$

本文的主要目的是证明 Montgomery 和 Vaughan 所得到的目前关于 $E(x)$ 的最好估计(1.2 定理 3)

$$E(x) \ll x^{1-\Delta}$$

这里 Δ 为一可计算的绝对正常数定出 $\Delta > 0.01$.在证明这一结果之前,我们将先顺便证明较弱的结果(1.1 定理 2);对任给正数 A,有

$$E(x) \ll \frac{x}{\log^A x}$$

最近,Ramachandra 把这一较弱的估计推广到了小区间的情形.我们将在 1.3 证明这一结果(定理 5).

① 摘自潘承洞,潘承彪.哥德巴赫猜想.科学出版社,1984.

显然,这些结果相对于解决关于偶数的哥德巴赫猜想来说是微不足道的,用这样的方法看来也是没有希望解决这一猜想的.但是,我们从利用了这么多的工具和十分深刻的性质仅能对它得到这么弱的结果这一点可以看出,要最终解决哥德巴赫猜想是存在着多么巨大的困难.

1.1 $E(x)$ 的初步估计

设 x 为充分大的数,以 $D(n,x)$ 表示方程

$$n = p_1 + p_2, \quad 2 < p_1 \leqslant x, \quad 2 < p_2 \leqslant x$$

的解数.显然,当 $n \leqslant 4$ 或 $n > 2x$ 时,恒有

$$D(n,x) = 0$$

同时,若

$$D(n,x) > 0$$

则 n 一定是哥德巴赫数.

设

$$S(\alpha,x) = \sum_{2<p\leqslant x} e(\alpha p)$$

则显然有

$$D(n,x) = \int_9^1 S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

现在来应用圆法.设 $Q = \log^{\lambda}x, \tau = xQ^{-1}, \lambda \geqslant 9$ 为待定正常数.显然,当 x 充分大时,对所取的 Q 及 τ,我们可以确定基本区间 E_1 及余区间 E_2.若设

$$S_1(\alpha,x) = \begin{cases} S(\alpha,x), & \alpha \in E_1 \\ 0, & \alpha \in E_2 \end{cases}$$

及

$$S_2(\alpha,x) = \begin{cases} S(\alpha,x), & \alpha \in E_2 \\ 0, & \alpha \in E_1 \end{cases}$$

我们就有

$$D(n,x) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = D_1(n,x) + D_2(n,x)$$

其中①

$$D_1(n,x) = \int_{E_1} S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S_1^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

---

① 容易证明 $D_1(n,x)$ 及 $D_2(n,x)$ 都是实数.

$$D_2(n,x)=\int_{E_2}S^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}S_2^2(\alpha,x)e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

由熟知的 Parseval 等式就得以

$$\sum_n|D_1(n,x)|^2=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}|S_1(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha=\int_{E_1}|S(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha$$
$$\sum_n|D_2(n,x)|^2=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}}|S_2(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha=\int_{E_2}|S(\alpha,x)|^4\mathrm{d}\alpha \qquad ①$$

如果能够证明

$$|D_1(n,x)|>|D_2(n,x)| \qquad ②$$

那么就一定有

$$D(n,x)>0$$

因而 n 就一定是哥德巴赫数．至今，对于一个固定的偶数 n 我们并不能证明式 ② 成立．但是，利用 Виноградов 证明三素数定理的思想及关系式 ①，我们可以证明：几乎对于所有不超过 x 的偶数 n，都有式 ② 成立．以上就是利用圆法来研究关于偶数的哥德巴赫猜想的基本思想．本文将要证明下面的定理：

定理 1　对于任意给定的正数 A，区间$\left(\frac{x}{2},x\right]$中的偶数 n 除了可能有远小于$\frac{x}{\log^A x}$ 个例外值外，恒有

$$|D_1(n,x)|>|D_2(n,x)|$$

成立．

若以 $E_1(x)$ 表示区间$\left(\frac{x}{2},x\right]$中的非哥德巴赫数的个数，则由定理 1 立即推出

$$E_1(x)\ll\frac{x}{\log^A x}$$

设正整数 K 满足 $2^K<x^{\frac{1}{2}}\leqslant 2^{K+1}$，则有

$$E(x)\leqslant x^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{K+1}E_1\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\ll x^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{K+1}\frac{x}{2^{k-1}\log^A\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}\ll\frac{x}{\log^A x}$$

这样，由定理 1 就可推得本文的主要结果：

定理 2　对于任给的正数 A，我们有

$$E(x)\ll\frac{x}{\log^A x}$$

下面我们分若干引理来证明定理 1．首先估计余区间上的积分 $D_2(n,x)$．

引理 1　设 M 为使 $|D_2(n,x)|>xQ^{-\frac{1}{3}}$ 的整数 n 的个数，则

$$M \ll xQ^{-\frac{1}{3}}\log^3 x$$

证明 当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S(\alpha,x) \ll xQ^{-\frac{1}{2}}\log^2 x$$

由此及式 ① 得

$$\sum_n |D_2(n,x)|^2 = \int_{E_2} |S(\alpha,x)|^4 d\alpha \ll x^2Q^{-1}\log^4 x \int_{E_2} |S(\alpha,x)|^2 d\alpha \ll x^3Q^{-1}\log^3 x$$

因而有

$$Mx^2Q^{-\frac{2}{3}} \ll x^3Q^{-1}\log^3 x$$

这就证明了引理 1.

下面我们来处理基本区间上的积分 $D_1(n,x)$.

引理 2 我们有

$$\sum_{q\leq Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right| \ll \log\log n$$

其中 $C_q(-n)$ 为 Ramanujan 和.

证明

$$\sum_{q\leq Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right| = \sum_{q\leq Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}\phi((n,q)) = \sum_{d\mid n}\phi(d)\sum_{\substack{q\leq Q\\(q,n)=d}}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} = \sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)}{\phi^2(d)}\sum_{\substack{v\leq Q/d\\(v,n/d)=1}}\frac{\mu^2(v)}{\phi^2(v)} \ll \sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{n}{\phi(n)}$$

由此及熟知的不等式

$$\frac{n}{\phi(n)} \ll \log\log n \qquad ③$$

就证明了引理 2.

引理 3 设 $d(n)$ 为除数函数,我们有

$$\sum_{q>Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right| \ll d(n)Q^{-1}(\log\log Q)^2\log\log n$$

证明

$$\sum_{q>Q}\left|\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right| = \sum_{q>Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi(q)}\phi((n,q)) = \sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(q)}{\phi(q)}\sum_{\substack{v>Q/d\\(v,n/d)=1}}\frac{\mu^2(v)}{\phi^2(v)} \ll (\log\log Q)^2\sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(q)}{\phi(q)}\sum_{v>Q/d}\frac{1}{v^2} \ll Q^{-1}(\log\log Q)^2\sum_{d\mid n}\frac{\mu^2(d)d}{\phi(d)} \ll Q^{-1}(\log\log Q)^2(\log\log n)2^{\nu_1 n}$$

这里 $\nu_1(n)$ 为 n 的不同的素因子的个数. 由于 $2^{\nu_1(n)} \leqslant d(n)$，这就证明了引理 3.

引理 4　级数

$$G_2(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)$$

绝对收敛，且有

$$G_2(n) = \frac{n}{\phi(n)} \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \tag{④}$$

证明　由引理 2 或 3 均可推出级数 $G_2(n)$ 为绝对收敛，因而有

$$G_2(n) = \prod_{p} \left(1 + \frac{C_p(-n)}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)$$

这就证明了式 ④.

$$C_p(-n) = \begin{cases} p-1, & p \mid n \\ -1, & p \nmid n \end{cases}$$

由 ④ 容易推得：当 n 为奇数时

$$G_2(n) = 0 \tag{⑤}$$

当 n 为偶数时，由于

$$1 > \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$$

所以

$$1 \leqslant \frac{1}{2} \frac{n}{\phi(n)} < G_2(n) < \frac{n}{\phi(n)} \tag{⑥}$$

当 n 为偶数时有

$$G_2(n) = 2C(n) \tag{⑦}$$

引理 5　设 $\frac{1}{2}x < n \leqslant x$，我们有

$$D_1(n,x) = \left(\sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)\right) \frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right) \tag{⑧}$$

证明　当 $\alpha \in E_1$ 时，有

$$S^2(\alpha,x) = \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} \sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log m} + O(x^2 e^{-a_1\sqrt{\log x}})$$

这里 $\alpha = \frac{h}{q} + z \in I(q,h) \subset E_1$. 所以

$$D_1(n,x) = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{h=0}^{q-1} \int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha,x) e(-\alpha n) \mathrm{d}\alpha =$$

$$\left(\sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)\right) \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{m=2}^{[x]-1} \frac{e(zm)}{\log m}\right)^2 e(-zn) \mathrm{d}z +$$

$$O(x e^{-a_2\sqrt{\log x}})$$

利用 $Q = \log^{\lambda}x, \tau = xQ^{-1}$,我们有

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left[\left(\sum_{m=2}^{[x]-1}\frac{e(zm)}{\log m}\right)^2 - \left(\sum_{m=2}^{[x]-1}\frac{e(zm)}{\log[x]}\right)^2\right]e(-zn)\mathrm{d}z \ll$$

$$\frac{x}{\log^2 x}\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\min\left(\frac{[x]}{\log[x]}, \frac{1}{|z|\log[x]}\right)\mathrm{d}z \ll$$

$$\frac{x}{\log^2 x}\left(\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{x}{\log x}\mathrm{d}z + \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{Q}{x}}\frac{\mathrm{d}z}{z\log x}\right) \ll$$

$$\frac{x}{\log^3 x}\log Q \ll \frac{x\log\log x}{\log^3 x}$$

由以上二式及引理 2 即得

$$D_1(n,x) = \left(\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1}\frac{e(zm)}{\log[x]}\right)^2 e(-zn)\mathrm{d}z + O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right)$$

有

$$\int_{\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1}e(zm)\right)^2 e(-zn)\mathrm{d}z \ll \tau$$

及

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{\tau}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1}e(zm)\right)^2 e(-zn)\mathrm{d}z \ll \tau$$

由以上三式、引理 2 并利用 $\lambda \geqslant 9$ 即得

$$D_1(n,x) = \left(\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\right)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1}\frac{e(zm)}{\log[x]}\right)^2 e(-zn)\mathrm{d}z + O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right)$$

由于 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$,我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=2}^{[x]-1}e(zm)\right)^2 e(-zn)\mathrm{d}z = \sum_{\substack{n=m_1+m_2\\ 2\leqslant m_1,m_2\leqslant[x]-1}} 1 = n + O(1)$$

从以上二式及引理 2 即得式 ⑧,引理 5 证毕.

定理 1 的证明 取 $\lambda = 3A+9, Q = \log^{\lambda}x, \tau = x\log^{-\lambda}x$. 由引理 5、引理 3 推得

$$D_1(n,x) = G_2(n)\frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}d(n)Q^{-1}(\log\log x)^3\right) +$$

$$O\left(\frac{x(\log\log x)^2}{\log^3 x}\right)$$

知

$$\sum_{n\le x} d(n) \ll x\log x$$

所以在$\frac{x}{2} < n \le x$中，使$d(n) > Q\log^{-1}x$的n的个数远小于$xQ^{-1}\log^2 x$。

因此，在$\frac{x}{2} < n \le x$中除去远小于$xQ^{-1}\log^2 x$个例外值n外，总有

$$D_1(n,x) = G_2(n)\frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{x(\log\log x)^3}{\log^3 x}\right)$$

由上式，引理1及式⑥知，对充分大的x，当n为偶数，$\frac{x}{2} < n \le x$时(注意这里$\lambda > 9$)，除了远小于$xQ^{-1/3}\log^3 x = x\log^{-A}x$个例外值$n$外，一定有

$$|D_1(n,x)| > |D_2(n,x)|$$

这就证明了定理1.

从以上圆法所得到的结果，人们猜测，如果关于偶数的哥德巴赫猜想正确的话，应该有

$$D(n) \sim G_2(n)\frac{n}{\log^2 n} \quad ⑨$$

这里n为偶数，$D(n)$为n表为两个奇素数之和的表法的个数.

1.2 $E(x)$的进一步估计

本节将得到比定理2更强的估计，我们要证明下面的定理：

定理3 存在一个可计算的绝对正常数Δ，使得

$$E(x) \ll x^{1-\Delta}$$

定理3的证明方法在原则上和定理2是一样的. 我们可以看出，如果1.1中的所有引理，当把Q放大到x^{η}($\eta < 1$为一适当的正数)时仍然正确，我们就立即得到定理3，而1.1中的所有结论除引理5外，都显然和Q的阶无关. 所以把Q放大到x^{η}时仍是正确的. 但在引理5中，我们应用了Siegel-Walfisz定理，而Q放大到x^{η}时，就不能如此简单地应用Siegel-Walfisz定理，因此也就推不出引理5来. 这时需要作十分细致的考虑，情况变得极为复杂. 同时为了使得常数可以计算，还一定要避开Siegel-Walfisz定理，而用Page定理来代替它.

放大Q就是放大基本区间，在圆法中，基本区间的放大就会带来许多新的困难. 而这些困难的克服，在本质上依赖于对L－函数零点性质的进一步研究.

设x为充分大的正数，$Q = x^{\eta}$，$\tau = xQ^{-1}$，$\eta < \frac{1}{4}$为一待定正常数. 为了便于利用L－函数的性质，代替1.1中的$S(\alpha,x)$，我们考虑

$$\hat{S}(\alpha) = \hat{S}(\alpha;x,Q) = \sum_{Q<p\leqslant x} \log p e(\alpha p) \qquad ⑩$$

相应地,代替 $D(n,x)$,要考虑

$$\hat{D}(n) = \hat{D}(n;x,Q) = \sum_{\substack{n=p_1+p_2 \\ Q<p_1,p_2\leqslant x}} \log p_1 \log p_2$$

显然有

$$\hat{D}(n) = \int_0^1 (\hat{S}(\alpha))^2 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

及

$$\hat{D}(n) = 0, \text{当 } n \leqslant 2Q, \text{或 } n > 2x$$

且若

$$\hat{D}(n) > 0$$

则 n 一定是哥德巴赫数.

现来应用圆法.对所取的 Q 及 τ,当 x 充分大时,我们以 E_1 及 E_2 分别表示由所取的 Q 及 τ 所确定的基本区间及余区间.同样,若设

$$\hat{S}_1(\alpha) = \begin{cases} \hat{S}(\alpha), & \alpha \in E_1 \\ 0, & \alpha \in E_2 \end{cases}$$

及

$$\hat{S}_2(\alpha) = \begin{cases} \hat{S}(\alpha), & \alpha \in E_2 \\ 0, & \alpha \in E_1 \end{cases}$$

则有

$$\hat{D}(n) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} (\hat{S}(\alpha))^2 e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha = \hat{D}_1(n) + \hat{D}_2(n)$$

其中

$$\hat{D}_1(n) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} (\hat{S}_1(\alpha))^2 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

$$\hat{D}_2(n) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} (\hat{S}_2(\alpha))^2 e(-\alpha n)\mathrm{d}\alpha$$

由 Parseval 等式即得

$$\sum_n |\hat{D}_2(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} |\hat{S}(\alpha)|^4 \mathrm{d}\alpha = \int_{E_2} |\hat{S}(\alpha)|^4 \mathrm{d}\alpha \qquad ⑪$$

和 1.1 中的论证完全一样,由下面的定理立即可推出定理 3.

定理 4 存在一个可计算的绝对正常数 Δ,使得区间$\left(x, \frac{x}{2}\right]$中的偶数 n,除了可能有远小于 $x^{1-\Delta}$ 个例外值外,恒有

$$|\hat{D}_1(n)|>|\hat{D}_2(n)|$$

下面我们就来证明定理 4.为此要分别讨论 $\hat{D}_1(n)$ 及 $\hat{D}_2(n)$.首先,和引理 1 相同,对余区间上的积分 $\hat{D}_2(n)$ 我们有

引理 6 设 M 为使

$$|\hat{D}_2(n)|> xQ^{-\frac{1}{3}}$$

的整数 n 的个数,则

$$M \ll xQ^{-\frac{1}{3}}\log^{24}x$$

证明 当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$\hat{S}(\alpha) \ll xQ^{-\frac{1}{2}}\log^{12}x$$

由此及式 ⑪ 得

$$\sum_n |\hat{D}_2(n)|^2 = \int_{E_2} |\hat{S}(\alpha)|^4 \mathrm{d}\alpha \ll x^2Q^{-1}\log^{24}x\int_0^1 |\hat{S}(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha \ll x^3Q^{-1}\log^{24}x$$

因而有

$$Mx^2Q^{-\frac{2}{3}} \ll x^3Q^{-1}\log^{24}x$$

这就证明了引理 6.

估计基本区间上的积分 $\hat{D}_1(n)$ 是极其复杂的.我们将分(1),(2),(3),(4)四部分来讨论它.以下恒假定$\frac{x}{2} < n \leqslant x$.

(1)$\hat{D}_1(n)$ 的分解式.

设 $\chi \bmod q, q \leqslant Q$,则

$$\hat{S}(\theta,\chi) = \sum_{Q<p\leqslant \chi}\chi(p)\log pe(p\theta) \qquad ⑫$$

推得

$$e\left(\frac{h}{q}\right) = \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi}),\quad (h,q)=1$$

当 $q \leqslant Q < p$ 时,一定有$(q,p)=1$,所以

$$e\left(\frac{hp}{q}\right) = \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(hp)\tau(\bar{\chi})$$

$$(h,q)=1, q \leqslant Q < p \qquad ⑬$$

设 $\alpha \in I(q,h) \subset E_1$,则

$$\alpha = \frac{h}{q}+\theta,(h,q)=1,q\leqslant Q,|\theta|\leqslant\frac{1}{\tau} \qquad ⑭$$

由式 ⑩,⑫,⑬ 及 ⑭ 我们有

$$\hat{S}(\alpha) = \sum_{Q<p\leqslant x}\log pe(p\theta)\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(hp)\tau(\bar{\chi}) =$$

$$\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi})\hat{S}(\theta,\chi) \tag{15}$$

对于这儿所取的 Q,我们以 $\tilde{q}\leqslant Q$,$\tilde{\chi}$ mod $\tilde{q}$ 及 $\tilde{\beta}$ 分别表示可能存在的例外模,例外原特征及例外零点.再设

$$T(\theta)=\sum_{Q<m\leqslant x}e(m\theta) \tag{16}$$

$$\tilde{T}(\theta)=\sum_{Q<m\leqslant x}m^{\tilde{\beta}-1}e(m\theta) \tag{17}$$

并令

$$\begin{cases}\hat{S}(\theta,\chi_q^0)=T(\theta)+W(\theta,\chi_q^0)\\ \hat{S}(\theta,\chi_q^0\tilde{\chi})=\tilde{T}(\theta)+W(\theta,\chi_q^0\tilde{\chi}),\tilde{q}\mid q\\ \hat{S}(\theta,\chi_q)=W(\theta,\chi_q),\chi_q\neq\chi_q^0,\text{及当 }\tilde{q}\mid q\text{ 时 }\chi_q\neq\chi_q^0\tilde{\chi}\end{cases} \tag{18}$$

这样当 $\alpha\in E_1$ 时,由式⑮,⑱得到

$$\hat{S}(\alpha)=\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\theta)+E_0\frac{\tau(\chi_q^0\tilde{\chi})\tilde{\chi}(h)}{\phi(q)}\tilde{T}(\theta)+\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi})W(\theta,\chi) \tag{19}$$

其中

$$E_0=\begin{cases}1, & \tilde{q}\mid q\\ 0, & \tilde{q}\nmid q\end{cases}$$

所以我们就有

$$\begin{aligned}\hat{D}_1(n)&=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{h=0}^{q-1}\int_{\frac{h}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{h}{q}+\frac{1}{\tau}}(\hat{S}(\alpha))^2e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_{q\leqslant Q}\sum_{h=0}^{q-1}{}'e\left(-\frac{hn}{q}\right)\cdot\\ &\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left[\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\theta)+\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi})W(\theta,\chi)\right]^2e(-n\theta)\mathrm{d}\theta+\\ &\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}\mid q}}\sum_{h=0}^{q-1}{}'e\left(-\frac{hn}{q}\right)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left[\left(\frac{\tau(\chi_q^0\tilde{\chi})\tilde{\chi}(h)}{\phi(q)}\tilde{T}(\theta)\right)^2+\right.\\ &2\left(\frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(\theta)+\frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(h)\tau(\bar{\chi})W(\theta,\chi)\right)\cdot\\ &\left.\left(\frac{\tau(\chi_q^0\tilde{\chi})\tilde{\chi}(h)}{\phi(q)}\tilde{T}(\theta)\right)\right]e(-n\theta)\mathrm{d}\theta=\sum_{j=1}^{h}\hat{D}_{1,j}(n)\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\hat{D}_{1,1}(n)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}T^2(\theta)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta \tag{21}$$

$$\hat{D}_{1,2}(n) = 2\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu(q)}{\phi^2(q)}\sum_{\chi_q}\tau(\bar{\chi})G_{\chi}(-n)\cdot$$

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}T(\theta)W(\theta,\chi)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta \qquad ㉒$$

$$\hat{D}_{1,3}(n) = \sum_{q\leqslant Q}\frac{1}{\phi^2(q)}\sum_{\chi_q}\sum_{\chi'_q}\tau(\bar{\chi})\tau(\bar{\chi}')G_{\chi\chi'}(-n)\cdot$$

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}W(\theta,\chi)W(\theta,\chi')e(-n\theta)\mathrm{d}\theta \qquad ㉓$$

$$\hat{D}_{1,4}(n) = \sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}\mid q}}\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\bar{\tilde{\chi}})\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}(\tilde{T}(\theta))^2e(-n\theta)\mathrm{d}\theta \qquad ㉔$$

$$\hat{D}_{1,5}(n) = 2\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}\mid q}}\frac{\mu(q)}{\phi^2(q)}G_{\chi_q^0\bar{\tilde{\chi}}}(-n)\tau(\chi_q^0\bar{\tilde{\chi}})\cdot$$

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}T(\theta)\tilde{T}(\theta)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta \qquad ㉕$$

$$\hat{D}_{1,6}(n) = 2\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}\mid q}}\frac{\tau(\chi_q^0\bar{\tilde{\chi}})}{\phi^2(q)}\sum_{\chi_q}G_{\chi\bar{\tilde{\chi}}}(-n)\tau(\bar{\chi})\cdot$$

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\tilde{T}(\theta)W(\theta,\chi)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta \qquad ㉖$$

这就是 $\hat{D}_1(n)$ 的分解式.我们将证明 $\hat{D}_{1,1}(n)$ 及 $\hat{D}_{1,4}(n)$ 是它的主要项.这就表明了 $\hat{S}(\theta,\chi)$,当例外原特征不存在时,除了 $\chi=\chi^0$ 外都是比较小的;当例外原特征存在时,则除了 $\chi=\chi^0$ 及当 $\tilde{q}\mid q$ 时,$\chi=\chi_q^0\bar{\tilde{\chi}}$ 这两种情形外,亦都是比较小的,这种复杂性是由于把 Q 放大到了 x^{η} 及可能存在例外零点 $\tilde{\beta}$ 所引起的.

(2) $\hat{D}_{1,j}(n)$ 的估计.

首先我们来证明一个引理:

引理 7 当 $\frac{x}{2}<n\leqslant x$ 时,我们有

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}T^2(\theta)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta = n+O(\tau) \qquad ㉗$$

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}(\tilde{T}(\theta))^2e(-n\theta)\mathrm{d}\theta = \tilde{I}(n)+O(\tau) \qquad ㉘$$

这里

$$\tilde{I}(n) = \sum_{Q<m\leqslant n-Q}(m(n-m))^{\tilde{\beta}-1} \qquad ㉙$$

以及

$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T(\theta)\tilde{T}(\theta)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta = \tilde{J}(n) + O(\tau) \quad ㉚$$

这里

$$\tilde{J}(n) = \sum_{Q<m\leqslant n-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \quad ㉛$$

证明　当$\langle\theta\rangle > 0$时,有

$$T(\theta) \ll \frac{1}{\langle\theta\rangle} \quad 及 \quad \tilde{T}(\theta) \ll \frac{1}{\langle\theta\rangle}$$

故而有

$$\int_{\pm\frac{1}{\tau}}^{\pm\frac{1}{2}} |T(\theta)|^2\mathrm{d}\theta \ll \tau \quad 及 \quad \int_{\pm\frac{1}{\tau}}^{\pm\frac{1}{2}} |\tilde{T}(\theta)|^2\mathrm{d}\theta \ll \tau$$

此外我们有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T^2(\theta)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{Q<m\leqslant n-Q} 1$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\tilde{T}(\theta))^2 e(-n\theta)\mathrm{d}\theta = \tilde{I}(n)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} T(\theta)\tilde{T}(\theta)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta = \tilde{J}(n)$$

综合以上结果就证明了引理 7.

在估计$\hat{D}_{1,j}(n)$之前,我们先指出下面的一个事实:设$q \leqslant Q$,$\chi_q \Leftrightarrow \chi_q^{*}$,则一定有

$$\hat{S}(\theta,\chi) = \hat{S}(\theta,\chi^{*}) \quad ㉜$$

及

$$W(\theta,\chi) = W(\theta,\chi^{*}) \quad ㉝$$

这是由于求和范围$Q < p \leqslant x$所决定的,因当$q \leqslant Q$时,总有$(p,q) = 1$.

(i)$\hat{D}_{1,2}(n)$,$\hat{D}_{1,3}(n)$,$\hat{D}_{1,6}(n)$的估计.

利用式㉝,由式㉒得

$$\hat{D}_{1,2}(n) = 2\sum_{d\leqslant Q}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{\substack{d\leqslant Q\\ d\mid q}}\frac{\mu(q)}{\phi^2(q)}\tau(\chi_q^0\chi_d)G_{\chi_q^0\chi_d}(-n)\cdot \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T(\theta)W(\theta,\chi_d)e(-n\theta)\mathrm{d}\theta$$

由于

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |T(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta \leqslant x$$

利用 Schwarz 不等式有

$$\left|\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} T(\theta) W(\theta, \chi_d) e(-n\theta) \mathrm{d}\theta\right| \leqslant x^{\frac{1}{2}} W(\chi_d)$$

其中

$$W(\chi_d) = \left(\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} |W(\theta, \chi_d)|^2 \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \quad ㉞$$

这样就得到了

$$|\hat{D}_{1,2}(n)| \leqslant 2x^{\frac{1}{2}} \sum_{d \leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^{*} W(\chi_d) \left(\sum_{\substack{q \leqslant Q \\ d | q}} \left| \frac{\mu(q)}{\phi^2(q)} \tau(\chi_q^{0-}\chi_d) G_{\chi_q^0 \chi_d}(-n) \right| \right) \leqslant$$

$$64x^{\frac{1}{2}} \frac{n}{\phi(n)} W \quad ㉟$$

其中

$$W = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^{*} W(\chi_d) \quad ㊱$$

用完全同样的方法可以得到

$$|\hat{D}_{1,3}(n)| \leqslant 32 \frac{n}{\phi(n)} W^2 \quad ㊲$$

$$|\hat{D}_{1,6}(n)| \leqslant 64x^{\frac{1}{2}} \frac{n}{\phi(n)} W \quad ㊳$$

(ii) $\hat{D}_{1,1}(n)$ 的估计.

由式 ㉑ 及 ㉗ 知

$$\hat{D}_{1,1}(n) = \sum_{q \leqslant Q} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} C_q(-n)(n + O(\tau))$$

由引理 2、引理 3、引理 4、$\tau = xQ^{-1}$ 及对任意小的 ε 有 $d(n) \ll x^{\varepsilon/2}$,从上式就得到

$$\hat{D}_{1,1}(n) = G_2(n) n + O(x^{1+\varepsilon} Q^{-1}) \quad ㊴$$

(iii) $\hat{D}_{1,5}(n)$ 的估计.

由式 ㉕,㉚ 并利用 $\bar{J}(n) \leqslant x$ 可得

$$\hat{D}_{1,5}(n) = 2 \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ \tilde{q} | q}} \frac{\mu(q)}{\phi^2(q)} G_{\chi_q^{0-}\chi}(-n) \tau(\chi_q^{0-}\chi)(\bar{J}(n) + O(\tau)) \ll$$

$$x \sum_{\substack{q \leqslant Q \\ \tilde{q} | q}} \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} \left| G_{\chi_q^{0-}\chi}(-n) \tau(\chi_q^{0-}\chi) \right| \leqslant$$

$$x\sum_{\substack{q=1\\ \tilde{q}\mid q}}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}\left|G_{\chi_q^0\tilde{\chi}}(-n)\tau(\chi_q^0\tilde{\chi})\right|$$

得

$$\hat{D}_{1,5}(n)\ll\mu^2(\tilde{q})\tilde{\chi}^2(n)\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\frac{n}{\phi(n)}x \tag{40}$$

(iv) $\hat{D}_{1,4}(n)$ 的估计.

由式㉔及㉘得到

$$\hat{D}_{1,4}(n)=\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}\mid q}}\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})(\tilde{I}(n)+O(\tau)) \tag{41}$$

令 $q=\tilde{q}k$,利用 $C_q(-n)$ 对 q 的可乘性,有

$$\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})=\frac{C_{\tilde{q}}(-n)}{\phi^2(\tilde{q})}\tau^2(\tilde{\chi})\tilde{\chi}^2(k)\frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)}C_k(-n)=$$

$$\tilde{\chi}(-1)\frac{\tilde{q}C_{\tilde{q}}(-n)}{\phi^2(\tilde{q})}\tilde{\chi}^2(k)\frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)}C_k(-n) \tag{42}$$

对于实特征 χ 有

$$\overline{\tau(\chi)}=\chi(-1)\tau(\chi)$$

由上式我们有

$$\sum_{\substack{q>Q\\ \tilde{q}\mid q}}\left|\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})\right|=\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\mid C_{\tilde{q}}(-n)\mid\sum_{\substack{k>Q/\tilde{q}\\ (k,\tilde{q})=1}}\left|\frac{\mu^2(k)C_k(-n)}{\phi^2(k)}\right|\ll$$

$$\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\mu^2\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\phi(\tilde{q})\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\cdot$$

$$d(n)\frac{\tilde{q}}{Q}(\log\log x)^3\ll(n,\tilde{q})x^{\varepsilon}Q^{-1} \tag{43}$$

其中 ε 为任意小的正常数. 同样由式㊷、引理 2,可得

$$\sum_{\substack{q\leqslant Q\\ \tilde{q}\mid q}}\left|\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi})\right|=\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\mid C_{\tilde{q}}(-n)\mid\sum_{\substack{k\leqslant Q/\tilde{q}\\ (k,\tilde{q})=1}}\left|\frac{\mu^2(k)C_k(-n)}{\phi^2(k)}\right|\ll x^{\varepsilon} \tag{44}$$

这样由式㊶,㊸,㊹式及 $\tilde{I}(n)\leqslant x$ 得

$$\hat{D}_{1,4}(n)=\tilde{G}_2(n)\tilde{I}(n)+O((n,\tilde{q})x^{1+\varepsilon}Q^{-1}) \tag{45}$$

其中

$$\tilde{G}_2(n)=\sum_{\substack{q=1\\ \tilde{q}\mid q}}^{\infty}\frac{C_q(-n)}{\phi^2(q)}\tau^2(\chi_q^0\tilde{\chi}) \tag{46}$$

综合⑳,㉟,㊲ ~ ㊵及㊺各式,最后得到

$$\mid\hat{D}_1(n)\mid\geqslant G_2(n)n-\mid\tilde{G}_2(n)\tilde{I}(n)\mid-128\frac{n}{\phi(n)}(x^{\frac{1}{2}}W+W^2)+$$

$$O(x^{1+\varepsilon}Q^{-1})+O\left(\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\frac{n}{\phi(n)}x\right)+$$
$$O((n,\tilde{q})x^{1+\varepsilon}Q^{-1}) \tag{47}$$

其中 ε 为任意小的正数. 这样,对 $\hat{D}_1(n)$ 的讨论就归结为:估计 W 以及当例外原特征存在时需要进一步处理 $\tilde{G}_2(n)$, $\tilde{I}(n)$ 和因此而出现的余项.

(3) W 的估计.

估计 W(见 ㊱) 是证明定理 4,亦即定理 3 的关键所在.

引理 8 设 $Q=x^{\eta}$, $0<\eta<\frac{1}{10}$, $\tilde{\beta}$ 是例外零点,我们有

$$W\leqslant\frac{2}{3}\pi x^{\frac{1}{2}}\sum_{d\leqslant Q}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}'\left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1}+O(x^{\frac{1}{2}}Q^{-1}\log^2x) \tag{48}$$

这里 $\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 为 $L(s,\chi_d)$ 的零点, $\sum'$ 表示对除 $\tilde{\beta}$ 外的所有非显明零点求和.

证明 注意到式 ⑱,⑫,⑯ 及 ⑰,我们有

$$W(\chi_d)\leqslant\frac{\pi}{\tau}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\sum_{\substack{Q<p\leqslant x\\ t-\frac{\tau}{2}<p\leqslant t}}{}^{\#}\chi_d(p)\log p\Big|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \tag{49}$$

其中

$$\sum_{K<p\leqslant K+h}{}^{\#}\chi_d(p)\log p=\begin{cases}\displaystyle\sum_{K<p\leqslant K+h}\log p-\sum_{K<n\leqslant K+h}1, & \chi_d=\chi_d^0\\ \displaystyle\sum_{K<p\leqslant K+h}\chi_d(p)\log p+\sum_{K<n\leqslant K+h}n^{\tilde{\beta}-1}1, & \tilde{q}\mid d,\chi_d=\chi_d^0\tilde{\chi}\\ \displaystyle\sum_{K<p\leqslant K+h}\chi_d(p)\log x, & \text{其他}\end{cases} \tag{50}$$

这里 $d\leqslant Q\leqslant K$. 显然,我们有

$$W(\chi_d)\leqslant\frac{\pi}{\tau}\left(\int_{Q}^{x+\frac{\tau}{2}}\Big|\sum_{\substack{Q<p\leqslant x\\ t-\frac{\tau}{2}<p\leqslant t}}\chi_d(p)\log p\Big|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{\pi}{\tau}\left(\int_{Q}^{x+\frac{\tau}{2}}\Big|\sum_{\substack{xQ^{-4}<p\leqslant x\\ t-\frac{\tau}{2}<p\leqslant t}}\chi_d(p)\log p\Big|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+O(x^{\frac{1}{2}}Q^{-3})\leqslant$$
$$\max_{xQ^{-4}\leqslant K\leqslant 2x}\max_{h\leqslant\frac{\tau}{2}}\frac{\pi}{\tau}\left(\frac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\Big|\sum_{K<p\leqslant K+h}{}^{\#}\chi_d(p)\log p\Big|+O(x^{\frac{1}{2}}Q^{-3}) \tag{51}$$

由

$$\sum_{\substack{n=p^k\leqslant x\\ k\geqslant 2}}\chi(n)\Lambda(n)\ll x^{\frac{1}{2}}\log^2x$$

容易推得:若取 $T = Q^4$,当 $d \leqslant Q$ 时,对原特征 $\chi_d(n)$ 一致地有

$$\sum_{p \leqslant x} \chi_d(p) \log p = E_0 x - \tilde{E} \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \sum_{|\gamma| \leqslant Q^4}{}' \frac{x^{\rho}}{\rho} + O(xQ^{-4}\log^2 x)$$

由此即得

$$\sum_{K < p \leqslant K+h} \chi_d(p) \log p = E_0 h - \tilde{E}\left(\frac{(K+h)^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \frac{K^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}}\right) - \sum_{|\gamma| \leqslant Q^4}{}' \left(\frac{(K+h)^{\rho}}{\rho} - \frac{K^{\rho}}{\rho}\right) + O(xQ^{-4}\log^2 x)$$

由上式,式 ⑩ 及

$$\frac{(K+h)^{\tilde{\beta}}}{\rho} - \frac{K^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} = \int_K^{K+h} t^{\tilde{\beta}-1} \mathrm{d}t = \sum_{K < n \leqslant K+h} n^{\tilde{\beta}-1} + O(1)$$

知,当 $xQ^{-4} \leqslant K \leqslant 2x, h \leqslant \frac{\tau}{2}$ 时有

$$\left| \sum_{K < p \leqslant K+h}{}^{\#} \chi_d(p) \log p \right| = \left| \sum_{|\gamma| \leqslant Q^4}{}' \int_K^{K+h} t^{\rho-1} \mathrm{d}t \right| + O(xQ^{-4}\log^2 x) \leqslant \frac{\tau}{2} \sum_{|\gamma| \leqslant Q^4}{}' \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1} + O(xQ^{-4}\log^2 x)$$

由此及式 ⑪ 即得 ⑱,引理 8 证毕.

引理 9 在引理 7 的符号下,我们有

$$\sum_{d \leqslant Q} \sum_{\chi_d}{}^{*} \sum_{|\gamma| \leqslant Q^4}{}' \left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1} \leqslant 2c_{35} \mathrm{e}^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} + O(x^{-\frac{1}{2}}) \qquad ⑫$$

其中 c_{35} 为常数, η_1 和 η 分别由式 ⑭ 和 ⑱ 所确定.

证明 设 c_6, c_{20}, c_{21} 是常数.我们取

$$A_1 = \frac{1}{6}\min(c_6, c_{20}, c_{21}) \qquad ⑬$$

(1) 若例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在且 $\tilde{\delta}\log Q \leqslant A_1, \tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$,则知函数 $\prod\limits_{d \leqslant Q} \prod\limits_{\chi_d}{}^{*} L(s,\chi_d)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A_1}{\log Q} \log \frac{eA_1}{\tilde{\delta}\log Q}, \quad |t| \leqslant Q^4$$

中除 $\tilde{\beta}$ 外无其他零点.

(2) 若 $\tilde{\beta}$ 不存在,或存在但 $\tilde{\delta}\log Q > A_1$,则知,函数 $\prod\limits_{d \leqslant Q} \prod\limits_{\chi_d}{}^{*} L(s,\chi_d)$ 在区域

$$\delta \geqslant 1 - \frac{A_1}{\log Q}, \ |t| \leqslant Q^4$$

中无零点.为简单起见,令

$$\eta_1 = A_1 \log \frac{eA_1}{\delta_0 \log Q} \tag{54}$$

这里

$$\delta_0 = \begin{cases} \tilde{\delta}, & \tilde{\delta}\log Q \leqslant A_1 \\ \dfrac{A_1}{\log Q}, & \tilde{\delta}\log Q > A_1 \text{ 或 } \tilde{\beta} \text{ 不存在} \end{cases} \tag{55}$$

则由以上两种情况知,函数 $\prod\limits_{d\leqslant Q}\prod\limits_{\chi_d}{}^{*} L(s,\chi_d)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{\eta_1}{\log Q}, \quad |t| \leqslant Q^4 \tag{56}$$

内仅可能除去 $\tilde{\beta}$ 外无零点.这样,我们就有

$$\sum_{d\leqslant Q}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}'\left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1} = -\int_0^{1-\eta_1/\log Q}\left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\alpha-1} d_\alpha N^*(\alpha,Q) \tag{57}$$

这里

$$N^*(\alpha,Q) = \sum_{d\leqslant Q} N^*(\alpha,Q^4,d)$$

得

$$N^*(\alpha,Q) \leqslant c_{35} Q^{4C_{36}(1-\alpha)}$$

知

$$N^*(0,Q) \ll Q^7$$

故从式 ⑰ 及 $Q = x^\eta$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{d\leqslant Q}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{|\gamma|\leqslant Q^4}{}'\left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\beta-1} &= \int_0^{1-\eta_1/\log Q}\left(\log\frac{x}{Q^4}\right)\left(\frac{x}{Q^4}\right)^{\alpha-1} N^*(\alpha,Q)\mathrm{d}\alpha + O(x^{-1}Q^{11}) \leqslant \\ & c_{35}\log\frac{x}{Q^4}\int_0^{1-\eta_1/\log Q}\left(\frac{x}{Q^{4+4C_{36}}}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}\alpha + O(x^{-1}Q^{11}) = \\ & c_{35}\frac{1-4\eta}{1-(4+4c_{36})\eta}\mathrm{e}^{-(1-(4+4c_{36})\eta)\frac{\eta_1}{\eta}} + \\ & O(x^{-1+(4+4c_{36})\eta}) + O(x^{-1}Q^{11})\end{aligned}$$

只要取正数 η 满足

$$\eta \leqslant \min\left(\frac{1}{22}, \frac{1}{8(1+c_{36})}\right) \tag{58}$$

则由前式即得式 ⑫,证毕.

由引理 8 及引理 9 立刻得到

$$W \leqslant \frac{4\pi}{3}c_{35}x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} + O(x^{\frac{1}{2}-\eta}\log^2 x) \tag{59}$$

(4) $\tilde{G}_2(n)$ 及 $\tilde{I}(n)$ 的进一步计算.

引理 10 当 n 为奇数时

$$\tilde{G}_2(n) = 0$$

当 n 为偶数时

$$\tilde{G}_2(n) = \tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\prod_{\substack{p\mid\tilde{q}\\ p\nmid n}}\frac{1}{p-2}\tilde{G}_2(n) \qquad ⑥⓪$$

证明 由式④⑥,④②得

$$\tilde{G}_2(n) = \tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\tilde{q}\phi^{-1}(\tilde{q})\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\sum_{\substack{k=1\\(k,\tilde{q})=1}}^{\infty}\frac{\mu^2(k)}{\phi^2(k)}C_k(-n) =$$

$$\tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\frac{\tilde{q}}{\phi(\tilde{q})}\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\cdot$$

$$\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right) \qquad ⑥①$$

当 $n,\tilde{q}$ 均为奇数时,显然有 $\tilde{G}_2(n) = 0$. 当 n 为奇数,$\tilde{q}$ 为偶数时,一定有 $4\mid\tilde{q}$,故有 $\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right) = 0$,所以亦得 $\tilde{G}_2(n) = 0$. 当 n 为偶数时,有

$$\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p\nmid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right) = \prod_{p\nmid n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}\cdot$$

$$\prod_{p\mid n}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{-1} =$$

$$\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}\prod_{\substack{p\mid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{-1}G_2(n) =$$

$$\frac{\phi(\tilde{q})}{\tilde{q}}\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}\left(\frac{1}{p-2}\right)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}(p-1)G_2(n) \qquad ⑥②$$

$\tilde{q}$ 的标准分解式一定形如

$$\tilde{q} = 2^l p_1 p_2\cdots p_s,\ l = 0,2,3$$

所以总有

$$\mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\phi^{-1}\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid\tilde{q}}}(p-1) = \mu\left(\frac{\tilde{q}}{(n,\tilde{q})}\right)$$

由上式及式⑥①,⑥②即得⑥⓪,引理 10 证毕.

引理 11 设 $\tilde{I}(n)$ 由式㉙所确定,$\frac{x}{2} < n \leqslant x$,我们有

$$\tilde{I}(n) \leqslant n^{\tilde{\beta}} \qquad ⑥③$$

及

$$n - n^{\tilde{\beta}} \geqslant \begin{cases}\frac{n}{2}, & \tilde{\beta} < 1 - \frac{\log 2}{\log n}\\ \frac{1}{2}(1-\tilde{\beta})n\log n, & \tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{\log 2}{\log n}\end{cases} \qquad ⑥④$$

证明 由于当 $a \geqslant 2, b \geqslant 2$ 时

$$ab \geqslant a + b$$

故有

$$\tilde{I}(n) = \sum_{Q < m \leqslant n-Q} (m(n-m))^{\tilde{\beta}-1} \leqslant n^{\tilde{\beta}}$$

这就证明了式 ⑬.再从

$$n - n^{\tilde{\beta}} \geqslant n - n^{1-\frac{\log 2}{\log n}} = \frac{n}{2}, \tilde{\beta} < 1 - \frac{\log 2}{\log n}$$

及

$$n - n^{\tilde{\beta}} = \int_{\tilde{\beta}}^{1} n^{t} \log n \mathrm{d}t \geqslant (1-\tilde{\beta}) n^{\tilde{\beta}} \log n \geqslant$$

$$\frac{1-\tilde{\beta}}{2} n \log n, \tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{\log 2}{\log n}$$

就得到式 ⑭,引理 11 证毕.

至此,完成了对 $\hat{D}_1(n)$ 的讨论.综合以上的(1),(2),(3),(4) 四部分的讨论及引理 6,我们下面来证明定理 4.

定理 4 的证明 我们将分开例外零点 $\tilde{\beta}$ 不存在和存在这两种情况来证明,比较复杂的是后一种情形.以下总假定 n 为偶数,$\frac{x}{2} < n \leqslant x$,并取 $Q = x^{\eta}$,η 为一待定常数,满足条件 ⑱.

(1) 例外零点 $\tilde{\beta}$ 不存在.这时由式 ㊼,⑥,㊾,⑭ 及 ⑮,作粗略计算后可得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{4} \frac{n}{\phi(n)} x - 600 \frac{n}{\phi(n)} x \left(c_{35} \mathrm{e}^{-\frac{A_1}{2\eta}} + c_{35}^2 \mathrm{e}^{-\frac{A_1}{\eta}}\right) + O(x^{1-\eta+\varepsilon})$$

如使所取 η 再满足条件

$$c_{35} \mathrm{e}^{-\frac{A_1}{2\eta}} \leqslant 10^{-5}$$

即

$$\eta \leqslant \frac{A_1}{2\log(10^5 c_{35})} \qquad ⑮$$

则对充分大的 x 就有

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{8} \frac{n}{\phi(n)} x \geqslant \frac{1}{8} x \qquad ⑯$$

以后,我们不妨假定 $c_{35} \geqslant 1$,所以从条件 ⑮ 知,总有

$$\frac{A_1}{\eta} \geqslant 20 \qquad ⑰$$

(2) 例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在.首先,使 $(n, \tilde{q}) > Q^{\frac{1}{2}}$ 的 n 的个数远小于

$$\sum_{\substack{h \mid \tilde{q} \\ h > Q^{\frac{1}{2}}}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ h \mid n}} 1 \ll \sum_{\substack{h \mid \tilde{q} \\ h > Q^{\frac{1}{2}}}} \frac{x}{h} \ll x Q^{-\frac{1}{2}} d(\tilde{q}) \ll x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon} \qquad ⑱$$

所以,这样的 n 可看做例外值,而下面恒可假定 n 满足条件

$$(n,\tilde{q}) \leqslant Q^{\frac{1}{2}} \tag{69}$$

这样,由式㊼,㊾得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant G_2(n)n - |\tilde{G}_2(n)\tilde{I}(n)| - 600\frac{n}{\phi(n)}x(c_{35}e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} + c_{35}^2e^{-\frac{\eta_1}{\eta}}) +$$

$$O(x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon}) + O\left(\frac{n}{\phi(n)}\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}x\right) \tag{70}$$

我们再分两种情形来讨论.

(i) 存在素数 $p > 3$,使 $p \mid \tilde{q}, p \nmid n$,则由引理 10 知

$$|\tilde{G}_2(n)| \leqslant \frac{1}{3}\tilde{G}_2(n)$$

由此并利用 $G_2(n) \geqslant \frac{1}{2}\frac{n}{\phi(n)}$, $|\tilde{I}(n)| \leqslant n, \eta_1 \geqslant A_1$,从式⑳即得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{6}\frac{n}{\phi(n)}x - 600\frac{n}{\phi(n)}x(c_{35}e^{-\frac{A_1}{2\eta}} + c_{35}^2e^{-\frac{A_1}{\eta}}) +$$

$$O(x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon}) + O\left(\frac{n}{\phi(n)}\frac{x}{\log Q}\right)$$

同样,当 η 再满足式㊺时,对充分大的 x 就有

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{12}\frac{n}{\phi(n)}x \geqslant \frac{1}{12}x \tag{71}$$

(ii) 不存在素数 $p > 3$,使 $p \mid \tilde{q}, p \nmid n$.这时由式㊿知

$$|\tilde{G}_2(n)| = G_2(n)$$

由此及式㊸即得

$$G_2(n)n - |\tilde{G}_2(n)\tilde{I}(n)| \geqslant G_2(n)(n - n^{\tilde{\beta}}) \tag{72}$$

同时,在这种情形下,知必有

$$(n,\tilde{q}) \geqslant \frac{1}{24}\tilde{q}$$

由此及式㊉,得

$$\frac{(\log Q)^2}{(\log\log Q)^8} \ll \tilde{q} \ll Q^{\frac{1}{2}} \tag{73}$$

当 $\tilde{\beta} < 1 - \frac{\log 2}{\log n}$ 时,和情形(i)一样,由式⑳,㊹知,只要 η 再满足条件㊺,则对充分大的 x 有

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{16}\frac{n}{\phi(n)}x \geqslant \frac{1}{16}x \tag{74}$$

当 $\tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{\log 2}{\log n}$ 时,知

$$1 - \tilde{\beta} \geqslant \frac{c_4}{\sqrt{\tilde{q}}(\log\tilde{q})^4} \tag{75}$$

由此及式 ⑬ 知，对充分大的 x，可使式 ⑩ 中的两个误差项有

$$O(x^{1-\frac{\eta}{2}+\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{20}\frac{n}{\phi(n)}(1-\tilde{\beta})n\log n$$

$$O\left(\frac{\tilde{q}}{\phi^2(\tilde{q})}\frac{n}{\phi(n)}x\right) \leqslant \frac{1}{20}\frac{n}{\phi(n)}(1-\tilde{\beta})n\log n$$

由以上两式及式 ⑩,⑫,⑭ 知，对充分大的 x 有

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{20}\frac{n}{\phi(n)}(1-\tilde{\beta})x\log x - 600\frac{n}{\phi(n)}x(c_{35}e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} + c_{35}^2 e^{-\frac{\eta_1}{\eta}}) \qquad ⑯$$

此外，由式 ⑦ 知

$$\tilde{\beta} \geqslant 1 - \frac{\log 2}{\log n} \geqslant 1 - \frac{A_1}{\eta\log x} = 1 - \frac{A_1}{\log Q}$$

因而，由式 ⑭,⑮ 及 ⑦ 知

$$e^{-\frac{\eta_1}{2\eta}} = e^{-\frac{A_1}{2\eta}}\left(\frac{(1-\tilde{\beta})\log Q}{A_1}\right)^{\frac{A_1}{2\eta}} \leqslant e^{-\frac{A_1}{2\eta}}(1-\tilde{\beta})\log x$$

故当 η 再满足条件 ⑮ 时，由上式及 ⑯ 可得

$$|\hat{D}_1(n)| \geqslant \frac{1}{40}(1-\tilde{\beta})\frac{n}{\phi(n)}x\log x$$

从上式及式 ⑮,⑬ 即得

$$|\hat{D}_1(n)| \gg \frac{x\log x}{\sqrt{\tilde{q}}(\log\tilde{q})^4} \gg xQ^{-\frac{1}{4}}(\log x)^{-3} \qquad ⑰$$

把上面所得的结果：式 ⑯,⑪,⑭ 和 ⑰ 及引理 6 合在一起，并注意到式 ⑱，我们就得出下面的结论，当 η 为满足条件 ⑱,⑮ 的正数时，只要取 $\Delta < \frac{1}{3}\eta$，就可使 $\frac{x}{2} < n \leqslant x$ 中的偶数 n 除去远小于 $x^{1-\Delta}$ 个例外值外，恒有

$$|\hat{D}_1(n)| > |\hat{D}_2(n)|$$

定理 4 证毕.

由定理 4 立即推出定理 3.

1.3 小区间上的哥德巴赫数

Ramachandra 把 1.1 的结果推广到了小区间上，本节就是要证明这一推广. 设 $0 < \theta < 1$，我们以 $E(x,\theta)$ 表示区间 $(x, x+x^{\theta}]$ 中的非哥德巴赫数的个数.

定理 5 设 A 为任意正数，ε_1 为任意小的正数，若对 L－函数有零点密度估计①

$$N(\alpha, T, q) \ll (qT)^{c_1(1-\alpha)}(\log qT)^{c_2} \qquad ⑱$$

① 本节中的常数 $c_1, c_2, \cdots$ 都按在本节中出现的先后编号.

成立,则对任意的 θ

$$1 \geqslant \theta > 1 - \frac{1}{c_1} + \varepsilon_1 \tag{79}$$

有

$$E(x,\theta) \ll \frac{x^\theta}{(\log x)^A}$$

显然可以假定 x 充分大.设 $y = x^\theta$,且不妨假定 $y < \frac{x}{2}$.现来应用圆法.设

$$S^{(1)}(\alpha) = \sum_{x-y<p\leqslant x+y} \log p e(p\alpha)$$

$$S^{(2)}(\alpha) = \sum_{2<p\leqslant 2y} \log p e(p\alpha)$$

$$\widetilde{D}(n) = \int_0^1 S^{(1)}(\alpha) S^{(2)}(\alpha) e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

取 $\lambda = 3(A+8)$,$Q = (\log x)^\lambda$,$\tau = yQ^{-1}$.设 E_1, E_2 为基本区间和余区间,则有

$$\widetilde{D}(n) = \widetilde{D}_1(n) + \widetilde{D}_2(n)$$

其中

$$\widetilde{D}_1(n) = \int_{E_1} S^{(1)}(\alpha) S^{(2)}(\alpha) e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$\widetilde{D}_2(n) = \int_{E_2} S^{(1)}(\alpha) S^{(2)}(\alpha) e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{80}$$

如果能够证明

$$|\widetilde{D}_1(n)| > |\widetilde{D}_2(n)|$$

则 n 一定是哥德巴赫数.显然从下面的定理将立即推出定理 5.

定理 6 在定理 5 的符号和条件下,区间 $(x, x + x^\theta]$ 中的偶数 n,除了可能有远小于 $\frac{x^\theta}{(\log x)^A}$ 个例外值外,恒有

$$|\widetilde{D}_1(n)| > |\widetilde{D}_2(n)|$$

我们分若干引理来证明定理 6.首先,对于余区间上的积分 $\widetilde{D}_2(n)$,同样有

引理 12 设 M 为使

$$|\widetilde{D}_2(n)| > x^\theta Q^{-\frac{1}{3}}$$

的整数 n 的个数,则

$$M \ll x^\theta Q^{-\frac{1}{3}} (\log x)^8$$

证明 和引理 1 的证明完全一样,当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S^{(2)}(\alpha) \ll x^\theta Q^{-\frac{1}{2}} (\log x)^3$$

因而就有

$$\sum_n |\tilde{D}_2(n)|^2 = \int_{E_2} |S^{(1)}(\alpha)S^{(2)}(\alpha)|^2 d\alpha \ll x^{3\theta}Q^{-1}(\log x)^8$$

$$Mx^{2\theta}Q^{-\frac{2}{3}} \ll x^{3\theta}Q^{-1} \ll (\log x)^8$$

这就证明了引理 12.

下面讨论基本区间上的积分 $\tilde{D}_1(n)$,这是主要的.

引理 13 对 $q \leqslant x, T \leqslant x^{\frac{3}{4}}, (q,l) = 1$,我们有

$$\psi(x;q,l) = \frac{x}{\phi(q)} - \bar{E}\frac{\tilde{\chi}(l)}{\phi(q)}\frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(l)\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}}{}' \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$$

这里 $\tilde{\chi}, \tilde{\beta}$ 是对应于模 q 的可能存在的例外特征和例外零点.

我们证明:

引理 14 设 A_1 为任意正数,$q \leqslant (\log x)^{A_1}$.若估计式 ⑱ 成立,则对任意小的正数 ε_2,当 $T \ll x^{\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2}$ 时,有

$$\sum_{\chi_q}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}}{}' x^{\beta-1} \ll e^{-c_3(\log x)^{\frac{1}{5}}}$$

其中 c_1 为式 ⑱ 中的常数,$\sum_{\rho}{}'$ 表示对 $L(s,\chi_q)$ 除去可能存在的例外零点 $\tilde{\beta}$ 外的所有非显明零点 $\rho = \beta + i\gamma$ 求和.

证明 由条件 $q \leqslant (\log x)^{A_1}$ 知,对所有的 $L(s,\chi)$,$\chi \bmod q$,除去可能存在的例外零点 $\tilde{\beta}$ 外,在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_4}{(\log x)^{4/5}}, \quad |t| \leqslant x$$

中无零点.所以由式 ⑱ 及条件 $T \ll x^{\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2}$ 可得

$$\sum_{\chi_q}\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma| \leqslant T}}{}' x^{\beta-1} = \int_0^{1-c_4/(\log x)^{4/5}} x^{\alpha-1} d\alpha N(\alpha;T,q) \ll$$

$$x^{-1}qT\log(qT) + \log x\int_0^{1-c_4/(\log x)^{4/5}} x^{\alpha-1}N(\alpha;T,q)d\alpha \ll$$

$$x^{-1+\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2}(\log x)^{c_5} + (\log x)^{c_6}\int_0^{1-c_4/(\log x)^{4/5}} x^{-\varepsilon_2 c_1(1-\alpha)}d\alpha \ll$$

$$x^{-1+\frac{1}{c_1}-\varepsilon_2}(\log x)^{c_5} + (\log x)^{c_6}x^{-\varepsilon_2 c_1 c_4/(\log x)^{4/5}}$$

再注意到总有

$$c_1 \geqslant 2$$

这就证明了引理 14.

引理 15 设 $\alpha \in I(q,h) \subset E_1, \alpha = \frac{h}{q} + z, |z| \leqslant \frac{1}{\tau}, q \leqslant Q$,我们有

$$S^{(1)}(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \frac{\sin 2\pi zy}{\sin \pi z} e(zx) + O(y\mathrm{e}^{-c_7(\log x)^{1/5}}) \qquad ⑧①$$

证明 我们有

$$S^{(1)}(\alpha) = \sum_{l=1}^{q}{}' e\left(\frac{h}{q}l\right) \sum_{\substack{x-y<n\leqslant x+y \\ n\equiv l(q)}} \Lambda(n)e(nz) + O(x^{\frac{1}{2}}\log x) \qquad ⑧②$$

注意到 $x - y > \frac{x}{2}$,利用引理 13 对固定的 $q \leqslant Q$ 可得

$$\sum_{\substack{x-y<n\leqslant x+y \\ n\equiv l(q)}} \Lambda(n)e(nz) = \int_{x-y}^{x+y} e(tz)\mathrm{d}t\psi(t;q,l) =$$

$$\int_{x-y}^{x+y} e(tz)\left(\frac{1}{\phi(q)} - \tilde{E}\frac{\tilde{\chi}(l)}{\phi(q)}t^{\tilde{\beta}-1} - \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi_q}\chi(l)\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}' t^{\rho-1}\right)\mathrm{d}t +$$

$$\int_{x-y}^{x+y} e(tz)\mathrm{d}\gamma(t) \qquad ⑧③$$

其中

$$\gamma(t) \ll \frac{t(\log x)^2}{T}, \quad x - y \leqslant t \leqslant x + y$$

以及取 $T = x^{1-\theta+\frac{\varepsilon_1}{2}}, \frac{\varepsilon_1}{2} < 1 - \theta + \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{1}{c_1} - \frac{\varepsilon_1}{2}$. 由 Siegel 定理$\left(取 \epsilon = \frac{4}{5\lambda}\right)$,可得

$$t^{\tilde{\beta}-1} \ll \mathrm{e}^{-c(\log x)^{1/5}}, x - y \leqslant t \leqslant x + y, q \leqslant Q$$

所以

$$\int_{x-y}^{x+y} \frac{\tilde{\chi}(l)}{\phi(q)} t^{\tilde{\beta}-1}\mathrm{d}t \ll y\mathrm{e}^{-c_8(\log x)^{1/5}} \qquad ⑧④$$

利用引理 14,我们有

$$\int_{x-y}^{x+y} e(tz)\sum_{\chi_q}\chi(l)\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}' t^{\rho-1}\mathrm{d}t \ll \int_{x-y}^{x+y}\sum_{\chi_q}\sum_{|\gamma|\leqslant T}{}' t^{\beta-1}\mathrm{d}t \ll y\mathrm{e}^{-c_3(\log x)^{1/5}} \qquad ⑧⑤$$

我们还有

$$\int_{x-y}^{x+y} e(tz)\mathrm{d}\gamma(t) \ll \frac{x(\log x)^2}{T} + \int_{x-y}^{x+y} |z||\gamma(t)|\mathrm{d}t \ll$$

$$\frac{x(\log x)^2}{T}Q = x^{\theta-\frac{\varepsilon_1}{2}}(\log x)^2 Q \ll$$

$$y\mathrm{e}^{-c_9(\log x)^{1/5}} \qquad ⑧⑥$$

综合 ⑧② ~ ⑧⑤ 即得

$$S^{(1)}(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \frac{\sin 2\pi z\gamma}{\pi z} e(zx) + O(y e^{-c_{10}(\log x)^{1/5}})$$

由此并利用

$$\frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\sin \pi t} + O(|t|), \ |t| < \frac{1}{2}$$

即得式 ㊽,引理 15 证毕.

不难看出,上面的引理对 $x - y \leqslant \frac{x}{2}$,即 $y \geqslant \frac{x}{2}$ 亦成立.事实上,这时证明更简单.在引理 15 的条件下

$$S^{(2)}(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \frac{\sin 2\pi z\gamma}{\sin \pi z} e(zy) + O(y e^{-c_7(\log x)^{1/5}}) \qquad ㊲$$

我们还需要下面的引理:

引理 16 设 K 为正整数,则

$$\left(\frac{\sin 2\pi Kz}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{k=-(2K-1)}^{2K-1} (2K - |k|) e(zk)$$

证明 我们有

$$\left(\frac{\sin 2\pi Kz}{\sin \pi z}\right)^2 = e(-(2K-1)z)\left(\frac{e(2Kz)-1}{e(z)-1}\right)^2 =$$
$$e(-(2K-1)z)\left(\sum_{k=0}^{2K-1} e(kz)\right)^2 =$$
$$e(-(2K-1)z)\left(\sum_{k=0}^{2K-1}(k+1)e(kz) + \sum_{k=2K}^{2(2K-1)}((4K-(k+1))e(zk)\right) =$$
$$\sum_{k=-(2K-1)}^{0}(2K+k)e(kz) + \sum_{k=1}^{2K-1}(2K-k)e(kz)$$

证毕.

引理 17 设 $1 \geqslant \theta > 1 - \frac{1}{c_1} + \varepsilon_1, x \leqslant n \leqslant x + x^\theta$,则有

$$\tilde{D}_1(n) = \tilde{G}_2(n) T(n) + O(d(n) x^\theta Q^{-1} \log x) \qquad ㊳$$

其中 $\tilde{G}_2(n)$ 由 1.1 引理 4 所确定,$T(n)$ 满足

$$x^\theta - 1 \leqslant T(n) \leqslant 2x^\theta \qquad ㊴$$

证明 由式 ㊱,㊲ 可得,当 $\alpha \in E_1$ 时

$$S^{(1)}(\alpha) S^{(2)}(\alpha) = \frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)} \left(\frac{\sin 2\pi z\gamma}{\sin \pi z}\right)^2 e(z(x+y)) + O(y^2 e^{-c_7(\log x)^{1/5}})$$

这里的 α 在引理 15 中给出.由于 $|z| \leqslant \frac{1}{\tau} = y^{-1} Q$,所以若设 $N = [x], U =$

$[y]=[x^\theta]$，就有

$$\widetilde{D}_1(n)=\int_{E_1}S^{(1)}(\alpha)S^{(2)}(\alpha)e(-n\alpha)\mathrm{d}\alpha=\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\cdot$$
$$\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}}\left(\frac{\sin 2\pi zU}{\sin \pi z}\right)^2((N+U-n)z)\mathrm{d}z+$$
$$O(y\mathrm{e}^{-c_{11}(\log x)^{1/5}})$$

由于

$$\int_{\pm\frac{1}{\tau}}^{\pm\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin 2\pi zU}{\sin \pi z}\right)^2\mathrm{d}z\ll\tau$$

由以上两式及引理 2 即得

$$\widetilde{D}_1(n)=\sum_{q\leqslant Q}\frac{\mu^2(q)}{\phi^2(q)}C_q(-n)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin 2\pi zU}{\sin \pi z}\right)^2e((N+U-n)z)\mathrm{d}z+$$
$$O(yQ^{-1}\log\log x)$$

由引理 16 可得

$$T(n)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin 2\pi zU}{\sin 2\pi z}\right)^2e((N+U-n)z)\mathrm{d}z=$$
$$2U-|N+U-n|$$

从以上二式及引理 3 即得式 ⑱，由于 $N\leqslant n\leqslant N+U+1$，所以

$$-1\leqslant N+U-n\leqslant U$$

故 $T(n)$ 满足式 ⑲，证毕.

定理 6 的证明 在 $x\leqslant n\leqslant x+x^\theta$ 中使

$$d(n)\geqslant Q^{\frac{1}{2}}$$

的 n 的个数远小于 $x^\theta Q^{-\frac{1}{2}}\log x$，故由此及式 ⑰ 知，可能除了远小于 $x^\theta Q^{-\frac{1}{2}}\log x$ 个例外值 n 外，恒有

$$\widetilde{D}_1(n)=G_2(n)T(n)+O(x^\theta Q^{-\frac{1}{2}}\log x)$$

这样，由此及引理 11，并利用式 ⑥，⑱ 及 $Q=(\log x)^\lambda$，$\lambda=3(A+8)$ 即知：在 $x\leqslant n\leqslant x+x^\theta$ 中的偶数 n，仅可能除了远小于$\frac{x^\theta}{(\log x)^A}$ 个例外值外，恒有

$$|\widetilde{D}_1(n)|>|\widetilde{D}_2(n)|$$

这就证明了定理 6.

由定理 6 立可推得定理 5.

2 哥德巴赫数(二)[①]

——潘承洞　潘承彪

1951 年,Ю.В.Линник 首先研究了如下的问题:找一个函数 $f(x)$,使对充分大的 x,区间$[x,x+f(x)]$中必有哥德巴赫数存在.这实际上就是估计相邻哥德巴赫数之差.显然,若能证明 $f(x)\equiv 2$,则也就解决了关于偶数的哥德巴赫猜想.Линник 在 *RH* 下证明了可取

$$f(x) = (\log x)^{3+\varepsilon}$$

这里 ε 为任意小的正数,并在 ζ 函数零点密度假设下也得到了一个结果.潘承洞实际上证明了:当 ζ 函数的零点密度估计

$$N(\alpha,T) \ll T^{c_1(1-\alpha)}(\log T)^{c_2}, \frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1, T \geqslant 2 \qquad ①$$

成立时,可取

$$f(x) = x^{1-\frac{2}{c_1}+\varepsilon}$$

ε 为任意小的正数.最近,王元和 Prachar 分别在 ζ 函数零点密度假设下得到了一些结果,王元的结果较强,他证明了:

(1) 如果

$$N(\alpha,T) \ll T^{2(1-\alpha)}\log T, \frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1, T \geqslant 2$$

成立,则可取

$$f(x) = (\log x)^{\frac{148}{13}+\varepsilon}$$

ε 为任意小正数.

(2) 如果更强的估计(比 *RH* 要弱)

$$N(\alpha,T) \ll T^{2(1-\alpha)}(\log T)^{-\frac{72}{37}}, \frac{1}{2} < \alpha < 1, T \geqslant 2$$

成立,则可取

$$f(x) = (\log x)^{3+\varepsilon}$$

ε 为任意小的正数.

Линник 的方法实质上是圆法,以上结果都是用 Линник 方法得到的.研究这一问题的另一方法是利用 Selberg 不等式(见引理 5,6,7,8),这要比 Линник 方法简单,且得到了更好的结果.Kátai 指出:当 *RH* 成立时,可取

---

① 原载潘承洞,潘承彪.哥德巴赫猜想.科学出版社,1984.

$$f(x) = c_3(\log x)^2 \qquad ②$$

Montgomery 和 Vaughan 证明了:若估计式 ① 成立,则可取

$$f(x) = x^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)+\varepsilon}$$

这里 ε 为任意小的正数. Ramachadra 得到了相应于这一结果的小区间中的哥德巴赫数的个数的一个下界估计.

在本文里,我们将利用 Selberg 不等式证明:

定理 1 若

(1)ζ 函数零点密度估计 ① 成立;

(2) 存在正数 $\alpha_0, \frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ 及正数 $c_4 > 0$,使 ζ 函数零点密度估计

$$N(\alpha, T) \ll T^{(2-c_4)(1-\alpha)}(\log T)^{c_5}, \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant 1, T > 2 \qquad ③$$

成立,则对所有的 $x \geqslant 2$,区间$[x, x + f(x)]$中必有哥德巴赫数,这里

$$f(x) = c_6 x^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)}(\log x)^{c_7}$$

以及证明在 RH 下得到的结果 ②,即

定理 2 若 RH 成立,则对所有的 $x \geqslant 2$,区间$[x, x + f(x)]$中必有哥德巴赫数,这里 $f(x)$ 由 ② 给出.

2.1 一些引理

引理 1 $\zeta(s)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_8}{(\log(|t|+10))^{2/3}\log\log(|t|+10)}$$

中没有零点.

引理 2 设 $2 \leqslant T \leqslant x\log x$,则有

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x}\Lambda(n) = x - \sum_{|\gamma| \leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$$

这里 $\rho = \beta + i\gamma$ 为$\zeta(s)$ 的非显明零点.

引理 3 若 ζ 函数零点密度估计 ① 及 ③ 均成立,则对任意正数 A,当 $x \gg h \gg x^{1-\frac{1}{c_1}}\log^{c_9}x$ 时,有

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O\left(\frac{h}{\log^A x}\right)$$

这里

$$c_9 = \frac{c_{10}}{c_1} + A + 2, \quad c_{10} = \frac{c_2 + A + 1}{1 - \alpha_0}$$

证明 由引理 2 知,当 $2 \leqslant T \leqslant x$ 时

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\gamma| \leqslant T}\left(\frac{(x+h)^\rho}{\rho} - \frac{x^\rho}{\rho}\right) + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right) \qquad ④$$

我们有

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}\left(\frac{(x+h)^{\rho}}{\rho}-\frac{x^{\rho}}{\rho}\right)=\sum_{|\gamma|\leqslant T}\int_{x}^{x+h}u^{\rho-1}\mathrm{d}u\ll\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\beta-1} \qquad ⑤$$

利用引理 1,密度估计 ①,③ 及 $N(0,T)\ll T\log T$,可得

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\beta-1}\ll x^{-1/2}T\log T-\int_{1/2}^{1}x^{\alpha-1}\mathrm{d}N(\alpha,T)\ll$$

$$x^{-1/2}T\log T+\log x\int_{1/2}^{\alpha_0}x^{\alpha-1}T^{c_1(1-\alpha)}\log^{c_2}T\mathrm{d}\alpha+$$

$$\log x\int_{\alpha_0}^{1-\sigma(T)}x^{\alpha-1}T^{(2-c_4)(1-\alpha)}\log^{c_5}T\mathrm{d}\alpha\ll$$

$$(\log x)^{c_2+1}\left[\left(\frac{T^{c_1}}{x}\right)^{1/2}+\left(\frac{T^{c_1}}{x}\right)^{1-\alpha_0}\right]+$$

$$(\log x)^{c_5+1}\left[\left(\frac{T^{2-c_4}}{x}\right)^{1-\alpha_0}+\left(\frac{T^{2-c_4}}{x}\right)^{\sigma(T)}\right]$$

这里

$$\sigma(T)=\frac{c_8}{(\log(T+10))^{2/3}\log\log(T+10)}$$

现取 $T^{c_1}=x(\log x)^{-c_{10}}$,由上式即得

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T}x^{\beta-1}\ll(\log x)^{c_2+1-c_{10}(1-\alpha_0)}=(\log x)^{-A} \qquad ⑥$$

此外我们还有

$$\frac{x\log^2 x}{T}=x^{1-\frac{1}{c_1}}(\log x)^{\frac{c_{10}}{c_1}+2} \qquad ⑦$$

综合式 ④ ~ ⑦ 就证明了引理.

当取 $c_1=3,c_2=9$ 时,估计式 ① 成立.

当取 $\alpha_0=\frac{12}{13},c_4=\frac{1}{33},c_5=16$ 时,估计式 ③ 成立.这样我们就可定出 c_9,并取

$$1-\frac{1}{c_1}=\frac{2}{3}$$

即 $h\gg x^{2/3}(\log x)^{c_9}$ 时引理 3 成立.如利用 Montgomery 的结果,则可取 $c_1=\frac{5}{2}$,而利用 Huxley 的结果,则可取 $c_1=\frac{12}{5}$.这样,相应地当 $h\gg x^{3/5}(\log x)^{c_9}$, $h\gg x^{7/12}(\log x)^{c_9}$ 时引理 3 成立.这里对数方次 c_9 是次要的.

利用熟知的方法,易从引理 3 推出:

引理 4 在引理 3 的符号和条件下,我们有

$$\vartheta(x+h)-\vartheta(x)=h+O\left(\frac{h}{(\log x)^{A}}\right) \qquad ⑧$$

及

$$\pi(x+h)-\pi(x)=\int_x^{x+h}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}+O\left(\frac{h}{(\log x)^{A+1}}\right) \quad ⑨$$

引理 5 若 *RH* 成立,则当 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 时,有

$$I(\psi)=\int_x^{2x}[\psi(y+\theta y)-\psi(y)-\theta y]^2\mathrm{d}y\ll$$
$$\theta x^2\min(\log^2 x,\log^2(2+\theta^{-1}))$$

证明 显然有

$$I(\psi)\leqslant\int_1^2\mathrm{d}\lambda\int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x}[\psi(y+\theta y)-\psi(y)-\theta y]^2\mathrm{d}y \quad ⑩$$

由引理 2 可得

$$\int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x}[\psi(y+\theta y)-\psi(y)-\theta y]^2\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{(1+\theta)^\rho-1}{\rho}y^\rho\right|^2\mathrm{d}y+O\left(\frac{x^3\log^4 x}{T^2}\right) \quad ⑪$$

进而有

$$\int_1^2\mathrm{d}\lambda\int_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{(1+\theta)^\rho-1}{\rho}y^\rho\right|^2\mathrm{d}y=$$
$$\int_1^2\left[\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\frac{(1+\theta)^{\rho_1}-1}{\rho_1}\frac{(1+\theta)^{\bar\rho_2}-1}{\bar\rho_2}\frac{y^{1+\rho_1+\bar\rho_2}}{1+\rho_1+\bar\rho_2}\Bigg|_{\frac{\lambda x}{2}}^{2\lambda x}\right]\mathrm{d}\lambda=$$
$$\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\frac{(1+\theta)^{\rho_1}-1}{\rho_1}\frac{(1+\theta)^{\bar\rho_2}-1}{\bar\rho_2}\cdot$$
$$\frac{2^{1+\rho_1+\bar\rho_2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\rho_1+\bar\rho_2}}{1+\rho_1+\bar\rho_2}\frac{2^{1+\rho_1+\bar\rho_2}-1}{2+\rho_1+\bar\rho_2}x^{1+\rho_1+\bar\rho_2}\ll$$
$$\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\min(\theta,|\gamma_1|^{-1})\min(\theta,|\gamma_2|^{-1})\frac{x^{1+\beta_1+\beta_2}}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2} \quad ⑫$$

这里最后一步用到了

$$\frac{(1+\theta)^\rho-1}{\rho}=\int_1^{1+\theta}t^{\rho-1}\mathrm{d}t\ll\min(\theta,|\gamma|^{-1})$$

利用 $|ab|\leqslant|a|^2+|b|^2$,由式 ⑩,⑪,⑫ 即得

$$I(\psi)\ll\frac{x^3\log^4 x}{T^2}+I_1 \quad ⑬$$

这里

$$I_1=\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\min(\theta^2,|\gamma_1|^{-2})\frac{x^{1+2\beta_1}}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2} \quad ⑭$$

利用熟知估计

$$N(0,t+1)-N(0,t)\ll\log(|t|+2) \qquad ⑮$$

可得

$$\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\frac{1}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2}\ll\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k\leqslant|\gamma_1-\gamma_2|<k+1}\frac{1}{(1+k)^2}\ll$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\log(k+2+|\gamma_1|)}{(1+k)^2}\ll\log(2+|\gamma_1|) \qquad ⑯$$

由式 ⑭,⑮ 推得

$$I_1\ll\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\min(\theta^2,|\gamma_1|^{-2})x^{1+2\beta_1}\log(2+|\gamma_1|) \qquad ⑰$$

而当 RH 成立时,对任意的 T 有(利用 ⑮)

$$I_1\ll x^2\sum_{|\gamma_1|\leqslant\theta^{-1}}\theta^2\log(2+\theta^{-1})+x^2\sum_{|\gamma_1|>\theta^{-1}}\frac{\log(2+|\gamma_1|)}{|\gamma_1|^2}\ll$$

$$\theta x^2\log^2(2+\theta^{-1}) \qquad ⑱$$

现取 $T=x\log x$,由式 ⑬,⑱ 得

$$I(\psi)\ll\theta x^2\log^2(2+\theta^{-1})+x\log^2x$$

由于对充分小的 $\theta>0$,$\theta\log^2(2+\theta^{-1})$ 是 θ 的增函数,所以,对充分大的 x,当 $\theta\geqslant\frac{1}{x}$ 时,从上式可得

$$I(\psi)\ll\theta x^2\log^2(2+\theta^{-1}),\theta\geqslant\frac{1}{x} \qquad ⑲$$

这就证明了引理当 $\theta\geqslant\frac{1}{x}$ 时成立.当 $x\leqslant y\leqslant 2x$ 时,我们有

$$\psi(y+\theta y)-\psi(y)=\sum_{\substack{y<p^m\leqslant y+\theta y\\ m\geqslant 1}}\log p\ll\log x\sum_{m\leqslant 2\log x}\frac{1}{m}\sum_{y<p^m\leqslant y+\theta y}1$$

所以

$$I(\psi)\ll\log^2x\int_x^{2x}\Big(\sum_{m\leqslant 2\log x}\frac{1}{m}\sum_{y<p^m\leqslant y+\theta y}1\Big)^2\mathrm{d}y+\theta^2x^3\ll$$

$$\log^2x\sum_{m\leqslant 2\log x}\int_x^{2x}\Big(\sum_{y<p^m\leqslant y+\theta y}1\Big)^2\mathrm{d}y+\theta^2x^3 \qquad ⑳$$

设 q 为素数,则对固定的 m 有

$$\int_x^{2x}\Big(\sum_{y<p^m\leqslant y+\theta y}1\Big)^2\mathrm{d}y\leqslant\sum_{x\leqslant q^m\leqslant 2x+2\theta x}\int_{q^m-2\theta x}^{q^m+2\theta x}\Big(\sum_{y<p^m\leqslant y+\theta y}1\Big)^2\mathrm{d}y\ll$$

$$\frac{x^{\frac{1}{m}}}{\log x^{\frac{1}{m}}}\theta x(1+\theta^2x^2) \qquad ㉑$$

由以上两式即得

$$I(\psi)\ll\theta x(1+\theta^2x^2)\log x\sum_{m\leqslant 2\log x}mx^{\frac{1}{m}}+\theta^2x^3\ll$$

$$\theta x^2(1+\theta^2x^2)\log x+\theta^2x^3 \qquad ㉒$$

故当 $0\leqslant\theta\leqslant x^{-1}\log^{\frac{1}{2}}x$ 时，由式 ㉒ 推得

$$I(\psi)\ll\theta x^2\log^2 x$$

这显然包含了我们所要证明的情形，引理证毕.

引理 6 若 ζ 函数零点密度估计 ① 及 ② 均成立，则对任意正数 A，当 $1\geqslant\theta\geqslant x^{-\frac{2}{c_1}}(\log x)^{c_{11}}$ 时，有

$$I(\psi)=\int_x^{2x}[\psi(y+\theta y)-\psi(y)-\theta y]^2\mathrm{d}y\ll\frac{\theta^2x^3}{(\log x)^A}$$

这里

$$c_{11}=\frac{c_{12}}{c_1}+\frac{A+4}{2},\quad c_{12}=\frac{c_2+A+2}{1-\alpha_0}$$

证明 引理 5 证明中的推导从式 ⑩ ~ ⑰ 并未用到条件 RH 成立，所以这些结果在这里亦成立. 现取 $T^{c_1}=x^2(\log x)^{-c_{12}}$，由式 ⑰ 得

$$I_1\ll\theta^2x^3\log x\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}(x^2)^{\beta_1-1}$$

由此及引理 3 中的式 ⑥ 就容易推得

$$I_1\ll\theta^2x^3(\log x)^{-A}$$

从上式及式 ⑬ 就得到所要的结果，证毕.

引理 7 若 RH 成立，则当 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 时，有

$$I(\vartheta)=\int_x^{2x}[\vartheta(y+\theta y)-\vartheta(y)-\theta y]^2\mathrm{d}y\ll\theta x^2\log^2 x$$

证明 显然，引理 5 的证明的后半部分的结果在这里亦成立(相当于仅有 $m=1$ 这一项). 所以当 $0\leqslant\theta\leqslant x^{-1}(\log x)^{1/2}$ 时，引理成立.

当 $x\leqslant y\leqslant 2x$ 时，我们有

$$\begin{aligned}&(\psi(y+\theta y)-\psi(y))-(\vartheta(y+\theta y)-\vartheta(y))=\\&\sum_{\substack{y<p^m\leqslant y+\theta y\\ m\geqslant 2}}\log p\ll\sum_{2\leqslant m\leqslant 2\log x}\frac{\log x}{m}\sum_{y^{\frac{1}{m}}<p\leqslant\left(1+\frac{\theta}{m}\right)y^{\frac{1}{m}}}1\leqslant\\&\sum_{2\leqslant m\leqslant 2\log x}\frac{\log x}{m}\left(1+\frac{\theta}{m}y^{\frac{1}{m}}\right)\ll\\&(\log x)\log\log x+\theta x^{\frac{1}{2}}\log x\end{aligned} \qquad ㉓$$

由此即得

$$I(\vartheta)\ll I(\psi)+x(\log x)^2(\log\log x)^2+\theta^2x^2\log^2 x \qquad ㉔$$

故当 $1\geqslant\theta\geqslant x^{-1}(\log x)^{\frac{1}{2}}$ 时，由上式及引理 5 知引理 7 亦成立，证毕.

引理 8 在引理 6 的符号和条件下，我们有

$$I(\vartheta) \ll \frac{\theta^2 x^3}{(\log x)^A}$$

证明 引理7证明中的式㉔在这里仍成立，由引理6、式㉔及 θ 所满足的条件就推得本引理成立，证毕.

注 引理6可以不用引理5的证明方法，而更简单地加以直接证明. 引理7也可以得到

$$I(\vartheta) \ll \theta^2 x^2 \min(\log^2 x, \log^2(1+\theta^{-1}))$$

这样的估计，但证明要复杂些，这里也用不着这样的结果.

2.2 定理的证明

定理1的证明 设 x 为充分大的正数，若 $[x, x+h]$ 中没有哥德巴赫数，我们取

$$y = x^{1-\frac{1}{c_1}}(\log x)^{c_9}$$

由引理4知，$\left[x-y, x-\frac{y}{2}\right]$ 中必有远大于 $\frac{y}{\log x}$ 个素数，由假设知，对任一奇素数 $p \in \left[x-y, x-\frac{y}{2}\right]$，区间 $[x-p, x-p+h]$ 中必无奇素数，且当 $p \in \left[x-y, x-\frac{y}{2}\right]$ 时有①

$$\frac{y}{2} \leqslant x-p \leqslant y$$

这样，当 $y \in \left[x-p, x-p+\frac{h}{2}\right]$ 时，区间 $\left[y, y+\frac{h}{2}\right]$ 中亦必无素数. 现取 $\theta = \frac{1}{4}hy^{-1}$，我们就有

$$\int_{\frac{y}{4}}^{2y} [\vartheta(t+\theta t) - \vartheta(t) - \theta t]^2 \mathrm{d}t \geqslant$$

$$\sum_{\frac{1}{2}y \leqslant x-p \leqslant y} \int_{x-p}^{x-p+1} \left(\sum_{t < p \leqslant t+\theta t} \log p - \theta t\right)^2 \mathrm{d}t \gg \theta^2 y^3 (\log y)^{-1}$$

由此及引理8(取 $A=2$) 知，必有

$$\theta \ll y^{-\frac{2}{c_1}}(\log y)^{c_{11}}$$

即

$$h \ll y^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)}(\log y)^{c_{11}}$$

注意到所取的 y，这就证明了定理1.

---

① 只要 x 充分大，一定可使 $x-y \geqslant 3$，$\frac{y}{2} \geqslant 3$.

和对引理3中的常数讨论一样，我们知道，取适当的常数可使估计式①及③成立，因而可定出函数

$$f(x)=c_6x^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)}(\log x)^{c_7}$$

中的常数，而其主要常数——即 x 的方次$\left(1-\dfrac{2}{c_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{c_1}\right)$完全由 c_1 所确定。当 c_1 分别取 $3,\dfrac{5}{2},\dfrac{12}{5}$ 时，这里的方次可相应地取为$\dfrac{2}{9},\dfrac{3}{25},\dfrac{7}{72}$.

定理2的证明 设 x 充分大，若区间 $[x,x+h]$ 中没有哥德巴赫数，则对每一个 $y\leqslant x$，在区间$\left[y,y+\dfrac{h}{2}\right]$及$\left[x-y,x-y+\dfrac{h}{2}\right]$中不能同时存在奇素数. 现考虑这样一组区间

$$\left[y_k,y_k+\frac{h}{2}\right],\quad y_k=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}kh$$
$$-\frac{1}{2}xh^{-1}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}xh^{-1} \tag{25}$$

同时相应地考虑

$$\left[x-y_k,x-y_k+\frac{h}{2}\right],\quad y_k=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}kh$$
$$-\frac{1}{2}xh^{-1}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}xh^{-1} \tag{26}$$

把这两组区间写为

$$\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}kh,\frac{1}{2}x+\frac{h}{2}(k+1)\right],\ -\frac{1}{2}xh^{-1}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}xh^{-1} \tag{27}$$

及

$$\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}kh,\frac{1}{2}x-\frac{h}{2}(k-1)\right],\ -\frac{1}{2}xh^{-1}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}xh^{-1} \tag{28}$$

就不难看出，它们只是同一组区间按相反的次序排列. 由于对应同一个 k 的两个区间不能同时存在奇素数，所以这一组区间中至少有一半区间其中不存在奇素数. 而区间组㉕的区间个数不小于 $[xh^{-1}]$，所以其中至少有$\dfrac{1}{3}xh^{-1}$个区间不包含奇素数. 现取 $\theta=\dfrac{1}{4}x^{-1}h$，由于

$$3\leqslant\frac{1}{4}x\leqslant y_k\leqslant\frac{3}{4}x,\ -\frac{1}{2}xh^{-1}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}xh^{-1}$$

所以有

$$\int_{\frac{x}{4}}^{x}(\vartheta(y+\theta y)-\vartheta(y)-\theta y)^2\mathrm{d}y=\int_{\frac{x}{4}}^{x}\Big(\sum_{y<p\leqslant y+\theta y}\log p-\theta y\Big)^2\mathrm{d}y\geqslant$$
$$\sum_k{}'\int_{y_k}^{y_k+\frac{h}{4}}\Big(\sum_{y<p\leqslant y+\theta y}\log p-\theta y\Big)^2\mathrm{d}y\gg$$

$$xh^{-1}\theta^2x^2h \gg xh^2$$

这里$\sum_k{}'$表示对这样一些k求和，对应这些k，区间$\left[y_k, y_k+\frac{h}{2}\right]$中不包含素数. 由此及引理 7 即得

$$h \ll \log^2 x$$

这就证明了定理 2.

3 关于哥德巴赫数的 Linnik 方法①

——王元

我们将在本文中证明关于哥德巴赫数的一些条件结果. 例如，假定$\zeta(s)$的密度猜想成立，则不等式$|N-p-p'| \leqslant c(\varepsilon)(\ln N)^{\frac{148}{13}+\varepsilon}$恒有解，此处$\varepsilon$为任意给定正数及$p, p'$为素数，似乎 Linnik 的类似结果的证明有误.

3.1 导　　言

凡能表成两个奇素数之和的偶数就称为哥德巴赫数，关于偶数的哥德巴赫猜想可以叙述为每一个大于 4 的偶数都是哥德巴赫数.

命$0 \leqslant \nu \leqslant 1/2$及$T > 0$，命$N(T,\nu)$表示 Riemann Zeta 函数$\zeta(s)$在矩形

$$\frac{1}{2}+\nu \leqslant \sigma \leqslant 1, \ |t| \leqslant T \qquad ①$$

中的零点个数.

现在我们叙述 Riemann 猜想(R) 与密度猜想(D) 于下

(R) $$N(T,\nu) = 0, 0 < \nu \leqslant \frac{1}{2}, T > 0$$

及

(D) $$N(T,\nu) = O(T^{(1-2\nu)})(\ln(T+2))^c, \quad 0 < \nu \leqslant \frac{12}{37}+\varepsilon, T > 0$$

此处ν及$c(c>0)$为常数，ε为任意给予正数及与“O”有关的常数仅依赖于ε.

由于

$$N_0(T) > cN(T,0), \quad T > T_0 \qquad ②$$

此处c及T_0为正常数及$N_0(T)$表示$S(s)$适合

$$\sigma = \frac{1}{2}, \ |t| \leqslant T \qquad ③$$

---

① 原载“Scientia Sinica”, 20, 1, 1977, 16-30.

的零点个数(见 A. Selberg[①]及 N. Levinson[②]),所以在(D)中不需要考虑 $\nu = 0$,又由于 $S(s)$ 在直线 $\sigma = 1$ 附近没有零点(见 И. М. Вцноградов[③]与 Н. М. Коробов[④])及当 $\frac{12}{37} + \varepsilon \leqslant \nu \leqslant \frac{1}{2}$ 时,$N(T,\nu)$ 比较小(见 M. N. Huxley[⑤]),所以我们不需要考虑 $\frac{12}{37} + \varepsilon \leqslant \nu \leqslant 1/2$ 之情况.

我们用 N 表示偶数,p,p' 表示素数,c 为正常数,ε 为任意给定正数及 $c(\varepsilon)$ 为依赖于 ε 的正常数,但它们并不总等于同样数值.

定理 1 假定

$$N(T,\nu) \leqslant c(\varepsilon)T^{1-2\nu}\ln(T+2), \quad 0 < \nu \leqslant \frac{12}{37} + \varepsilon \tag{④}$$

则对于任意 N,恒存在 p,p' 使

$$|N - p - p'| \leqslant c(\varepsilon)(\ln N)^{\frac{148}{13}+\varepsilon} \tag{⑤}$$

定理 2 假定

$$N(T,\nu) \leqslant c(\varepsilon)T^{1-2\nu}(\ln(T+2))^{-\frac{72}{37}}, \quad 0 < \nu \leqslant \frac{12}{37} + \varepsilon \tag{⑥}$$

则对于任意 N,恒存在 p,p' 使

$$|N - p - p'| \leqslant c(\varepsilon)(\ln N)^{3+\varepsilon} \tag{⑦}$$

一般言之,我们可以证明:

定理 3 假定

$$N(T,\nu) \leqslant \begin{cases} cT^{1-2\nu}(\ln(T+2))^{\gamma}, & 0 < \nu \leqslant \alpha \\ cT^{(1-2\nu)/(1+\varepsilon_1)}, & \alpha < \nu \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{⑧}$$

此处 $\alpha,\gamma,\varepsilon_1$ 为适合 $0 < \alpha < 1/2, r \geqslant -6\alpha, \varepsilon_1 > 0$ 的常数,则对于任意 N,皆存在 p,p' 满足

$$|N - p - p'| \leqslant c(\varepsilon)(\ln N)^{(3+r)(1-2\alpha)^{-1}+\varepsilon} \tag{⑨}$$

我们还证明了:

定理 4 命 q 与 N 为两个正整数适合 $q \leqslant N(\ln N)^{3+\varepsilon}$ 且当 q 为偶数时 N 亦为偶数,则在广义 Riemann 猜想成立之下,方程

$$N = p + p' + hq \tag{⑩}$$

在 $N > c(\varepsilon)$ 时恒有解,此处 h 满足 $0 \leqslant h \leqslant (\ln N)^{3+\varepsilon}$.

---

① Selberg, A.: On the zeros of Riemann's zeta function. Skr. Nor. Vid. Akad. Oslo, 1942, 10: 1-59.
② Levinson, N.: More than one-third of zeros of Riemann's zeta function are on $\sigma = 1/2$, Adv. in Math, 1974, 4: 383-436.
③ Вцноградов Н. М. Новая оценка Функчции $\zeta(1+it)$, НАН СССР, сср. Mat, 1958. 22: 161-164.
④ Коробов Н. М. Оценки тригономотрических сумм и их приложенияю УМН СССР, 1958, 185-192.
⑤ Hnxley, M. N. Large values of Diriehlet polynomials, Acta Arith., 1973, 24: 329-346; Ⅱ. Acta Arith, 1975, 27: 159-169; Ⅲ. Acta Arith. (to appear.)

这些定理的证明依赖于Линник方法(见Ю. В. Линник①). 定理2与4是相关注释① 中对应定理的某些改进,在相关注释① 中,Линник宣布了一个结果,他是在假定 ④ 成立之下得到的,其中 $0<\nu\leqslant 1/2$,而 ⑤ 的右端需换成 $O((\ln N)^7)$,作者看不懂他的证明,在他的证明中可能有错.

3.2 一些引理

我们用记号

$$x = N^{-1}+2\pi i\vartheta,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1 \tag{11}$$

$$Q(N)=\sum_{p+p'=N}\ln p\ln p' \tag{12}$$

$$S(\vartheta,N)=\sum_{n=2}^{\infty}\Lambda(n)e^{-xn} \tag{13}$$

$$S_1(\vartheta,N)=\sum_{\rho_k}x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k) \tag{14}$$

此处 $\sum\limits_{\rho_k}$ 表示过 $\zeta(s)$ 在临界区域 $0<\sigma<1$ 中所有的零点 $\rho_k=\sigma_k+it_k$ 的一个和

$$S_2(\vartheta,N)=\sum_{\rho_k,t_k>0}x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k) \tag{15}$$

$$S_3(\vartheta,N)=\sum_{\rho_k,t_k>0}x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k) \tag{16}$$

引理1 当 $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$ 时,我们有

$$\Gamma(s)\leqslant c(|t|+1)^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \tag{17}$$

(见K. Prachar②)

引理2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi iN_1\vartheta}}{x^2}d\vartheta = N_1e^{-N_1/N}$$

证明 考虑积分

$$\int_c\frac{e^{2\pi iN_1z}}{(N^{-1}+2\pi iz)^2}dz$$

此处 C 表示闭围道,它包括一个线段 $[-R,R]$ 及一个半园 $Re^{i\varphi}(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$,命 $R\to\infty$,则得引理:

引理3

$$\sum_{n+n'=N}\Lambda(n)\Lambda(n')=Q(N)+O(\sqrt{N}(\ln N)^2)$$

---

① Линник Ю. В. Некоторые условные теоемы, касаюнеся бинарных задачс простыми числами, ДАН СССР, 1951, 77: 15-18; Некоторые уеловные теоремы касаюшиеся бинарных проблемы Гольдбах, НАН СССР, сер. мат, 1952, 16: 503-520.

② Prachar, K. Primzahlvericilung, 1957, Springer.

引理 4 假定 $N_1 = N + H$,此处 H 为满足 $H = O(\sqrt{N}(\ln N)^2)$ 的整数,则

$$Q(N_1) = \mathrm{e}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\vartheta, N)^2 \mathrm{e}^{2\pi i N_1 \vartheta} \mathrm{d}\vartheta + O(\sqrt{N}(\ln N)^2) \tag{18}$$

引理 5 我们有

$$S(\vartheta, N) = x^{-1} - S_1(\vartheta, N) + O((\ln N)^2) \tag{19}$$

证明 由 Mellin 变换得

$$S(\vartheta, N) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{2-\mathrm{i}\infty}^{2+\mathrm{i}\infty} \Gamma(s) x^{-s} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \mathrm{d}s \tag{20}$$

显然,我们有

$$x^{-s} = \begin{cases} |x|^{-s} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}t - t\arctan\frac{1}{2\pi N\vartheta}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2\pi N\vartheta}\right)}, & \vartheta \geqslant 0 \\ |x|^{-s} \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}t - t\arctan\frac{1}{2\pi N|\vartheta|}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2\pi N|\vartheta|}\right)}, & \vartheta < 0 \end{cases} \tag{21}$$

首先,假定 $\vartheta \geqslant 0$.将 ⑳ 中的积分线移至直线 $\sigma = -\frac{1}{2}$,则得

$$S(\vartheta, N) = x^{-1} - S_1(\vartheta, N) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\infty}^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\infty} \Gamma(s) x^{-s} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \mathrm{d}s \tag{22}$$

由于

$$\frac{\zeta'}{\zeta}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right) = O(\ln(|t| + 2)) \tag{23}$$

(见 Prachar①),所以由 ㉑,㉒ 及引理 1 可知当 $N\vartheta \leqslant 1$ 时有

$$\int_{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\infty}^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\infty} \Gamma(s) x^{-s} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \mathrm{d}s \ll \int_2^{\infty} t^{-1} \mathrm{e}^{-t\arctan\frac{1}{2N\vartheta}} \ln t \mathrm{d}t \ll$$

$$\int_2^{\infty} t^{-1} \mathrm{e}^{-t\arctan\frac{1}{2\pi}} \ln t \mathrm{d}t \ll 1 \tag{24}$$

现在假定 $N\vartheta \geqslant 1$.则

$$\frac{1}{4\pi N\vartheta} \leqslant \arctan\frac{1}{2\pi N\vartheta} \leqslant \frac{1}{2\pi N\vartheta} \tag{25}$$

及

$$\int_{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\infty}^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\infty} \Gamma(s) x^{-s} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \mathrm{d}s \ll \int_2^{4\pi N\vartheta} \mathrm{e}^{-\frac{t}{4\pi N\vartheta}} t^{-1} \ln t \mathrm{d}t +$$

$$\int_{4\pi N\vartheta}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{4\pi N\vartheta}} t^{-1} \ln t \mathrm{d}t \ll (\ln N)^2 \tag{26}$$

将 ㉖ 代入 ㉒,即得引理 5.类似地,我们可以处理 $\vartheta < 0$ 的情况.

引理证完.

---

① Prachar, K. Primzahlverieilung, 1957, Springer.

引理 6 （Линник[①]）假定 η 适合 $\frac{1}{4} \geqslant \eta \geqslant 4N^{-1}$，则

$$\int_{\eta}^{2\eta} |S_2(\vartheta,N)|^2 \mathrm{d}\theta \ll \sum_{\rho_{k_1},t_{k_1}>0}\sum_{\rho_{k_2},t_{k_2}>0} (t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}}\eta^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\cdot \frac{1}{|t_{k_1}-t_{k_2}|+1}\mathrm{e}^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\arctan\frac{1}{4\pi N\eta}} \quad ㉗$$

及

$$\int_{\eta}^{2\eta} |S_3(\vartheta,N)|^2 \mathrm{d}\theta \ll \sum_{\rho_{k_1},t_{k_1}<0}\sum_{\rho_{k_2},t_{k_2}<0} (|t_{k_1}|+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}}\cdot \frac{1}{|t_{k_1}-t_{k_2}|+1}\mathrm{e}^{-(|t_{k_1}|+|t_{k_2}|)(\pi-\arctan\frac{1}{2\pi N\eta})} \quad ㉘$$

我们还需要关于 $\zeta(s)$ 临界零点的一些结果.

引理 7 在任意区间 $(t,t+1)$ 中，$\zeta(s)$ 的临界零点个数不超过 $c\ln(|t|+2)$（Prachar[②]）.

引理 8 （Вцноградов[③] – Коробов[④]）$\zeta(s)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{(\ln|t|+2)^{2/3}} \quad ㉙$$

中没有零点.

引理 9 （Huxley[⑤]）我们有

$$N(T,v) \ll \begin{cases} T^{\frac{12(1-2v)}{37v}+\epsilon}, & \frac{12}{37} \leqslant v \leqslant \frac{8}{21} \\ T^{\frac{3(1-2v)}{2(1+2v)}+\epsilon}, & \frac{8}{21} \leqslant v \leqslant 1 \end{cases} \quad ㉚$$

此处与“$\ll$”有关的常数仅依赖于 ϵ.

由引理 1 与引理 8 得

引理 10 假定 $0 \leqslant \vartheta \leqslant 8N^{-1}$. 则

$$S_1(\vartheta,N) = O(N\mathrm{e}^{-c(\ln N)^{1/3}}) \quad ㉛$$

引理 11 我们有

$$\int_0^1 |S(\vartheta,N)|^2 \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}N\ln N + O(N\ln\ln 3N) \quad ㉜$$

---

① Линник Ю. В. Некоторые условные теоемы, касаюнеся бинарных задачс простыми числами, ДАН СССР, 1951, 77: 15-18; Некоторые уеловные теоремы касаюшиеся бинарных проблемы Гольдбах, НАН СССР, сер. мат, 1952, 16: 503-520.

② Prachar, K. Primzahlverieilung, 1957, Springer.

③ Вцноградов Н. М. Новая оценка Функции $\zeta(1+it)$, НАН СССР, сер. Mat, 1958. 22: 161-164.

④ Коробов Н. М. Оценки тригономотрических сумм и их приложенияю YMH CCCP, 1958, 185-192.

⑤ Hnxley, M. N. Large values of Diriehlet polynomials, Acta Arith., 1973, 24: 329-346; Ⅱ. Acta Arith, 1975, 27: 159-169; Ⅲ. Acta Arith. (to appear.)

3.3 Линник 方法

引理 12 假定 $N^{-\frac{1}{2}} \leqslant \aleph = \aleph(N) \leqslant \frac{1}{4}$. 若

$$\int_0^{\aleph} |S_1(\vartheta, N)|^2 \mathrm{d}\vartheta \ll N(\ln N)^{-\epsilon/10} \qquad ㉝$$

此处及以后与"$\ll$"有关的常数仅依赖于 ϵ，则对于任意给予的 N，皆存在 p, p' 使

$$|N - p - p'| \ll \aleph^{-1}(\ln N)^{\epsilon/2} \qquad ㉞$$

证明 命

$$J(N_1) = \int_{-\aleph}^{\aleph} S(\vartheta, N)^2 \mathrm{e}^{2\pi i N_1 \vartheta} \mathrm{d}\vartheta \qquad ㉟$$

则由引理 5 及 Schwarz 不等式得

$$J(N_1) = \int_{-\aleph}^{\aleph} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i N_1 \vartheta}}{x^2} \mathrm{d}\vartheta + R \qquad ㊱$$

此处

$$|R| \leqslant 2\int_0^{\aleph} |S_1(\vartheta, N)|^2 \mathrm{d}\vartheta + O(R_1) \qquad ㊲$$

其中

$$R_1 = \sqrt{\int_0^{\aleph} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{|x|^2} \int_0^{\aleph} |S_1(\vartheta, N)|^2 \mathrm{d}\vartheta} + \sqrt{\aleph \int_0^{\aleph} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{|x|^2} (\ln N)^2} + \sqrt{\aleph \int_0^{\aleph} |S_1(\vartheta, N)|^2 \mathrm{d}\vartheta (\ln N)^2} + (\ln N)^4 \qquad ㊳$$

由引理 2 得

$$\int_{-\aleph}^{\aleph} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i N_1 \vartheta}}{x^2} \mathrm{d}\vartheta = N_1 \mathrm{e}^{-N_1/N} + O\left(\int_{\aleph}^{0} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta^2}\right) = N_1 \mathrm{e}^{-N_1/N} + O(\aleph^{-1}) \qquad ㊴$$

由于

$$\int_0^{\aleph} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{|x|^2} \ll \int_0^{N^{-1}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{N^{-2}} + \int_{N^{-1}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta^2} \ll N \qquad ㊵$$

所以由 ㉝,㊱,㊲,㊳,㊴ 及 ㊵ 得

$$J(N_1) = N_1 \mathrm{e}^{-N_1/N} + O(N(\ln N)^{-\epsilon/20}) \qquad ㊶$$

记

$$H = \aleph^{-1}(\ln N)^{\epsilon/2} \qquad ㊷$$

及

$$T(\vartheta) = \sum_{0 \leqslant y \leqslant H} \mathrm{e}^{2\pi i y \vartheta} \qquad ㊸$$

则对于 $\vartheta \in [\aleph, 1/2]$ 与 $\vartheta \in \left[-\frac{1}{2}, -\aleph\right]$ 得

$$|T(\vartheta)| \leqslant |\vartheta|^{-1} \leqslant \aleph^{-1} \leqslant H(\ln N)^{-\varepsilon/2} \qquad ㊹$$

命 $r = [4/\varepsilon] + 1$ 及 $x = x_1 + \cdots + x_r$，此处 $0 \leqslant x_j \leqslant H(1 \leqslant j \leqslant r)$，进而言之，命 N_1 表示形如 $N + x$ 之整数. 则由 ㊶，㊹ 与引理 4 及 11 得知当 $N > c(\varepsilon)$ 时有

$$\sum_{N_1} Q(N_1) = \mathrm{e}\sum_{N_1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\vartheta,N)^2 \mathrm{e}^{2\pi i N_1\vartheta}\mathrm{d}\vartheta + O(\sqrt{N}H^r(\ln N)^2) =$$

$$\mathrm{e}\sum_{N_1}\int_{-\aleph}^{\aleph} S(\vartheta,N)^2 \mathrm{e}^{2\pi i N_1\vartheta}\mathrm{d}\vartheta + O\Big(\int_{\aleph}^{\frac{1}{2}} |S(\vartheta,N)|^2 |T(\vartheta)|^r \mathrm{d}\vartheta\Big) +$$

$$O(\sqrt{N}H^r(\ln N)^2) =$$

$$\mathrm{e}\sum_{N_1} N_1 \mathrm{e}^{-N_1/N} + O(NH^r(\ln N)^{-\varepsilon/20}) +$$

$$O\Big(H^r(\ln N)^{-\varepsilon r/2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |S(\vartheta,N)|^2 \mathrm{d}\vartheta\Big) =$$

$$\mathrm{e}N\sum_{N_1} \mathrm{e}^{-1}(1 + O(N^{-1}H)) + O(NH^r(\ln N)^{-\varepsilon/20}) =$$

$$NH^r(1 + O(\ln N)^{-\varepsilon/20}) > 2 \qquad ㊺$$

引理证完.

3.4 积分的估计

记

$$M = [2\ln N] \text{ 及 } M_1 = [\ln N - c(\ln N)^{\frac{1}{3}}] + 1 \qquad ㊻$$

在本节中，与"$\ll$"有关的常数为绝对常数.

引理 13 假定 $\frac{1}{4} \geqslant \eta \geqslant 4N^{-1}$ 及

$$N(T,\nu) \ll T^{\mu(\nu)(1-2\nu)}(\ln(T+2))^r, \quad 0 < \nu \leqslant \frac{1}{2} \qquad ㊼$$

此处 r 为一个常数及 $\mu(\nu)$ 为一个适合 $\frac{1}{2} \leqslant \mu(\nu) \leqslant 3$ 的递减函数. 则

$$\int_{\eta}^{2\eta} |S_1(\vartheta,N)|^2 \mathrm{d}\vartheta \ll N_\eta(\ln N)^3 +$$

$$\sum_{m=2}^{M_1} N^{\frac{2m}{M}+\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\eta^{\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}(\ln N)^{2+r} \qquad ㊽$$

证明 (1) 命 $T = 2N\eta$. 则

$$N \geqslant T \geqslant 8, \frac{1}{2\pi T} \geqslant \arctan\frac{1}{2\pi T} \geqslant \frac{1}{4\pi N\eta} \geqslant \frac{1}{4\pi T} \qquad ㊾$$

故由引理 6 得

$$\int_{\eta}^{2\eta} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll \Sigma_1 + \Sigma_2 \qquad ㊿$$

此处

$$\Sigma_1 = \sum_{\rho_{k_1}, t_{k_1} > 0} \sum_{\substack{\rho_{k_2}, \beta_{k_2} \leqslant \beta_{k_1} \\ t_{k_2} > 0}} (t_{k_1} + 1)^{\beta_{k_1} - \frac{1}{2}} (t_{k_2} + 1)^{\beta_{k_2} - \frac{1}{2}} \eta^{1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}} \cdot \frac{1}{|t_{k_1} - t_{k_2}| + 1} e^{-(t_{k_1} + t_{k_2})/4\pi T} \qquad ⑤①$$

及 Σ_2 表示一个和,它与 Σ_1 的差别为将条件 $\beta_{k_2} \leqslant \beta_{k_1}$ 换为 $\beta_{k_2} > \beta_{k_1}$.

显然

$$\Sigma_1 \leqslant \Sigma_{11} + \Sigma_{12} + \Sigma_{13} \qquad ⑤②$$

此处

$$\Sigma_{11} = \sum_{\substack{\rho_{k_1} \\ 0 < t_{k_1} \leqslant NT}} \sum_{\substack{\rho_{k_2}, \beta_{k_2} \leqslant \beta_{k_1} \\ 0 < t_{k_2} \leqslant NT}} (t_{k_1} + 1)^{\beta_{k_1} - \frac{1}{2}} (t_{k_2} + 1)^{\beta_{k_2} - \frac{1}{2}} \eta^{1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}} \cdot \frac{1}{|t_{k_1} - t_{k_2}| + 1} e^{-(t_{k_1} + t_{k_2})/4\pi T} \qquad ⑤③$$

$$\Sigma_{12} = \sum_{\substack{\rho_{k_1} \\ t_{k_1} \geqslant NT}} \sum_{\substack{\rho_{k_2}, \beta_{k_2} \leqslant \beta_{k_1} \\ 0 < t_{k_2} \leqslant t_{k_1}}} (t_{k_1} + 1)^{\beta_{k_1} - \frac{1}{2}} (t_{k_2} + 1)^{\beta_{k_2} - \frac{1}{2}} \eta^{1 - \beta_{k_1} - \beta_{k_2}} \cdot \frac{1}{|t_{k_1} - t_{k_2}| + 1} e^{-(t_{k_1} + t_{k_2})/4\pi T} \qquad ⑤④$$

及 Σ_{13} 表示一个和,它与 Σ_{12} 的差别在于 t_{k_1} 与 t_{k_2} 的条件需换为 $0 < t_{k_1} \leqslant t_{k_2}$ 及 $t_{k_2} \geqslant NT$.

(2) 显然

$$\Sigma_{12} \ll \sum_{s=N}^{\infty} \sum_{\substack{\rho_{k_1} \\ sT \leqslant t_{k_1} < (s+1)T}} \sum_{l=1}^{(s+1)T} (sT) \eta^{-1} \sum_{\substack{\rho_{k_2} \\ l-1 \leqslant t_{k_1} - t_{k_2} \leqslant l}} \frac{1}{|t_{k_1} - t_{k_2}| + 1} e^{-s/4\pi}$$

所以由引理 7 得

$$\Sigma_{12} \ll \eta^{-1} T \sum_{s=N}^{\infty} \sum_{\substack{\rho_{k_1} \\ sT \leqslant t_{k_1} < (s+1)T}} \sum_{l=1}^{(s+1)T} \frac{\ln sT}{l} s e^{-s/4\pi} \ll \eta^{-1} T^2 \sum_{s=N}^{\infty} s (\ln sT)^3 e^{-s/4\pi} \ll N^2 (\ln N)^3 e^{-N/8\pi} \sum_{s=N}^{\infty} s (\ln s)^3 e^{-s/8\pi} \ll 1 \qquad ⑤⑤$$

因 Σ_{13} 满足与 Σ_{12} 一样的一关系,所以由 ⑤② 得

$$\Sigma_1 \ll \Sigma_{11} + 1 \qquad ⑤⑥$$

(3) 命 I_m 表示区间$\left[\frac{1}{2}+\frac{m-1}{M},\frac{1}{2}+\frac{m}{M}\right]$. 则由引理 8 得

$$\Sigma_{11}=\sum_{m=1}^{M_1}\Sigma_{11}(m) \tag{57}$$

此处

$$\Sigma_{11}(m)=\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\0<t_{k_1}\leqslant NT}}\sum_{\substack{\rho_{k_2},\beta_{k_2}\leqslant\beta_{k_1}\\0<t_{k_2}\leqslant NT}}(t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}}\eta^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\cdot\frac{1}{|t_{k_1}-t_{k_2}|+1}e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})/4\pi T} \tag{58}$$

易知

$$\Sigma_{11}(m)\ll\Sigma_{111}(m)+\Sigma_{112}(m) \tag{59}$$

此处

$$\Sigma_{111}(m)=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\sT<t_{k_1}\leqslant(s+1)T}}\sum_{\substack{\rho_{k_2},\beta_{k_2}\leqslant\beta_{k_1}\\t_{k_2}\leqslant(s+2)T}}(t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}}\eta^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\cdot\frac{1}{|t_{k_1}+t_{k_2}|+1}e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})/4\pi T} \tag{60}$$

$$\Sigma_{112}(m)=\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\sT<t_{k_1}\leqslant(s+1)T}}\sum_{\substack{\rho_{k_2},\beta_{k_2}\leqslant\beta_{k_1}\\(s+2)T<t_{k_2}}}(t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-\frac{1}{2}}\eta^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\cdot\frac{1}{|t_{k_1}-t_{k_2}|+1}e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})/4\pi T} \tag{61}$$

(4) 假定 $m\geqslant 2$. 由于 $1\ll(NT)^{1/M}\ll 1$, 所以

$$\begin{aligned}\Sigma_{111}(m)&\ll\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\sT<t_{k_1}\leqslant(s+1)T}}((s+1)T)^{2\beta_{k_1}-1}\eta^{1-2\beta_{k_1}}\sum_{l=1}^{(s+2)T}\frac{\ln(s+2)T}{l}e^{-s/4\pi}\ll\\&T^{2m/M}\eta^{-2m/M}(\ln N)^2\sum_{s=0}^{N-1}(s+1)^{2m/M}e^{-s/4\pi}N\left((s+1)T,\frac{m-1}{M}\right)\ll\\&T^{\frac{2m}{M}+\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\eta^{-2m/M}(\ln N)^{2+r}\cdot\\&\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\frac{2m}{M}+\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}e^{-s/4\pi}\ll\\&N^{\frac{2m}{M}+\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\eta^{\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}(\ln N)^{2+r}\end{aligned} \tag{62}$$

对于 $m=1$, 由引理 7 可知

$$\Sigma_{111}(1)=\sum_{s=0}^{N-1}(\ln(s+1)T)^2e^{-s/4\pi}N((s+1)T,0)\ll$$

$$T(\ln N)^3\sum_{s=0}^{N-1}(s+1)e^{-s/4\pi}\ll N\eta(\ln N)^3 \qquad ⑬$$

(5) 由引理 7 可知

$$\Sigma_{112}(m)\ll T^{-1}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\ sT<t_{k_1}\leqslant(s+1)T}}((s+1)T)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}\eta^{1-2\beta_{k_1}}e^{-s/4\pi}\cdot$$

$$\sum_{x=[(s+2)T]}^{\infty}\sum_{\substack{\rho_{k_2}\\ x<t_{k_2}\leqslant x+1}}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}e^{-t_{k_2}/4\pi T}\ll$$

$$T^{-1}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\ sT<t_{k_1}\leqslant(s+1)T}}((s+1)T)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}\eta^{1-2\beta_{k_1}}e^{-s/4\pi}\cdot$$

$$\sum_{x=[(s+2)T]}^{\infty}(x+2)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}e^{-x/4\pi T}\ln(x+2)\ll$$

$$T^{-1}\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\ sT<t_{k_1}\leqslant(s+1)T}}((s+1)T)^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}\eta^{1-2\beta_{k_1}}e^{-s/4\pi}\cdot$$

$$\int_{[(s+2)T]}^{\infty}x^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}e^{-x/4\pi T}\ln(x+2)dx\ll$$

$$\sum_{s=0}^{N-1}\sum_{\substack{\rho_{k_1},\beta_{k_1}\in I_m\\ sT<t_{k_1}\leqslant(s+1)T}}((s+1)T)^{2\beta_{k_1}-1}\eta^{1-2\beta_{k_1}}e^{-s/4\pi}\ln N\cdot$$

$$\int_{s+1}^{\infty}y^{\beta_{k_1}-\frac{1}{2}}e^{-y/4\pi}\ln(y+2)dy\ll$$

$$\begin{cases}N^{\frac{2m}{M}+\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\eta^{\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}(\ln N)^{1+r}, & m\geqslant 2\\ N\eta(\ln N)^2, & m=1\end{cases} \qquad ⑭$$

由 ⑯,⑰,⑲,⑫,⑬ 及 ⑭ 得

$$\Sigma_1\ll N\eta(\ln N)^3+\sum_{m=2}^{M_1}N^{\frac{2m}{M}+\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\eta^{\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}(\ln N)^{2+r} \qquad ⑮$$

显然,Σ_2 满足与 Σ_1 同样的关系式,所以由 ⑩ 得

$$\int_{\eta}^{2\eta}|S_2(\vartheta,N)|^2d\vartheta\ll N\eta(\ln N)^3+$$

$$\sum_{m=2}^{M_1}N^{\frac{2m}{M}+\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\eta^{\mu\left(\frac{m-1}{M}\right)\left(1-\frac{2m}{M}\right)}(\ln N)^{2+r} \qquad ⑯$$

如果将 $S_2(\vartheta,N)$ 换成 $S_3(\vartheta,N)$,我们可以类似地证明 ⑯ 亦成立.由于

$$\int_{\eta}^{2\eta} |S_1(\vartheta,N)|^2 d\vartheta \ll 2\int_{\eta}^{2\eta} |S_2(\vartheta,N)|^2 d\vartheta + 2\int_{\eta}^{2\eta} |S_2(\vartheta,N)|^2 d\vartheta \qquad ⑥⑦$$

故得引理.

3.5 定理 1 的证明

命

$$\aleph = \aleph(N) = (\ln N)^{-\frac{148}{13}-\frac{\varepsilon}{2}} \qquad ⑥⑧$$

命

$$\varepsilon_1 = 10^{-3}\varepsilon \text{ 及 } M_2 = \left[2\left(\frac{12}{37}+\varepsilon_1\right)\ln N\right]+1 \qquad ⑥⑨$$

则由引理 9 及定理的假设可知存在一个正常数 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon)$ 使

$$N(T,v) \ll \begin{cases} T^{1-2v}\ln(T+2), & v \in I_m(1 \leqslant m \leqslant M_2) \\ T^{\frac{1}{1+\varepsilon_2}(1-2v)}, & v \in I_m(M_2 < m \leqslant M_1) \end{cases} \qquad ⑦⓪$$

此后与"$\ll$"有关的常数仅依赖于 ε.

命 L 为满足

$$\frac{\aleph}{2^{L+1}} < \frac{4}{N} \leqslant \frac{\aleph}{2^L}$$

的整数,则当 $1 \leqslant l \leqslant L$ 时有

$$\sum_{m=1}^{M_2} N^{\frac{2m}{M}+\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\left(\frac{\aleph}{2^l}\right)^{1-\frac{2m}{M}}(\ln N)^3 \ll \frac{N\aleph}{2^l}(\ln N)^3\sum_{m=1}^{M_2}\left(\frac{\aleph}{2^l}\right)^{-\frac{2m}{M}} \ll$$

$$\frac{N\aleph}{2^l}\left(\frac{\aleph}{2^l}\right)^{-\frac{2M_2}{M}}(\ln N)^4 \ll$$

$$N(\ln N)^{-\frac{\varepsilon}{10}}2^{-\frac{13}{38}l} \qquad ⑦②$$

及

$$\sum_{m=M_2+1}^{M_1} N^{\frac{2m}{M}+\frac{1}{1+\varepsilon_2}\left(1-\frac{2m}{M}\right)}\left(\frac{\aleph}{2^l}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon_2}\left(1-\frac{2m}{M}\right)}(\ln N)^2 \ll N^{\frac{2M_1}{M}+\frac{1}{1+\varepsilon_2}\left(1-\frac{2M_1}{M}\right)}(\ln N)^3 \ll$$

$$N^{\frac{1}{1+\varepsilon_2}+\frac{\varepsilon_2}{1+\varepsilon_2}\cdot\frac{2M_1}{M}}(\ln N)^3 \ll$$

$$Ne^{-\frac{\varepsilon_2}{2}c(\ln N)^{1/3}} \ll N(\ln N)^{-2}$$

$$⑦③$$

因此由引理 13 得

$$\int_{\aleph/2^l}^{\aleph/2^{l-1}} |S_1(\vartheta,N)|^2 d\vartheta \ll N\aleph(\ln N)^3 2^{-l} + N(\ln N)^{-\frac{\varepsilon}{10}}2^{-\frac{13}{38}l} + N(\ln N)^{-2} \ll$$

$$N(\ln N)^{-\frac{\varepsilon}{10}}2^{-\frac{13}{38}l} + N(\ln N)^{-2} \qquad ⑦④$$

显然由引理 10 得

$$\int_0^{\aleph/2^L} |S_1(\vartheta,N)|^2 d\vartheta \leqslant \int_\vartheta^{8/N} |S_1(\vartheta,N)|^2 d\vartheta \leqslant N e^{-c(\ln N)^{1/3}} \tag{75}$$

所以由 ⑭ 与 ⑮ 可知

$$\int_0^{\aleph} |S_1(\vartheta,N)|^2 d\vartheta = \sum_{l=1}^{L} \int_{\aleph/2^l}^{\aleph/2^{l-1}} |S_1(\vartheta,N)|^2 d\vartheta + \int_0^{\aleph/2^L} |S_1(\vartheta,N)|^2 d\vartheta \ll N(\ln N)^{-\frac{\varepsilon}{10}} \tag{76}$$

因此由引理 12 即得定理 1.

由于定理 2 与 3 的证明与定理 1 的证明是平行的,所以我们略去其证明.

附记 在 Линник 证明类似于定理 1 的一个结果时,他用了如下推导:"因此,若不等式

$$N^{1+2v-\varphi(v)}\left(\frac{\aleph N}{2^r}\right)^{1-\varphi(v)} \ll \frac{N}{(\ln N)^7}$$

或

$$\frac{\aleph N}{2^r} \ll \frac{1}{(\ln N)^{\frac{7}{1-\varphi(v)}}} \cdot \frac{1}{N^{\frac{2v-\varphi(v)}{1-\varphi(v)}}}$$

对于 $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{(\ln N)^{10/11}}$(注释①) 成立,则论断成立",若我们取 $r = 1$, $\varphi(v) = 2v$ 及 $\aleph_N = (\ln N)^{-7}$,则当 $v = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\ln N)^{10/11}}$ 时,上面不等式不成立. 因此在我看来,他的结论 $O((\ln N)^7)$ 似乎应换成 $O(e^{c(\ln N)^{10/11}\ln\ln 3N})$.

3.6 定理 4 的证明

(1) 记

$$E(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi = \chi_0 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases} \tag{77}$$

$$\tau_\chi = \sum_{(l,q)=1} \chi(l) e^{2\pi i l/q} \tag{78}$$

$$S(\vartheta,N,\chi) = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)e^{-xn} \tag{79}$$

$$S_1(\vartheta,N,\chi) = \sum_{\rho_\chi} x^{-\rho_\chi}\Gamma(\rho_\chi) \tag{80}$$

---

① Линник Ю. В. Некоторые условные теоемы, касаюнеся бинарных задачс простыми числами, ДАН СССР, 1951,77:15-18; Некоторые уеловные теоремы касающнеся бинрных проблемы Гольдбах, НАН СССР, сер. мат, 1952,16:503-520.

此处$\sum_{\rho_\chi}$表示过$L(s,\chi)$的所有临界零点求和.则类似于引理5得

$$S(\vartheta,N,\chi)=\frac{E(\chi)}{x}-S_1(\vartheta,N,\chi)-S_2(\vartheta,N,\chi) \tag{81}$$

此处

$$S_2(\vartheta,N,\chi)=O((\ln N)^2) \tag{82}$$

由于当$(a,q)=1$时

$$S\left(\frac{a}{q}+\vartheta,N\right)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\bar{\tau}_\chi\chi(a)S(\vartheta,N,\chi)+O((\ln N)^2) \tag{83}$$

此处$\sum_{\chi_q}$表示过 mod q 的所有特征求和,及对于 mod q 的所有特征χ有$\tau_{\chi_0}=\mu(q)$与$|\tau_\chi|\leqslant\sqrt{q}$(Prachar①),所以

$$\begin{aligned}S\left(\frac{a}{q}+\vartheta,N\right)^2&=\left(\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\bar{\tau}_\chi\chi(a)(S_1(\vartheta,N,\chi)+S_2(\vartheta,N,\chi))\right)^2+O((\ln N)^2)=\\&\frac{\mu(q)^2}{\varphi(q)^2x^2}+\frac{1}{\varphi(q)^2}\left(\sum_{\chi_q}\bar{\tau}_\chi\chi(a)(S_1(\vartheta,N,\chi)+S_2(\vartheta,N,\chi))\right)^2-\\&\frac{2\mu(q)}{\varphi(q)^2x}\sum_{\chi_q}\bar{\tau}_\chi\chi(a)(S_1(\vartheta,N,\chi)+S_2(\vartheta,N,\chi))+O(N(\ln N)^2)\end{aligned} \tag{84}$$

在广义 Riemann 猜想成立之下,当$\frac{1}{2}\geqslant\eta\geqslant 2N^{-1}$时有类似于引理13的估计

$$\int_{-\eta}^{\eta}|S_1(\vartheta,N,\chi)|^2\mathrm{d}\vartheta\ll N\eta(\ln N)^3 \tag{85}$$

(2)假定N_1为适合$N/2\leqslant N_1\leqslant N$的整数.命

$$J_0(N_1,\eta)=\sum_{a=0}^{q-1}\int_{\frac{a}{q}-\eta}^{\frac{a}{q}+\eta}S(\vartheta,N)^2\mathrm{e}^{2\pi iN_1\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \tag{86}$$

此处$\frac{1}{2q}\geqslant\eta\geqslant\frac{2}{N}$,则由⑭与⑮得

$$\begin{aligned}J_0(N_1,\eta)&=\sum_{q_1|q}\sum_{(a,q_1)=1}\mathrm{e}^{2\pi iaN_1/q}\int_{-\eta}^{\eta}S\left(\frac{a}{q_1}+\vartheta,N\right)^2\mathrm{e}^{2\pi iN_1\vartheta}\mathrm{d}\vartheta=\\&\sum_{q_1|q}\frac{\mu(q_1)^2}{\varphi(q_1)^2}\sum_{(a,q_1)=1}\mathrm{e}^{2\pi iaN_1/q}\mathrm{d}\vartheta\int_{-\eta}^{\eta}\frac{\mathrm{e}^{2\pi iN_1\vartheta}}{x^2}\mathrm{d}\vartheta+\\&O(R_1)+O(R_2)+O(N\eta(\ln N)^3)\end{aligned} \tag{87}$$

此处

① Prachar, K. Primzahlverteilung, 1957, Springer.

$$R_1 = \sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)^2} \sum_{(a,q_1)=1} \int_{-\eta}^{\eta} \Big| \sum_{\chi_{q_1}} \bar{\tau}_\chi \chi(a)(S_1(\vartheta,N,\chi) + S_2(\vartheta,N,\chi)) \Big|^2 \mathrm{d}\vartheta \tag{88}$$

及

$$R_2 = \sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)^2} \sum_{(a,q_1)=1} \int_{-\eta}^{\eta} \Big| x^{-1} \sum_{\chi_{q_1}} \bar{\tau}_\chi \chi(a)(S_1(\vartheta,N,\chi) + S_2(\vartheta,N,\chi)) \Big| \mathrm{d}\vartheta \tag{89}$$

由 ⑫ 与 ⑮ 得

$$\begin{aligned} R_1 = & \sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)^2} \int_{-\eta}^{\eta} \sum_{\chi_{q_1}} \sum_{\chi'_{q_1}} \bar{\tau}_\chi \tau_{\chi'} \sum_{(a,q_1)=1} \chi \overline{\chi'}(a)(S_1(\vartheta,N,\chi) + \\ & S_2(\vartheta,N,\chi)) \overline{(S_1(\vartheta,N,\chi') + S_2(\vartheta,N,\chi'))} \mathrm{d}\vartheta \ll \\ & \sum_{q_1|q} \frac{q_1}{\varphi(q_1)} \sum_{\chi_{q_1}} \int_{-\eta}^{\eta} (| S_1(\vartheta,N,\chi) |^2 + O((\ln N)^4)) \mathrm{d}\vartheta \ll \\ & \sum_{q_1|q} q_1 N \eta (\ln N)^3 \end{aligned} \tag{90}$$

及

$$\begin{aligned} R_2 \leqslant & \sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)^2} \int_{-\eta}^{\eta} \Big(\sum_{(a,q_1)=1} | x |^{-2} \Big)^{1/2} \cdot \\ & \Big(\sum_{(b,q_1)=1} \Big| \sum_{\chi_{q_1}} \bar{\tau}_\chi \chi(b)(S_1(\vartheta,N,\chi) + S_2(\vartheta,N,\chi)) \Big|^2 \Big)^{1/2} \mathrm{d}\vartheta \leqslant \\ & \sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)^2} \Big(\int_{-\eta}^{\eta} \sum_{(a,q_1)=1} | x |^{-2} \mathrm{d}\vartheta \Big)^{1/2} \cdot \\ & \Big(\int_{-\eta}^{\eta} \sum_{(b,q_1)=1} \Big| \sum_{\chi_{q_1}} \bar{\tau}_\chi \chi(b)(S_1(\vartheta,N,\chi) + S_2(\vartheta,N,\chi)) \Big|^2 \mathrm{d}\vartheta \Big)^{1/2} \leqslant \\ & \sum_{q_1|q} \frac{1}{\varphi(q_1)^2} (\varphi(q_1)N)^{1/2} (q_1 \varphi(q_1)^2 N \eta (\ln N)^3)^{1/2} \leqslant \\ & \sum_{q_1|q} \frac{q_1^{1/2}}{\varphi(q_1)^{1/2}} N \eta^{1/2} (\ln N)^{3/2} \end{aligned} \tag{91}$$

所以由 ⑰,⑳ 与 ㉑ 得

$$\begin{aligned} J_0(N_1,\eta) = & \sum_{q_1|q} \frac{\mu(q_1)^2}{\varphi(q_1)^2} \sum_{(a,q_1)=1} \mathrm{e}^{2\pi i a N_1/q} (N_1 e^{-N_1/N} + O(\eta^{-1})) + \\ & O\Big(\sum_{q_1|q} q_1 N \eta (\ln N)^3 \Big) + O\Big(\sum_{q_1|q} \frac{q_1^{1/2}}{\varphi(q_1)^{1/2}} N \eta^{1/2} (\ln N)^{3/2} \Big) = \end{aligned}$$

$$N_1 \mathrm{e}^{-N_1/N} \prod_{p \mid q} (1 + \Psi_{N_1}(p)) + O\left(\sum_{q_1 \mid q} \frac{1}{\eta \varphi(q_1)} \right) +$$

$$O \sum_{q_1 \mid q} q_1 N \eta \ln N)^3) +$$

$$O\left(\sum_{q_1 \mid q} \frac{q_1^{1/2}}{\varphi(q_1)^{1/2}} N \eta^{1/2} (\ln N)^{3/2} \right) \qquad (92)$$

此处

$$\Psi_{N_1}(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p \mid N_1 \\ -\dfrac{1}{(p-1)^2}, & p \nmid N_1 \end{cases} \qquad (93)$$

(3) 命

$$\mathfrak{T} = (\ln N)^{-3-\frac{\varepsilon}{2}}, H = (\ln N)^{3+\varepsilon}, \quad r = \left[\frac{4}{\varepsilon} \right] + 1 \qquad (94)$$

命

$$T(\vartheta) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant \frac{H}{2r}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} q h \vartheta} \qquad (95)$$

命 M 表示区间$\left[\frac{a}{q} - \frac{\mathfrak{T}}{q}, \frac{a}{q} + \frac{\mathfrak{T}}{q} \right]$ $(0 \leqslant a \leqslant q-1)$ 之和集及 m 表示 M 关于 $\left[-\frac{\mathfrak{T}}{q}, 1 - \frac{\mathfrak{T}}{q} \right]$ 的余集，又命 N_1 表示下面形状的整数

$$N_1 = N - q(h_1 + \cdots + h_r) \qquad (96)$$

此处 $0 \leqslant h \leqslant \frac{H}{2r}$. 则$\frac{N}{2} \leqslant N_1 \leqslant N$ 及

$$J = \sum_{N_1} \int_{-\frac{\mathfrak{T}}{q}}^{1-\frac{\mathfrak{T}}{q}} S(\vartheta, N)^2 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} N_1 \vartheta} \mathrm{d}\vartheta = \sum_{N_1} J_0\left(N_1, \frac{\mathfrak{T}}{q} \right) + \sum_{N_1} J_1\left(N_1, \frac{\mathfrak{T}}{q} \right) \qquad (97)$$

其中

$$J_1\left(N_1, \frac{\mathfrak{T}}{q} \right) = \int_m S(\vartheta, N)^2 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} N_1 \vartheta} \mathrm{d}\vartheta \qquad (98)$$

由于当 $\vartheta \in m$ 时

$$T(\vartheta) \ll \mathfrak{T}^{-1} \qquad (99)$$

所以由 (94) 与引理 11 可知

$$\sum_{N_1} J_1\left(N, \frac{\mathfrak{T}}{q} \right) = \int_m S(\vartheta, N)^2 T(\vartheta)^r \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} N \vartheta} \mathrm{d}\vartheta \ll \mathfrak{T}^{-r} \int_0^1 | S(\vartheta, N) |^2 \mathrm{d}\vartheta \ll$$

$$H^r (\ln N)^{-\varepsilon r/2} N \ln N \ll \frac{NH^r}{\ln N} \qquad (100)$$

因此由 (92)(注意当 $p \mid q$ 时 $\overline{\Psi}_{N_1}(p) = \overline{\Psi}_N(p)$)，(97) 与 (100) 得

$$J = \prod_{p|q}(1+\Psi_N(p))\sum_{N_1} N_1 e^{-N_1/N} + O\left(\frac{H^r q}{\aleph}\sum_{q_1|q}\frac{1}{\varphi(q_1)}\right) +$$
$$O\left(NH\aleph(\ln N)^3\sum_{q_1|q}\frac{1}{q_1}\right) +$$
$$O\left(\frac{NH\aleph^{1/2}(\ln N)^{3/2}}{q^{1/2}}\sum_{q_1|q}\frac{q_1^{1/2}}{\varphi(q_1)^{1/2}}\right) + O\left(\frac{NH^r}{\ln N}\right) =$$
$$\prod_{p|q}(1+\Psi_N(p))\sum_{N_1} N_1 e^{-N_1/N} + O(NH^r(\ln N)^{-\varepsilon/4}) \tag{101}$$

因为 q 为偶数时，N 亦为偶数，所以

$$\prod_{p|q}(1+\Psi_N(p)) > c > 0 \tag{102}$$

此处 c 为一个绝对常数．因此当 $N > c(\varepsilon)$ 时

$$J > c\sum_{N_1} N_1 e^{-N_1/N} + O(NH^r(\ln N)^{-\varepsilon/4}) > \frac{c}{3e^2(2r)^r}NH^r \tag{103}$$

定理证完．

4　哥德巴赫数[①][②]

——潘承洞

4.1　引言

设 n 为大于 4 的偶数，若 n 能表成两个奇素数之和，则称它为哥德巴赫数．1952 年 Ю.В.Линник 首先研究了下面的问题：设 $x \geqslant 2$，要找一函数 $h(x)$，使在区间 $[x, x+h]$ 内至少有一个哥德巴赫数．

设 $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1, T \geqslant 2, N(\alpha, T)$ 表示 $\zeta(s)$ 在区域

$$\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

内的零点个数．

1959 年，作者实质上证明了下面的结果[③]．

若

$$N(\alpha, T) \ll T^{c_1(1-\alpha)}\log^{c_1} T \tag{1}$$

成立，则有

$$h(x) \ll x^{1-\frac{1}{c_1}+\varepsilon} \tag{2}$$

---

① 本文 1979 年 5 月 12 日收到．
② 原载科学通报，数、理、化专辑，1980，71-73．
③ 潘承洞，数学学报，9(1959)，3:315．

这里 c_1, c_2 为正常数，ϵ 为任意小的正数.

1975 年，H.L.Montgomery 及 R.C.Vaughan①将上面的结果改成

$$h(x) \ll x^{(1-\frac{1}{c_1})(1-\frac{2}{c_1})+\epsilon} \qquad ③$$

本文要证明下面的定理.

定理 若 $N(\alpha, T)$ 满足 ① 及

$$N(\alpha, T) \ll T^{(2-c_3)(1-\alpha)}\log^4 T, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha < 1, T > 2 \qquad ④$$

这里 $c_3 > 0, c_4 > 0, \frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$，则我们有

$$h(x) \ll x^{(1-\frac{1}{c_1})(1-\frac{2}{c_1})}\log^{c_5} x \qquad ⑤$$

4.2 几个引理

引理 1 $N(\alpha, T) = 0, \alpha > 1 - \dfrac{c_6}{\log^{2/3}(T+10)\log\log(T+10)}$.

引理 2 设 $2 \leqslant T \leqslant x\log x$，则

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x}\Lambda(n) = x - \sum_{|\gamma| \leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$$

这里 $\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ 表示 $\zeta(s)$ 的非明显零点.

引理 3 若式 ① 及式 ④ 成立，则对任给正数 A，我们有

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h + O\left(\frac{h}{\log^A x}\right)$$

这里

$$x \gg h \gg x^{1-\frac{1}{c_1}}\log^{c_7} x$$

$$c_7 = \frac{c_8}{c_1} + A + 2, c_8 = \frac{c_2 + A + 1}{1 - \alpha_0}$$

证明 由引理 2 得到

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h - \sum_{|\gamma| \leqslant T}\left(\frac{(x+h)^\rho}{\rho} - \frac{x^\rho}{\rho}\right) + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right)$$

$$\sum_{|\gamma| \leqslant T}\left(\frac{(x+h)^\rho}{\rho} - \frac{x^\rho}{\rho}\right) = \sum_{|\gamma| \leqslant T}\int_x^{x+h} u^{\rho-1}\mathrm{d}u \ll h\sum_{|\gamma| \leqslant T}x^{\beta-1} \qquad ⑥$$

利用引理 1，式 ①、④ 及 $N(0, T) \ll T\log T$，我们得到

$$\sum_{|\gamma| \leqslant T}x^{\beta-1} \ll x^{-\frac{1}{2}}T\log T - \int_{1/2}^{1}x^{\alpha-1}\mathrm{d}N(\alpha, T) \ll x^{-\frac{1}{2}}T\log T +$$

$$\log x\int_{1/2}^{\alpha_0}x^{\alpha-1}T^{c_1(1-\alpha)}\log^{c_2}T\mathrm{d}\alpha +$$

① Montgomery, H. L., Vaughan, R.C., Acta Arith., 1975, 27.

$$\log x\int_{\alpha_0}^{1-\sigma(T)} x^{\alpha-1} T^{(2-c_3)(1-\alpha)}\log^{c_4} T\mathrm{d}\alpha \ll$$
$$\log^{c_2+1}x\left(\left(\frac{T^{c_1}}{x}\right)^{1/2}+\left(\frac{T^{c_1}}{x}\right)^{1-\alpha_0}\right)+$$
$$\log^{c_4+1}x\left(\left(\frac{T^{2-c_3}}{x}\right)^{1-\alpha_0}+\left(\frac{T^{2-c_3}}{x}\right)^{\sigma(T)}\right) \qquad ⑦$$

这里

$$\sigma(T)=\frac{c_6}{\log^{2/3}(T+10)\log\log(T+10)}$$

现取 $T^{c_1}=x\log^{-c_8}x$，则得到

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T} x^{\beta-1}\ll \log^{-A}x \qquad ⑧$$

此外

$$\frac{x\log^2 x}{T}=x^{1-\frac{1}{c_1}}(\log x)^{\frac{c_8+2}{c_1}} \qquad ⑨$$

由式⑥～⑨引理3得证.

推论

$$\vartheta(x+h)-\vartheta(x)=h+O\left(\frac{h}{\log^A x}\right)$$
$$\pi(x+h)-\pi(x)=\int_x^{x+h}\frac{\mathrm{d}t}{\log t}+O\left(\frac{h}{\log^{A+1}x}\right) \qquad ⑩$$

引理4 若式①及④成立，则对任给正数 A，当 $1\geqslant\eta\geqslant x^{-\frac{2}{c_1}}\log^{c_9}x$ 时，我们有

$$I(\psi)=\int_x^{2x}[\psi(t+\eta t)-\psi(t)-\eta t]^2\mathrm{d}t\ll\frac{\eta^2x^3}{\log^A x} \qquad ⑪$$

这里 $c_9=\frac{c_{10}}{c_1}+\frac{A+4}{2}$，$c_{10}=\frac{c_2+A+2}{1-\alpha_0}$.

证明 由引理2，我们得到

$$\int_x^{2x}[\psi(t+\eta t)-\psi(t)-\eta t]^2\mathrm{d}t\ll\int_2^{2x}\left|\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{(1+\eta)^\rho-1}{\rho}t^\rho\right|^2\mathrm{d}t+O\left(\frac{x^3\log^4 x}{T^2}\right) \qquad ⑫$$

由于

$$\frac{(1+\eta)^\rho-1}{\rho}=\int_1^{1+\eta}t^{\rho-1}\mathrm{d}t\leqslant\min(\eta,|\gamma|^{-1}) \qquad ⑬$$

所以从式⑫,⑬，我们得到

$$I(\psi)\ll\sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\min(\eta,|\gamma_1|^{-1})\min(\eta,|\gamma_2|^{-1})\frac{x^{1+\beta_1+\beta_2}}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2}+$$

$$O\left(\frac{x^3\log^4 x}{T^2}\right)$$

由 $|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$,得到

$$I(\psi) \ll I_1(\psi) + \frac{x^3\log^4 x}{T^2} \tag{14}$$

这里

$$I_1(\psi) = \sum_{|\gamma_1|\leqslant T}\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\min(\eta^2, |\gamma_1|^{-2})\frac{x^{1+2\beta_1}}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2} \tag{15}$$

由熟知的估计

$$N(0,T+1) - N(0,T) \ll \log T, \quad T \geqslant 2$$

得到

$$\sum_{|\gamma_2|\leqslant T}\frac{1}{(1+|\gamma_1-\gamma_2|)^2} \ll \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k\leqslant|\gamma_1-\gamma_2|\leqslant k+1}\frac{1}{(1+k)^2} \ll \log(2+|\gamma_1|) \tag{16}$$

由式⑮,⑯得到

$$I_1(\psi) \ll \eta^2 x^3 \sum_{|\gamma_1|\leqslant T}(x^2)^{\beta_1-1} \tag{17}$$

取 $T^{c_1} = x^2\log^{-C_{10}x}$ 由式⑰,⑧立即推出

$$I_1(\psi) \ll \eta^2 x^3 \log^{-A} x \tag{18}$$

由上式及式⑭,引理 4 得证.

4.3 定理的证明

设 x 为一大正数,假设在区间 $[x, x+h]$ 内没有哥德巴赫数,取

$$Y = x^{1-\frac{1}{c_1}}\log^{c_7} x \tag{19}$$

由式⑪知道,在区间 $[x-Y, x-\frac{1}{2}Y]$ 内含有远大于 $Y\log^{-1}x$ 个素数. 对这种素数 p 在区间 $(x-p, x-p+h)$ 内没有素数. 这样,在区间 $\left(y, y+\frac{1}{2}h\right)$ 内不含有素数(这种 y 有远大于 $Y\log^{-1}x$ 个,$\frac{Y}{2} \leqslant y \leqslant Y$). 现取 $\eta = \frac{1}{4}hY^{-1}$,则容易推出

$$h \ll Y^{1-\frac{2}{c_1}}\log^{c_9} Y \tag{20}$$

由式⑲及⑳定理得证.

5 哥德巴赫数的例外集合①②

——陈景润

我们把能表示成两个奇素数之和的偶数称为哥德巴赫数，以 $E(x)$ 记作不超过 x 的非哥德巴赫数的数目，本文证明了 $E(x) = O(x^{0.99})$.

1742 年，哥德巴赫在写给 Euler 的信中提出了任一超过 2 的偶数都是两个素数之和的猜想. 我们称能够表成两个奇素数之和的偶数为哥德巴赫数，并以 $E(x)$ 表示所有不超过 x 的非哥德巴赫数的数目，则哥德巴赫猜想就是要证明当 $x \geqslant 2$ 时恒有 $E(x) \leqslant 2$. 哥德巴赫猜想虽然仍未解决，但 Виноградов 关于三素数定理的基本工作引起了许多人证明 $E(x) = o(x)$，即几乎所有的偶数都是哥德巴赫数.

1972 年 Vaughan 改进了前人的结果，证明了

$$E(x) = O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}})$$

最近，Montgomery 和 Vaughan 证明了：存在一个正常数 δ，使得对于一切充分大的 X

$$E(X) = O(X^{1-\delta})$$

5.1 预备引理

引理 1 设 A 是充分大的固定常数，q_1, q_2 是整数，$q_1 \geqslant A, q_2 \geqslant A$. 若 β_1 是对应于某个实原特征 (mod q_1) 的 L - 函数的实零点，β_2 是对应于另一实原特征 (mod q_2) 的 L - 函数的实零点，其中 q_1 与 q_2 可能相等，但两个特征是不同的，则

$$\min(\beta_1, \beta_2) \leqslant 1 - \frac{1}{5\log q_1q_2}$$

证明 设 $\chi_i(n)$ 是一个实原特征 (mod q_i)$(i = 1,2)$，容易证明 $\chi_1(n)\chi_2(n)$ 是一个特征 (mod q_1q_2). 而且

$$\chi_1(n)\chi_2(n) \neq \chi^0(n)$$

此处 $\chi^0(n)$ 是主特征 (mod q_1q_2). 在注释③的引理 2 中取

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2\log q_1q_2}$$

---

① 1979 年 2 月 24 日收到.
② 原载中国科学，1980，23(3)：219-232.
③ Jutila M. Ann. Acad. Sci, Fenn., 1969, 458: 1-32.

我们得到

$$-0.4263\log q_1q_2 \leqslant -\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2)+\mathrm{Re}\sum_{\rho}\left(\frac{1}{\sigma-\rho}-4(\bar{\sigma}-\bar{\rho})\right) \leqslant 0.4263\log q_1q_2$$

其中 ρ 取值于圆 $|s-\sigma| \leqslant 1/2$ 内的 $L(s,\chi_1\chi_2)$ 的零点. 令 $z=\sigma-\rho$,则

$$\mathrm{Re}(z^{-1}-4\bar{z})=\mathrm{Re}\frac{\bar{z}}{|z|^2}(1-4|z|^2)\geqslant 0,\ |z|\leqslant\frac{1}{2}$$

因此

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2)\leqslant 0.4263\log q_1q_2 \quad ①$$

类似地可有

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1)\leqslant 0.4263\log q_1-\frac{1}{\sigma-\beta_1} \quad ②$$

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_2)\leqslant 0.4263\log q_2-\frac{1}{\sigma-\beta_2} \quad ③$$

另一方面,有

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)<\frac{1}{\sigma-1}+O(1) \quad ④$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1)-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_2)-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2)\geqslant 0 \quad ⑤$$

由式 ① ~ ⑤,我们有

$$\frac{1}{\sigma-\beta_1}+\frac{1}{\sigma-\beta_2}\leqslant\frac{1}{\sigma-1}+0.853\log q_1q_2=2.853\log q_1q_2 \quad ⑥$$

设 $\beta=\min(\beta_1,\beta_2)$,则

$$\frac{2}{\sigma-\beta}\leqslant 2.853\log q_1q_2 \quad ⑦$$

从而

$$\beta<1-\frac{1}{5\log q_1q_2}$$

引理 1 证毕.

引理 2 设 z 是充分大的正数,那么,由模 $q\leqslant z$ 的实原特征所构成的一切 L - 函数中,至多有一个函数具有一个实零点 $\beta,\beta>1-\frac{1}{10\log z}$.

证明 由引理 1 推出.

引理 3 设 q 是充分大的整数. 令

$$L(s)=\prod_{\chi(\bmod q)}L(s,\chi)$$

则 $L(s)$ 至多有一个零点 $s=\sigma+\mathrm{i}t$,使得

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{20\log q(|t|+1)}$$

若这样的零点存在,则必是实零点,而且与之对应的是实特征.

证明 这是注释①中的一个引理.

引理 4 设 ε 是任意正常数, $y \geqslant X^{\varepsilon}$,令

$$N(y,\alpha,yX^{\varepsilon}) = \sum_{q \leqslant y} \sum_{\chi_q}{}^{*} N(\chi_q,\alpha,yX^{\varepsilon})$$

其中 $N(\chi_q,\alpha,yX^{\varepsilon})$ 表示 $L(s,\chi_q)$ 在区域

$$\sigma \geqslant \alpha, \quad |t| \leqslant yX^{\varepsilon}$$

中的零点个数,则

$$N(\chi_q,\alpha,yX^{\varepsilon}) \leqslant \begin{cases} (y^3X^{\varepsilon})^{2(1-\alpha)}, & \alpha \geqslant 1-\varepsilon \\ (y^3X^{\varepsilon})^{4(1-\alpha)}, & 0 < \alpha < 1-\varepsilon \end{cases}$$

证明 由注释②中定理 1 推出.

引理 5 设 $Y = X^{\lambda}$, $\lambda = 0.022\,61$, $q \leqslant Y$,则对于模 $q \leqslant Y$ 的所有原特征 χ,函数 $L(s,\chi_q)$ 在区域

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{20(\lambda+2\varepsilon)\log X}, \quad |t| \leqslant \frac{X^{\lambda+\varepsilon}}{q} \tag{8}$$

中不为零,但可能有一个简单实零点 $\tilde{\beta}$ 是例外. 凡使 $L(\tilde{\beta},\chi) = 0$ 的特征 $x(\bmod q)$, $q \leqslant Y$,都由 $\tilde{\chi}$ 导出,而且 $\tilde{\beta}$ 满足

$$1 - \frac{1}{20(\lambda+2\varepsilon)\log X} \leqslant \tilde{\beta} \leqslant 1 - \frac{C_2}{\tilde{r}^{\frac{1}{2}}\log^2\tilde{r}} \tag{9}$$

其中 ε 是任意小的固定正数,而 $\tilde{r}$ 表示例外模.

证明 由引理 2、引理 3 及注释③中的引理 4.1 推出.

5.2 圆 法

令

$$S(\alpha) = \sum_{y < p \leqslant X} \log p e(p\alpha)$$

则

$$S^2(\alpha) = \sum_n R(n) e(p\alpha)$$

其中

$$R(n) = \sum_{\substack{n = p_1 + p_2 \\ y < p_1, p_2 \leqslant X}} \log p_1 \log p_2$$

令 $Q = X^{1-\lambda}$, $\tau = Q^{-1}$,则

$$R(n) = \int_{\tau}^{1+\tau} S^2(\alpha) e(-n\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

---

① Miech R J. Acta Arith., 1969, 15: 119-137.
② Jutila M. Mathematica Scandinavica, 1977, 41: 45-62.
③ Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith, 1975, 27: 353-370.

现将积分区间分为基本区间和次要区间.我们定义基本区间由下面的 α 组成,即

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, (a, q) = 1, |\beta| \leqslant \frac{1}{qQ}, 1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Y$$

以 E 表示 $(\tau, 1+\tau)$ 中所有不属于基本区间的 α 所成的集合.现令

$$R(n) = R_1(n) + R_2(n)$$

其中 $R_1(n)$ 表示基本区间上的积分值, $R_2(n)$ 表示次要区间上的积分值.

本文目的在于证明:对于区间 $(1-\varepsilon)X < n \leqslant X$ 中的偶数 n,至多除去 $X^{1-0.5\lambda+3\varepsilon}$ 个例外值,总有 $R_1(n) > |R_2(n)|$.由此立刻可证得定理.

引理 6 设

$$1 \leqslant y \leqslant x^{\frac{1}{4}}, y \leqslant q \leqslant xy^{-1}$$

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, (a, q) = 1$$

则

$$S(\alpha) \ll xy^{-\frac{1}{2}} \log^{17} x$$

证明 由注释①中引理 3.1 得出.

引理 7

$$\sum_n R_2^2(n) \ll x^{3-\lambda} \log^{35} x$$

证明 由 Parseval 恒等式,我们有

$$\sum_n R_2^2(n) = \int_E |S(\alpha)|^4 \mathrm{d}\alpha \leqslant \pi(x) \log^2 x \max_{\alpha \in E} |S(\alpha)|^2$$

由引理 6 即可得证.

引理 8 区间 $(1-\varepsilon)x < n \leqslant x$ 中使 $|R_2(n)| > x^{1-0.25\lambda+\varepsilon}$ 的数的个数,至多为 $x^{1-0.5\lambda+3\varepsilon}$.

证明 易由引理 7 得出.

5.3 基本区间上的积分

令

$$\alpha = \frac{a}{q} + \eta, (a, q) = 1, 1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Y$$

又设 $\chi_q (\bmod q)$ 是由原特征 $\chi^* (\bmod q^*)$ 导出的特征,则

$$S(\chi_q, \eta) = S(\chi^*, \eta)$$

此处

① Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith, 1975, 27:353-370.

$$S(\chi_q,\eta) = \sum_{Y<p\leqslant x}\chi_q(p)\log pe(p\eta)$$

设

$$\tau(\chi_q) = \sum_{h=1}^{q}\chi_q(h)e\left(\frac{h}{q}\right)$$

则

$$S(\alpha) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\tau(\bar{\chi}_q)S(\chi_q,\eta)$$

若 $\tilde{r}\nmid q$,令

$$S(\chi_q^0,\eta) = T(\eta) + W(\chi_q^0,\eta)$$

$$S(\chi_q,\eta) = W(\chi_q,\eta),\quad \chi_q \neq \chi_q^0$$

其中 χ_q^0 表示主特征(mod q)

$$T(\eta) = \sum_{Y<m\leqslant x}e(m\eta)$$

我们得到

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)}T(\eta) + \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\chi(a)\tau(\bar{\chi}_q)W(\chi_q,\eta)$$

若 $\tilde{r}\nmid q$,令

$$S(\chi_q^0,\eta) = T(\eta) + W(\chi_q^0,\eta)$$

$$S(\tilde{\chi}\chi_q^0,\eta) = \tilde{T}(\eta) + W(\tilde{\chi}\chi_q^0,\eta)$$

$$S(\chi_q^0,\eta) = W(\chi_q,\eta),\chi_q \neq \chi_q^0,\chi_q \neq \tilde{\chi}\chi_q^0$$

其中

$$\tilde{T}(\eta) = \sum_{Y<m\leqslant x}m^{\tilde{\beta}-1}e(m\eta)$$

我们得到

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)T(\eta)}{\varphi(q)} + \frac{\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0),\tilde{\chi}(a)\tilde{T}(\eta)}{\varphi(q)} + \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\tau(\bar{\chi}_q)W(\chi_q,\eta)$$

令

$$C_q(m) = \sum_{(a,q)=1}e\left(\frac{am}{q}\right),\tau_q(\chi_d) = \sum_{(a,q)=1}\chi_d(a)e\left(\frac{a}{q}\right)$$

$$C_{\chi_q}(m) = \sum_{(a,q)=1}\chi_q(a)e\left(\frac{am}{q}\right),C_{\chi_d,q}(m) = \sum_{(a,q)=1}\chi_d(a)e\left(\frac{am}{q}\right)$$

先假定不存在例外特征,于是

$$R_1(n) = \sum_{i=1}^{3}R_{1i}(n) \tag{⑩}$$

其中

$$R_{11}(n) = \sum_{q\leqslant Y}\sum_{(a,q)=1}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}e\left(-\frac{an}{q}\right)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T^2(\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta =$$

$$\sum_{q\leq Y}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T^2(\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$R_{12}(n)=2\sum_{q\leq Y}\sum_{\chi_q}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}\chi_q(a)e\left(-\frac{na}{q}\right)\tau(\bar{\chi}_q)\cdot$$

$$\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T(\eta)W(\chi_q,\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta=$$

$$2\sum_{d\leq Y}\sum_{\chi_d}{}^*\sum_{\substack{q\leq Y\\ d\mid q}}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}C_{\chi_d,q}(-n)\tau_q(\bar{\chi}_d)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T(\eta)W(\chi_d,\eta)\mathrm{d}\eta$$

其中$\sum\limits_{\chi_d}{}^*$对所有原特征(mod q)求和,即

$$R_{13}(n)=\sum_{q\leq Y}\sum_{(a,q)=1}\frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi_q}\chi_q(a)\sum_{\chi'_q}\chi'_q(a)\tau(\bar{\chi}_q)\tau(\bar{\chi}'_q)\cdot$$

$$e\left(-\frac{na}{q}\right)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}W(\chi_q,\eta)W(\chi'_q,\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta=$$

$$\sum_{d_1\leq Y}\sum_{d_2\leq Y}\sum_{\chi_{d_1}}\sum_{\chi_{d_1}}\sum_{\substack{q\leq Y\\ d_1\mid q,d_2\mid q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}C_{\chi d_1,\chi d_2,q}(-n)\cdot$$

$$\tau_q(\bar{\chi}_{d_1})\tau_q(\bar{\chi}_{d_2})\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}W(\chi d_1,\eta)W(\chi d_2,\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta$$

其中

$$C_{\chi d_1,\chi d_2,q}(-n)=\sum_{(a,q)=1}\chi d_1(a)\chi d_2(a)e\left(-\frac{na}{q}\right)$$

若存在例外特征,我们有

$$R_1(n)=\sum_{i=1}^{6}R_{1i}(n)$$

此外

$$R_{14}(n)=\sum_{\substack{q\leq Y\\ \tilde{r}\mid q}}\sum_{(a,q)=1}\frac{\tau_q^2(\bar{\tilde{\chi}})}{\varphi^2(q)}e\left(-\frac{na}{q}\right)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}\tilde{T}^2(\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta=$$

$$\sum_{\substack{q\leq Y\\ \tilde{r}\mid q}}\frac{\tau_q^2(\bar{\tilde{\chi}})}{\varphi^2(q)}C_q(-n)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}\tilde{T}^2(\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$R_{15}(n)=2\sum_{\substack{q\leq Y\\ \tilde{r}\mid q}}\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}C_{\tilde{\chi},q}(-n)\tau_q(\bar{\tilde{\chi}})\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}T(\eta)\tilde{T}(\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$R_{16}(n)=2\sum_{\substack{q\leq Y\\ \tilde{r}\mid q}}\frac{\tau_q(\bar{\tilde{\chi}})}{\varphi^2(q)}\sum_{\chi_q}\tau(\bar{\chi}_q)C_{\chi_q\tilde{\chi},q}(-n)\int_{-\frac{1}{qQ}}^{\frac{1}{qQ}}\tilde{T}(\eta)W(\chi_q,\eta)e(-n\eta)\mathrm{d}\eta$$

容易得到

$$R_{11}(n) = n\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}C_q(-n)O(x^{1-\lambda+\varepsilon}) = nG(n) + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}) \qquad ⑪$$

其中

$$G(n) = \prod_{p\nmid n}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\mid n}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)$$

令

$$\tilde{G}(n) = \tilde{\chi}(-1)\mu\left(\frac{\tilde{r}}{(\tilde{r},n)}\right)G(n)\prod_{\substack{p\nmid n\\ p\mid \tilde{r}}}(p-2)^{-1}$$

$$\tilde{I}(n) = \sum_{Y<k\leqslant n-Y}(k(n-k))^{\tilde{\beta}-1}$$

则由注释①,我们有

$$R_{14}(n) = \tilde{G}(n)\tilde{I}(n) + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}(\tilde{r},n)) \qquad ⑫$$

令

$$W(\chi_d) = \left(\int_{-\frac{1}{dQ}}^{\frac{1}{dQ}}|W(\chi_d,\eta)|^2 d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \qquad ⑬$$

则

$$R_{12}(n) = 2x^{\frac{1}{2}}\sum_{d\leqslant Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}W(\chi_d)\sum_{\substack{q\leqslant Y\\ d\mid q}}\left|\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)}\tau_q(\bar{\chi}_d)C_{\chi_d,q}(-n)\right| \qquad ⑭$$

$$R_{13}(n) \leqslant \sum_{d_1\leqslant Y}\sum_{d_2\leqslant Y}\sum_{\chi_{d_1}}{}^{*}\sum_{\chi_{d_2}}{}^{*}W(\chi_{d_1})W(\chi_{d_2})\sum_{\substack{q\leqslant Y\\ d_1\mid q,d_2\mid q}}\frac{1}{\varphi^2(q)}\cdot$$

$$|\tau_q(\bar{\chi}_{d_1})\tau_q(\bar{\chi}_{d_2})C_{\chi_{d_1},\chi_{d_2},q}(-n)| \qquad ⑮$$

引理 9 设 χ_{r_i} 是原特征(mod r_i),$i = 1,2$. 又设 $r_3 = (r_1,r_2)$,$r_4 = [r_1,r_2]$,于是 $r_1 = r_3r_5$,$r_2 = r_3r_6$,$r_4 = r_3r_5r_6$,其中$(r_5,r_6) = 1$.令 $m > 0$

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m) = \sum_{\substack{q=1\\ r_1\mid q,r_2\mid q}}^{\infty}\frac{|\tau_q(\bar{\chi}_{r_1})\tau_q(\bar{\chi}_{r_2})C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},q}(-m)|}{\varphi^2(q)}$$

$$A(r_1,r_2,m) = \frac{r_5r_6|\chi_{r_1}(r_6)\chi_{r_2}(r_5)|\prod\limits_{p\nmid r_4,p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\varphi^2(r_5r_6)\sqrt{\frac{r_3}{(m,r_3)}}\prod\limits_{p\mid\frac{r_3}{(m,r_3)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}|\mu(r_5)||\mu(r_6)|$$

则

① Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith, 1975,27:353-370.

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m) \leqslant \frac{A(r_1,r_2,m)m}{\varphi(m)}$$

证明 令 $q = kr_4$,则由注释①中引理 5.2 得

$$\tau_q(\bar{\chi}_{r_1}) = \bar{\chi}_{r_1}(kr_6)\mu(kr_6)\tau(\bar{\chi}_{r_1})$$

$$\tau_q(\bar{\chi}_{r_2}) = \bar{\chi}_{r_2}(kr_5)\mu(kr_5)\tau(\bar{\chi}_{r_2})$$

由此得到

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m) \leqslant \sum_{\substack{k=1\\(k,r_4)=1}}^{\infty} \frac{|\mu^2(k)\mu(r_5)\mu(r_6)\chi_{r_1}(r_6)\chi_{r_2}(r_5)}{\varphi^2(k)\varphi^2(r_4)} \cdot$$

$$|\tau(\bar{\chi}_{r_1})\tau(\bar{\chi}_{r_2})C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},q}(-m)| \tag{16}$$

令 $h = kh_1 + r_4h_2$,则

$$C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},q}(-m) = \sum_{\substack{h=1\\(h,kr_4)=1}}^{kr_4} \chi_{r_1}(h)\chi_{r_2}(h)e\left(-\frac{hm}{kr_4}\right) =$$

$$\sum_{h_1=1}^{r_4}\sum_{h_2=1}^{k} \chi_{r_1}(kh_1)\chi_{r_2}(kh_1)e\left(-\frac{h_1m}{r_4}\right)e\left(-\frac{h_2m}{k}\right) =$$

$$\chi_{r_1}(k)\chi_{r_2}(k)C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},r_4}(-m)C_k(-m) \tag{17}$$

我们可以假定$(r_1,r_6) = (r_2,r_5) = 1$,于是$(r_3,r_5) = (r_3,r_6) = 1$.令 $\chi_{r_1}(n) = \chi_{r_2}^{(1)}(n)\chi_{r_5}(n)$,$\chi_{r_2}(n) = \chi_{r_3}^{(2)}(n)\chi_{r_6}(n)$,其中 $\chi_{r_i}(n)$ 是原特征(mod r_i),$i = 5,6$, 而 $\chi_{r_3}^{(i)}(n)(i = 1,2)$ 是原特征(mod r_3). 于是 $\chi_{r_1}(n)\chi_{r_2}(n) = \chi_{r_3}^{(1)}(n)\chi_{r_3}^{(2)}(n)\chi_{r_5}(n)\chi_{r_6}(n)$.令

$$\chi_{r_3}^{(1)}(n)\chi_{r_3}^{(2)}(n) = \chi_{r_3}^{(3)}(n),\chi_{r_5}(n)\chi_{r_6}(n) = \chi_{r_5r_6}(n)$$

则 $\chi_{r_5r_6}(n)$ 是原特征(mod r_5r_6).但 $r_4 = r_3r_5r_6$,$(r_3,r_5r_6) = 1$,所以

$$C_{\chi_{r_1},\chi_{r_2},r_4}(-m) = \sum_{h=1}^{r_4}\chi_{r_3}^{(3)}(h)\chi_{r_5r_6}(h)e\left(-\frac{hm}{r_4}\right) =$$

$$\sum_{\substack{h_1=1\\(h_2,r_3)=(h_1,r_5r_6)=1}}^{r_5r_6}\sum_{h_2=1}^{r_3} \chi_{r_3}^{(3)}(r_3h_1 + r_5r_6h_2)\chi_{r_5r_6}(r_3h_1 + r_5r_6h_3) \cdot$$

$$e\left(-\frac{h_1m}{r_5r_6}\right)e\left(-\frac{h_2m}{r_3}\right) = \chi_{r_3}^{(3)}(r_5r_6)\chi_{r_3r_6}(r_3) \cdot$$

$$\sum_{\substack{h_1=1\\(h1,r_5r_6)=1}}^{r_5r_6} \chi_{r_5r_6}(h_1)e\left(-\frac{h_1m}{r_5r_6}\right)\sum_{\substack{h_2=1\\(h_2,r_3)=1}}^{r_3}\chi_{r_3}^{(3)}(h_2)e\left(-\frac{h_2m}{r_3}\right)$$

---

① Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith, 1975, 27:353-370.

由式⑯,⑰得到

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m)\leqslant|\mu(r_5)\mu(r_6)\chi_{r_1}(r_6),\chi_{r_2}(r_5)\chi_{r_5r_6}(-m)|\cdot$$
$$|\tau(\bar{\chi}_{r_1})\tau(\bar{\chi}_{r_2})\tau(\chi_{r_5r_6})C_{\chi_{r_3}}^{(3)}(-m)|\frac{1}{\varphi^2(r_4)}\cdot$$
$$\sum_{\substack{k=1\\(k,r_4)=1}}^{\infty}\frac{\mu^2(k)C_k(-m)}{\varphi^2(k)}$$

由注释①中引理5.4,我们得到

$$|C_{\chi_{r_3}^{(3)}}(-m)|\leqslant\frac{\sqrt{\frac{r_3}{(m,r_3)}}\varphi(r_3)}{\varphi\left(\frac{r_3}{(m,r_3)}\right)}$$

$$\frac{1}{\varphi^2(r_4)}|\tau(\bar{\chi}_{r_1})\tau(\bar{\chi}_{r_2})\tau(\chi_{r_5r_6})C_{\chi_{r_3}^{(3)}}(-m)|\leqslant$$
$$\frac{r_5r_6}{\varphi^2(r_5r_6)\sqrt{\frac{r_3}{(r_3,m)}}\left(\prod_{\substack{p|r_3\\p|m}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p|\frac{r_3}{(m,r_3)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\right)} \qquad ⑱$$

当$\left(m,\frac{r_4}{r_3}\right)=1$时,容易得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^2(k)|C_k(-m)|}{\varphi^2(k)}\leqslant\prod_{\substack{p\nmid m\\p\nmid r_4}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|m\\p\nmid r_4}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=$$
$$\prod_{\substack{p\nmid m\\p\nmid r_4}}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|m\\p\nmid r_3}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \qquad ⑲$$

由式⑱,⑲推知

$$S(\chi_{r_1},\chi_{r_2},m)\leqslant A(r_1,r_2,m)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

引理10 设m是偶整数,$r_1>0,r_2>0$,则

$$A(r_1,r_2,m)\leqslant\frac{10.41}{\sqrt{6}}$$

证明 令

$$C_1(r_1,r_2,m)=\begin{cases}1, & 2\mid r_5r_6\\ 2\sqrt{2} & 2\nmid r_5r_6\end{cases}$$

于是

① Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith, 1975,27:353-370.

$$\frac{r_5r_6}{\varphi^2(r_5r_6)}C_1(r_1,r_2,m)\leqslant 2\sqrt{2},(r_5,r_6)=1$$

$$A(r_1,r_2,m)\leqslant\frac{r_5r_6C_1(r_1,r_2,m)\prod\limits_{p\nmid r_4,p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\varphi^2(r_5r_6)\prod\limits_{\substack{p\mid\frac{r_3}{(m,r_3)}\\ p\geqslant 3}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2p^{\frac{1}{2}}}\leqslant$$

$$\frac{2\sqrt{2}\prod\limits_{p\nmid r_4,p\nmid m}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\prod\limits_{\substack{p\mid\frac{r_3}{(m,r_3)}\\ p\geqslant 3}}p^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}$$

因此,有

$$A(r_1,r_2,m)\leqslant\frac{9\prod\limits_{p\geqslant 5}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)}{\sqrt{6}}\leqslant\frac{10.41}{\sqrt{6}}$$

引理 11

$$A(1,r,m)\leqslant\frac{2r}{\varphi^2(r)},A(r,1,m)\leqslant\frac{2r}{\varphi^2(r)}$$

由引理 9 和引理 11,可以得到

$$R_{12}(n)\leqslant 4x^{\frac{1}{2}}\sum_{d\leqslant Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}\frac{ndW(\chi_d)}{\varphi(n)\varphi^2(d)}\leqslant$$

$$\frac{n}{\varphi(n)}\Big(8x^{\frac{1}{2}}\sum_{d\leqslant\log^{10}x}\sum_{\chi_d}{}^{*}W(\chi_d)+O\Big(x^{\frac{1}{2}}\log^{-6}x\sum_{d\leqslant Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}W(\chi_d)\Big)\Big)\leqslant$$

$$\frac{n}{\varphi(n)}(8x^{\frac{1}{2}}W(\log^{10}x))+O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}W(Y)}{\log^6x}\right)\qquad ⑳$$

其中

$$W(Y)=\sum_{d\leqslant Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}W(\chi_d)$$

由注释①中引理 5.1 与引理 5.2,容易推知

$$R_{15}(n)\ll\frac{\tilde{\chi}(n)n\tilde{r}}{\varphi(n)\varphi^2(\tilde{r})}+(\tilde{r},n)\chi^{1-\lambda+\varepsilon}\qquad ㉑$$

由式⑮,引理 9 及引理 10,我们得到

$$R_{13}(n)\leqslant\frac{10.41nW^2(Y)}{\sqrt{6}\varphi(n)}\qquad ㉒$$

---

① Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith, 1975,27:353-370.

$$R_{16}(n) \leqslant \frac{20.82 x^{\frac{1}{2}} n W^2(Y, \tilde{r})}{\sqrt{6}\varphi(n)} + \frac{\varepsilon n W(Y) x^{\frac{1}{2}}}{\varphi(n)} \qquad ㉓$$

其中

$$W(Y, \tilde{r}) = \sum_{d \leqslant Y, \frac{[d, \tilde{r}]}{(d, \tilde{r})} \leqslant x^{\varepsilon}} \sum_{\chi_d}{}^{*} W(\chi_d)$$

5.4 $W(Y)$ 的估计

令

$$\sum_{p}{}^{*} \chi_d(p) \log p = \begin{cases} \sum\limits_{p} \log p - \sum\limits_{n} 1, & \chi_d = \chi_d^0 \\ \sum\limits_{p} \tilde{\chi}(p) \log p - \sum\limits_{n} n^{\tilde{\beta}-1}, & \chi_d = \tilde{\chi}\chi_d^0 \\ \sum \chi_d(p) \log p, & \chi_d \neq \chi_d^0, \chi_d \neq \tilde{\chi}\chi_d^0 \end{cases}$$

由注释①中引理 1 可得

$$W(\chi_d) = \left(\int_{-\frac{1}{dQ}}^{\frac{1}{dQ}} |W(\chi_d, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{dQ} \sum_{\substack{Y < p \leqslant x \\ t - \frac{Qd}{2} \leqslant p \leqslant t}}{}^{*} \chi_d(p) \log p \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\pi \left(\int_{Y}^{x + \frac{Qd}{2}} \left| \frac{1}{dQ} \sum_{\substack{xY^{-3} < p \leqslant x \\ t - \frac{Qd}{2} \leqslant p \leqslant t}}{}^{*} \chi_d(p) \log p \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{2}} d^{-1} Q^{-1} x Y^{-3}) \leqslant$$

$$\frac{\pi \sqrt{x + \frac{dQ}{2}}}{dQ} \max_{xY^{-3} \leqslant t \leqslant x + \frac{Qd}{2}} \left| \sum_{\substack{xY^{-3} < p \leqslant x \\ t - \frac{Qd}{2} \leqslant p \leqslant t}}{}^{*} \chi_d(p) \log p \right| + O(x^{\frac{1}{2} - 2\lambda} d^{-1})$$

令

$$E_{0,\chi_d} = \begin{cases} 1, & \chi_d = \chi_d^0 \\ 0, & \chi_d \neq \chi_d^0 \end{cases} \quad E_{1,\chi_d} = \begin{cases} 1, & \chi_d = \tilde{\chi}\chi_d^0 \\ 0, & \chi_d \neq \tilde{\chi}\chi_d^0 \end{cases}$$

并设 $d \leqslant Y = x^{\lambda}, x^{\varepsilon} \leqslant T \leqslant x^{0.1}$,则

$$\sum_{n \leqslant x} \chi_d(n) \Lambda(n) = E_{0,\chi_d} x - \frac{E_{1,\chi_d} x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \sum_{\beta \geqslant \frac{1}{4}, |\gamma| \leqslant T}{}' \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} \right)$$

此处“$'$”表示 $\rho \neq \tilde{\beta}$.由此得到

$$\left| \sum_{\max(xY^{-3}, t - \frac{Qd}{2}) \leqslant p \leqslant \min(x, t)}{}^{*} \chi_d(p) \log p \right| \leqslant \sum_{\substack{\beta \geqslant \frac{1}{4} \\ |\gamma| \leqslant Yx^{\varepsilon} d^{-1}}}{}' \left| \int_{\max(xY^{-3}, t - \frac{Qd}{2})}^{\min(x, t)} s^{\rho - 1} ds \right| +$$

① Gallagher P X. Invent Math. 1970, 11:329-339.

$$\frac{d}{Yx^{0.9\varepsilon}}\sum_{\beta\geq\frac{1}{4},|\gamma|\leq Y^4}{}'x^{\beta}+O(x^{1-4\lambda+\varepsilon})\leq$$

$$\frac{Qd}{2}\sum_{\beta\geq\frac{1}{4},|\gamma|\leq Yx^{\varepsilon}d^{-1}}{}'\left(\frac{x}{Y^3}\right)^{\beta-1}+\frac{d}{Yx^{0.9\varepsilon}}\sum_{\beta\geq\frac{1}{4},|\gamma|\leq Y^4}{}'x^{\beta}+O(x^{1-4\lambda+\varepsilon})$$

当 $1\leq d\leq Y$,可以得到

$$W(\chi_d)\leq\frac{\pi\sqrt{1.5}x^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{\substack{\beta\geq\frac{1}{4}\\|\gamma|\leq x^{\lambda+\varepsilon}d^{-1}}}{}'(x^{1-3\lambda})^{\beta-1}+$$

$$x^{\frac{1}{2}-0.8\varepsilon}\sum_{\substack{\beta\geq\frac{1}{4}\\|\gamma|\leq x^{4\lambda}}}{}'x^{\beta-1}+O(x^{\frac{1}{2}-2\lambda+2\varepsilon}d^{-1}) \quad ㉔$$

$$W(Y)=\frac{\pi\sqrt{1.5}x^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{d\leq Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{\substack{\beta\geq\frac{1}{4}\\|\gamma|\leq x^{\lambda+\varepsilon}d^{-1}}}{}'x^{(1-3\lambda)(\beta-1)}+$$

$$x^{\frac{1}{2}-0.8\varepsilon}\sum_{d\leq Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{\substack{\beta\geq\frac{1}{4}\\|\gamma|\leq x^{4\lambda}}}{}'x^{\beta-1}+O(x^{\frac{1}{2}-\lambda+2\varepsilon}) \quad ㉕$$

先假定例外特征不存在.此时由引理4和引理5可得

$$\sum_{d\leq Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{\beta\geq\frac{1}{4}}{}'x^{(1-3\lambda)(\beta-1)}\leq-\int_{\frac{1}{4}}^{1-\frac{1}{20(\lambda+\varepsilon)\log x}}x^{(1-3\lambda)(\beta-1)}\mathrm{d}N(Y,\alpha,Yx^{\varepsilon})\leq$$

$$\left(\frac{1-3\lambda}{1-9\lambda-2\varepsilon}\right)e^{-\frac{1-9\lambda-2\varepsilon}{20(\lambda+\varepsilon)}}+O(x^{-0.5\varepsilon}) \quad ㉖$$

而且类似地,有

$$\sum_{d\leq Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{\substack{\beta\geq\frac{1}{4}\\|\gamma|\leq x^{4\lambda}}}{}'x^{\beta-1}=O(x^{0.3\varepsilon}) \quad ㉗$$

由㉕,㉖得到

$$W(Y)\leq\frac{\pi\sqrt{1.5}(1-3\lambda)}{2(1-9\lambda-2\varepsilon)}e^{-\frac{1-9\lambda-2\varepsilon}{20(\lambda+\varepsilon)}}x^{\frac{1}{2}}+O(x^{\frac{1}{2}-0.5\varepsilon}) \quad ㉘$$

现在设有例外特征 $\tilde{\chi}(\bmod\ \tilde{r})$,且

$$(1-\tilde{\beta})(1+\varepsilon)\log x\leq C_1\leq\frac{1}{20}$$

引理12[①] 设 χ_1 是实的非主特征$(\bmod\ q)$,且 $\beta_1=1-\delta_1$ 是 $L(s,\chi_1)$ 的实零点,χ 是一个特征$(\bmod\ q)$,$\rho=\beta+i\tau=1-\delta+i\tau$ 是 $L(s,\chi)$ 的一个零点,

① Jutila M. Mathematica Scandinavica, 1977, 41:45-62.

$\delta < 0.01, \beta \leqslant \beta_1$.若 $D = q(|\tau|+1)$ 充分大,即 $D \geqslant D_0(\epsilon)$,则

$$\delta_1 \geqslant \frac{1-6\delta}{8\log D} D^{\frac{-(2+\epsilon)\delta}{1-6\delta}}$$

引理 13 设 $\tilde{\delta} = 1 - \tilde{\beta}$,$\chi$ 是一个特征(mod q),$\rho = \beta + i\tau = 1 - \delta + i\tau$ 是 $L(s,\chi)$ 的零点,$\delta < 0.1$.设 $D_1 = [q, \tilde{r}].(|\tau|+1)$ 充分大,即 $D \geqslant D_0(\epsilon)$,则

$$\tilde{\delta} \geqslant \frac{1-6\delta}{8\log D_1} D_1^{\frac{-(2+\epsilon)\delta}{1-6\delta}} \qquad ㉙$$

证明 设 $\chi^0_{[\tilde{r},q]}$ 是一个主特征(mod$[\tilde{r},q]$),则

$$L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}\chi^0_{[\tilde{r},q]}) = L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}) = 0 \qquad ㉚$$

$$L(\beta + i\tau, \chi_q\chi^0_{[\tilde{r},q]}) = L(\beta + i\tau, \chi_q) = 0 \qquad ㉛$$

由此及引理 12 就可得需要的结果.

引理 14 设 $\tilde{r} \leqslant x^{\frac{1}{2}(\lambda+\epsilon)}$,$\tilde{\delta}(\lambda+\epsilon)\log x \leqslant C_1 \leqslant \frac{1}{20}$,则

$$W(Y) \leqslant \left(\frac{\pi\sqrt{1.5}(6.075)\lambda\tilde{\delta}(1-3\lambda)\log x}{1-9\lambda-2\epsilon}\right)\left(\frac{20}{12.15}\right)^{1-\frac{1-9\lambda-2\epsilon}{3.0015\lambda}} x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}}) \qquad ㉜$$

证明 在引理 13 中取 $D_1 = x^{1.5\lambda+\epsilon}$,得到

$$\tilde{\delta} \geqslant \frac{D_1^{-2.001\delta}}{8.1\log D_1}, \quad \delta \leqslant \epsilon$$

因此

$$S \geqslant \eta = \frac{\log \frac{1}{(8.1)(1.5\lambda\log x)\tilde{\delta}}}{(2.001)(1.5\lambda+\epsilon)\log x}, \quad \delta \leqslant \epsilon$$

从而

$$\sum_{d\leqslant Y}\sum_{\chi_d}{}^{*}\sum_{\substack{\beta\geqslant 4\\ |\gamma|\leqslant x^{\lambda+\epsilon}/d}} x^{(1-3\lambda)(\beta-1)} \leqslant \int_{\frac{1}{4}}^{1-\epsilon}(x^{3\lambda+4})^{4(1-\alpha)}x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)}\log x^{1-3\lambda}\,d\alpha +$$

$$\int_{1-\epsilon}^{1-\eta}(x^{3\lambda+\epsilon})^{2(1-\alpha)}x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)}\log x^{1-3\lambda}\,d\alpha + O(x^{-\epsilon}) \leqslant$$

$$\left(\frac{12.15\lambda\tilde{\delta}(1-3\lambda)\log x}{1-9\lambda-2\epsilon}\right)\left(\frac{20}{12.15}\right)^{1-\frac{1-9\lambda-2\epsilon}{3.0015\lambda}} + O(x^{-\frac{\epsilon}{2}})$$

由此及式 ㉕ 可得到引理结论.

由式 ㉘ 容易得知

$$W(\log^{10}x) \leqslant 10^{-10}x^{\frac{1}{2}} \qquad ㉝$$

引理 15

$$W(Y,\tilde{r}) \leqslant \left(\frac{4.05\pi\sqrt{1.5}(1-3\lambda)}{20(1-9\lambda-2\epsilon)}\right)\left(\frac{20}{8.12}\right)^{1-\frac{1-9\lambda}{2.001\lambda}} x^{\frac{1}{2}} + O(x^{\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}}) \qquad ㉞$$

证明

$$W(Y,\tilde{r}) = \sum_{\substack{d \leqslant Y \\ \frac{[d,r]}{(d,r)} \leqslant x^{\varepsilon}}} \sum_{\chi_d}{}^{*} W(\chi_d)$$

在引理 13 中取 $D_1 = x^{\lambda+2\varepsilon}$，则得到

$$\delta \geqslant \eta = \frac{\log \dfrac{1}{8.1\lambda\tilde{\delta}\log x}}{2.001(\lambda+2\varepsilon)\log x}, \quad \delta \leqslant \varepsilon$$

于是

$$\sum_{\substack{d \leqslant Y \\ \frac{[d,r]}{(d,r)} \leqslant x^{\varepsilon}}} \sum_{\chi_d}{}^{*} \sum_{\substack{\beta \geqslant \frac{1}{4} \\ |\gamma| \leqslant x^{\lambda+\varepsilon}/d}} x^{(1-3\lambda)(\beta-1)} \leqslant \int_{\frac{1}{4}}^{1-\varepsilon} (x^{3\lambda+\varepsilon})^{4(1-\alpha)} x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)} \log x^{1-3\lambda} \mathrm{d}\alpha +$$

$$\int_{1-\varepsilon}^{1-\eta} (x^{3\lambda+\varepsilon})^{2(1-\alpha)} x^{(1-3\lambda)(\alpha-1)} \log x^{1-3\lambda} \mathrm{d}\alpha +$$

$$O(x^{-\varepsilon}) \leqslant$$

$$\left(\frac{8.1\lambda\tilde{\delta}(1-3\lambda)\log x}{1-9\lambda-2\varepsilon}\right)\left(\frac{20}{8.11}\right)^{1-\frac{1-9\lambda}{2.001\lambda}} +$$

$$O(x^{-\frac{\varepsilon}{2}})$$

由此及式 ㉔ 即可得证.

5.5 定理的证明

(1) 首先，假定不存在例外特征. 由式 ⑩，⑪，⑳，㉒ 及 ㉓

$$R_1(n) \geqslant nG(n) - \frac{n}{\varphi(n)}\left(8x^{\frac{1}{2}} W(\log^{10} x) + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} W(Y)}{\log^6 x}\right) + \frac{10.41 W^2(Y)}{\sqrt{6}}\right) +$$

$$O(x^{1-\lambda+\varepsilon}) \geqslant \frac{n}{\varphi(n)}\left(\prod_{\substack{p \geqslant 3 \\ p \nmid n}}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) n - 10^{-9} x -\right.$$

$$\left.\left(\frac{10.411}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{\pi^2(1.5)(1-3\lambda)^2}{4(1-9\lambda)^2 \mathrm{e}^{0.1\lambda^{-1}-0.09}}\right) x\right) \geqslant$$

$$\frac{n}{\varphi(n)}\{0.65x - 0.636x\} \geqslant 0.014x$$

定理由此得证.

(2) 若存在例外特征，则

$$R_1(n) \geqslant nG(n) - |G(n)\tilde{I}(n)| + O(x^{1-\lambda+\varepsilon}(\tilde{r}, n)) -$$

$$\frac{n}{\varphi(n)}\left(8x^{\frac{1}{2}} W(\log^{10} x) + \frac{10.41}{\sqrt{6}} W^2(Y) + \frac{20.82 W(Y,\tilde{r}) x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}} +\right.$$

$$\left.\varepsilon W(Y) x^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} W(Y)}{\log^6 x}\right) + O\left(\frac{n\tilde{r}\tilde{\chi}^2(n)}{\varphi^2(\tilde{r})}\right)\right) \qquad ㉟$$

我们分三种情形讨论.

(i) $(n,r)=1$ 或 $\prod_{p\mid\tilde{r},p\nmid n}(p-2)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$, $(\tilde{r},n)\leqslant x^{\frac{\lambda}{2}}$. 若 $\prod_{p\mid\tilde{r},p\nmid n}(p-2)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$, 则

$$|G(n)I(n)|\leqslant nG(n)\prod_{p\mid\tilde{r},p\nmid n}(p-2)^{-1}\leqslant\varepsilon nG(n)$$

若 $(n,r)=1$, 则

$$\prod_{p\mid\tilde{r},p\nmid n}(p-2)^{-1}\leqslant 6\varepsilon,\quad \tilde{r}>\log^{1.5}x$$

因此

$$R_1(n)\geqslant\frac{n}{\varphi(n)}\left(n\prod_{p\geqslant 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)-2\varepsilon x-10^{-9}x-\varepsilon W(Y)x^{\frac{1}{2}}-\frac{10.41}{\sqrt{6}}W^2(Y)-\frac{20.82W(Y,\tilde{r})}{\sqrt{6}}x^{\frac{1}{2}}\right)\geqslant$$

$$\frac{n}{\varphi(n)}\left(0.65x-\frac{10.41}{\sqrt{6}}\left(\frac{1.5\pi^2(1-3\lambda)^2x}{4(1-9\lambda)^2e^{0.1\lambda^{-1}-0.9}}\right)-\frac{\pi\sqrt{1.5}\varepsilon(1-3\lambda)x}{2(1-9\lambda)e^{\frac{1}{2}(0.1\lambda^{-1}-0.9)}}-\frac{20.83}{\sqrt{6}}\left(\frac{4.05\pi\sqrt{1.5}(1-3\lambda)}{20(1-9\lambda)}\right)\cdot\left(\frac{20}{8.11}\right)^{1-\frac{1-9\lambda}{2.001\lambda}}x\right)\geqslant 0.0001x \tag{36}$$

(ii) $(n,\tilde{r})>x^{\frac{\lambda}{2}}$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,\tilde{r})>x^{\frac{\lambda}{2}}}}1\leqslant\sum_{\substack{d\mid\tilde{r}\\d>x^{\frac{\lambda}{2}}}}\sum_{\substack{n\leqslant x\\d\mid n}}1\leqslant x^{1-\frac{\lambda}{2}}d(\tilde{r})\leqslant x^{1-\frac{\lambda}{2}+\varepsilon} \tag{37}$$

(iii) $1<(n,\tilde{r})\leqslant x^{\frac{\lambda}{2}}\prod_{p\mid\tilde{r},p\nmid n}(p-2)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$

由注释①中引理4.1,有 $\mu\left(\frac{\tilde{r}}{(4,\tilde{r})}\right)=0$, 因而 $16\nmid\tilde{r}$, $p^2\nmid\tilde{r}(p>3)$. 但

$$\prod_{p\mid\tilde{r},p\nmid n}(p-2)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$$

所以

$$\tilde{r}\leqslant 16\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2(n,\tilde{r})\leqslant x^{\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)}$$

由式㉟可得到

$$R_1(n)\geqslant nG(n)-|G(n)\tilde{I}(n)|-\frac{n}{\varphi(n)}\left(8x^{\frac{1}{2}}W(\log^{10}x)+\frac{10.41W^2(Y)}{\sqrt{6}}+\frac{20.82W^2(Y,\tilde{r})x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}+\varepsilon W(Y)x^{\frac{1}{2}}+O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}W(Y)}{\log^6x}\right)+O(x^{1-\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2}\varepsilon})\right) \tag{38}$$

① Montgomery H L, Vaughan R C. Acta Arith, 1975, 27: 353-370.

容易证明

$$nG(n)-|\widetilde{\mathscr{G}}(n)\tilde{I}(n)|\geqslant 0.651e^{-\frac{1}{0.45}}\tilde{\delta}x\log x\frac{n}{\varphi(n)}$$

因此,由此及式㉜～㉟和㊳,推出

$$R_1(n)\geqslant(0.0705-0.0485-0.002)\frac{n}{\varphi(n)}\tilde{\delta}x\log x\geqslant 0.001x^{1-0.25\lambda-0.5\varepsilon}\quad ㊴$$

由式㊱,㊲,㊴及引理8,定理即可得证.

6 哥德巴赫数[①②]

——姚琦　楼世拓

表为两个奇素数之和的偶数称为哥德巴赫数.很多数学工作者研究了对于怎样的数 $\eta(\eta\geqslant 0)$,当 $h\geqslant x^{\eta}$ 时区间 $(x-h,x+h]$ 必含有哥德巴赫数.本文应用筛法余项的新的估计式证明了以下主要结果:

当 $h\geqslant x^{245/5088}$ 时,区间 $(x-h,x+h]$ 中必含有哥德巴赫数,这里 x 是充分大的正数.

6.1 序

我们将能表为两个奇素数之和的偶数称为哥德巴赫数.很多数学工作者研究了当 h 满足什么条件时区间中存在哥德巴赫数.即在什么条件下存在两个奇数 p_1 和 p_2 成立

$$|x-p_1-p_2|<2h\quad ①$$

当 $h=1$ 时,上述命题即著名的哥德巴赫猜想.

华罗庚[③]指出:应用 Ingham 的相继素数定理可以得到当

$$h\geqslant x^{25/64+\varepsilon}$$

时式①成立.用 $N(\sigma,T)$ 表示 Riemann－ζ 函数满足 $|t|\leqslant T$, $|\beta|\geqslant\sigma$ 的零点 $\beta+\mathrm{i}t$ 的个数,若存在一个常数 c,在 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 时一致地成立

$$N(\sigma,T)\ll T^{c(1-\sigma)}\log^{A}T\quad ②$$

潘承洞[④]证明了当 $h\geqslant x^{1-\frac{2}{c}+\varepsilon}$ 时式①成立.Montgomery 和 Vaughan[⑤]及 Ramachandra[⑥]都证明了当

① 本文1982年7月2日收到.
② 载于《数学年刊》1986年第7卷A辑.
③ 华罗庚.指数和的估计及其在数论中的应用,科学出版社,1963.
④ 潘承洞.堆垒素数论的一些新结果,数学学报,1959,9(3):264-269.
⑤ Montgomery, H. L. and Vaughau, R. C., The exceptional set in Goldbach's problem, Acta Arith. XXVII, 1975:353-370.
⑥ Ramachandra, K., Two remarks in prime number theory, Bull Soc. Math. France, 1977,105:433-437

$$h \geqslant x^{(1-\frac{1}{c})(1-\frac{2}{c})+\varepsilon} \qquad ③$$

时式 ① 成立. 由 Huxley①中给出当 $c \geqslant \frac{12}{5}$ 时式 ② 成立,从而得到当

$$h \geqslant x^{7/72+\varepsilon}$$

时式 ① 成立. 潘承洞②给出当

$$h \geqslant x^{7/72}\log^{c_1} x$$

(c_1 是常时) 时式 ① 成立.

在相关注释③中作者得到:当 $y \geqslant x^{\xi}, \xi \geqslant 35/64$ 时成立

$$\pi(x) - \pi(x-y) > c_2 \frac{y}{\log x} \qquad ④$$

这里 c_2 是正常数. 本文证明了.

定理 1 当 $h \geqslant x^{\eta}, \eta > 245/5\,088(=\frac{14}{159} \times \frac{35}{64})$ 时式 ① 成立. 与式 ② 相比较,若令 $\left(1-\frac{1}{c}\right) = \frac{35}{64}$,则

$$\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{2}{c}\right) = \frac{105}{2\,048} > \frac{245}{5\,088}$$

定理 1 是用式 ③ 和下列定理得到的.

定理 2 当 $h \geqslant y^{\theta}, \theta > 14/159$ 时成立

$$\pi(y) - \pi(y-h) \geqslant c_1 \frac{h}{\log y} + R' \qquad ⑤$$

其中

$$\int_Y^{2Y} (R')^2 \mathrm{d}y \ll h^2 Y \log^{-(4+\varepsilon)} Y$$

6.2 问题的转化

本文仅需证明定理 2. 当 p 是素数时,记

$$P(z) = \prod_{p<z} p, V(z) = \prod_{p<z}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

对于有限集合 $\mathscr{A} = \{n \mid y \geqslant n > y-h\}$,记

$$\mathscr{A} = \{n \in \mathscr{A}; d \mid n\}$$

$$S(\mathscr{A}, z) = |\{n \in \mathscr{A}; (n, P(z)) = 1\}|$$

这里 y 是实数满足 $Y < y \leqslant 2Y$, Y 是充分大的正数. 不失一般性取 $h = \theta_2 y$, $\theta_2 = \frac{1}{2} Y^{\theta-1}, \theta > 14/159, T = Y^{1+2\eta} h^{-1}, t_0 = \log T/\log Y, z = Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}, z_1 =$

① Huxley, M. N., On the difference between consecutive primes, Invent. Math., 1972, 15:164-170.
② 潘承洞. 哥德巴赫数. 科学通报(数理化专辑), 1980, Ⅱ.
③ 楼世拓, 姚琦. 相邻素数差. 自然杂志, 1984, 7(9):713.

$Y^{\frac{1}{4}}$, $D = D(p)$ 在6.4中给出. $z \leqslant D$. p, q 表示素数, η, ϵ 是适当的正常数,而且在下文中不一定代表同一个数.我们有

$$\pi(y) - \pi(y-h) = S(\mathscr{A}, y^{1/2}) = S(\mathscr{A}, z) - \sum_{z \leqslant p < y^{1/2}} S(\mathscr{A}_p, p) =$$

$$S(\mathscr{A}, z) - \sum_{z \leqslant p < z_1} S(\mathscr{A}_p, p) - \sum_{z_1 \leqslant p < y^{1/2}} S\left(\mathscr{A}_p, \left(\frac{D}{p}\right)^{1/3}\right) +$$

$$\sum_{\substack{(D/p)^{1/3} \leqslant q < p \\ z_1 \leqslant p < y^{1/2}}} S(\mathscr{A}_{pq}, p) = \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3 + \Sigma_4 \qquad ⑥$$

我们仅需证明

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_i \geqslant A_i \dfrac{h}{\log Y} + R_i, i = 1,4 \\ \Sigma_j \leqslant A_j \dfrac{h}{\log Y} + R_j, j = 2,3 \\ A_1 - A_2 - A_3 + A_4 > 0 \\ \displaystyle\int_Y^{2Y} R_i^2 \mathrm{d}y \ll h^2 Y \log^{-(4+\epsilon)} Y, 1 \leqslant i \leqslant 4 \end{array}\right\} \qquad ⑦$$

Iwaniec①给出

引理 1① 设 $z \geqslant 2$, $D \geqslant z^2$ 及 $\varepsilon > 0$,则

$$S(\mathscr{A}, z) \leqslant hV(z)\{F(s) + E\} + R^+(D)$$

$$S(\mathscr{A}, z) \geqslant hV(z)\{f(s) - E\} - R^-(D)$$

这里 $s = \log D / \log z$, $E = c\varepsilon + O((\log D)^{-1/3})$, $F(s)$, $f(s)$ 定理见相关文献②.

$$R^{\pm}_{(D)} = \sum_{(D)} \sum_{\nu < D^{\epsilon}}{}' c_{(D)}(\nu, \varepsilon) \sum_{D_i \leqslant p_i < D_i^{1+\epsilon^7}}{}' r(\mathscr{A}, \nu p_1, \cdots, p_r) \qquad ⑧$$

$$r(\mathscr{A}, d) = \left[\frac{y}{d}\right] - \left[\frac{y-h}{d}\right] - \frac{h}{d}$$

其中(D)是关于 $D_1, \cdots, D_r$ 求和.数列$\{D_i, i = 1, \cdots, r\}$ 满足 $D_1 \geqslant D_2 \geqslant \cdots \geqslant D_r$. $\{D_i\}$ 取遍$\{D^{\epsilon^2(1+\epsilon^7)^n}, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 所有子序列(包括空子列)且满足在 $\mathbf{R}^+$ 中成立

$$D_1 \cdots D_{2l} D_{2l+1}^3 \leqslant D, 0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}(r-1) \qquad ⑨$$

在 R^- 中还满足

$$D_1 \cdots D_{2l-1} D_{2l}^3 \leqslant D, 0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2} r \qquad ⑩$$

---

① Iwaniec, H., A new form of the error term in the linear sieve, Acta Math., 1980, 37: 307-320.
② Halberstam, H. and Richet, H. E., Sieve methods, Academic Press, 1974.

式 ⑧ 中 $\sum'$ 表示关于 $\nu, p_i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 求和，其限制条件为

$$\nu \mid P(D^{\varepsilon^2}), p_i \mid P(z) \qquad ⑪$$

系数 $c_{(D)}^{\pm}(\nu,\varepsilon)$ 仅决定于 ν, ε 及符号 $+, -$，且满足 $|c_{(D)}^{\pm}(\nu,\varepsilon)| \leqslant 1$.

6.3 一类 Dirichlet 级数的和式估计

设 $R(y;M_1,\cdots,M_k) = \sum\limits_{\substack{M_i \leqslant m_i < 2M_i \\ 1 \leqslant i \leqslant k}} a_{m_1}^1,\cdots,a_{m_k}^k r(\mathscr{A};M_1,\cdots,M_k)$，这里 $|a_{m_i}^i| \leqslant 1$. 由 $R^{\pm}$ 的定义及式 ⑦，我们应估计

$$R'_0(Y;M_1,\cdots,M_k) = \int_Y^{2Y} R^2(y;M_1,\cdots,M_k)\mathrm{d}y$$

为方便起见，当 m_i 不属于 $[M_i,2M_i)$ 时，令 $a_{m_i}^i = 0(1 \leqslant i \leqslant k)$. 记

$$L = \frac{Y}{2\prod\limits_{i=1}^{k} M_i}, L(s) = \sum_{\frac{1}{2^k}L \leqslant l < 3L} l^{-s}$$

$$M_i(s) = \sum a_{m_i}^i m_i^{-s}, g(s) = L(s)\prod_{i=1}^{k} M_i(s)$$

则

$$\sum_{\substack{lm_1\cdots m_k \in \mathscr{A} \\ L/2^k < l \leqslant 3L}} a_{m_1}^1 \cdots a_{m_k}^k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}T}^{c+\mathrm{i}T} g(s)\frac{y^s - (y-h)^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{Y^{1+\eta}}{T}\right)$$

这里 $c = 1 + 1/\log Y$，取 $T_0 = L^{1/2}$ 即得

$$R(y;M_1,\cdots,M_k) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left(\int_{c-\mathrm{i}T}^{c-\mathrm{i}T_0} + \int_{c+\mathrm{i}T_0}^{c+\mathrm{i}T}\right) g(s)\frac{y^s - (y-h)^s}{s}\mathrm{d}s + O(Y^{\theta-\eta})$$

$$R'_0(Y;M_1,\cdots,M_k) = -\frac{1}{4\pi \mathrm{i}}\int_Y^{2Y}\left|\left(\int_{c-\mathrm{i}T}^{c-\mathrm{i}T_0} + \int_{c+\mathrm{i}T_0}^{c+\mathrm{i}T}\right) g(s)\frac{y^s - (y-h)^s}{s}\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}y + O(Y^{1-2\theta-\eta})$$

我们将上式右端的积分区域分成不超过 $(4\log x)^2$ 个，即把上面式子表示为不超过 $(4\log x)^2$ 个如下积分的和，即

$$R''_0(Y;M_1,\cdots,M_k;T_1,T_2) = \int_Y^{2Y}\left(\int_{c+\mathrm{i}T_1}^{c+2\mathrm{i}T_1} g(s_1)\frac{y^{s_1} - (y-h)^{s_1}}{s_1}\mathrm{d}s_1\right) \cdot \overline{\left(\int_{c+\mathrm{i}T_2}^{c+2\mathrm{i}T_2} g(s_2)\frac{y^{s_2} - (y-h)^{s_2}}{s_2}\mathrm{d}s_2\right)}\mathrm{d}y$$

这里 $s_j = c + \mathrm{i}t_j, j = 1,2, T_1 \ll T, T_2 \ll T$. 我们有

$$R''_0(Y;M_1,\cdots,M_k;T_1,T_2) = \int_Y^{2Y}\int_{c+\mathrm{i}T_1}^{c+2\mathrm{i}T_1}\int_{c+\mathrm{i}T_2}^{c+2\mathrm{i}T_2} g(s_1)\overline{g(s_2)}\frac{y^{s_1} - (y-h)^{s_1}}{s_1} \cdot \overline{\left(\frac{y^{s_2} - (y-h)^{s_2}}{s}\right)}\mathrm{d}s_1\overline{\mathrm{d}s_2}\mathrm{d}y =$$

$$\int_{c+iT_1}^{c+2iT_1}\int_{c+iT_2}^{c+2iT_2} g(s_1)g(s_2)\frac{1-(1-\theta_2)^{s_1}}{s_1}\cdot \frac{\overline{[1-(1-\theta_2)^{s_2}]}}{s_2}\left(\frac{Y^{s_1+\bar{s}_2+1}}{1+s_1+\bar{s}_2}\right)\Bigg|_Y^{2Y} ds_1\,\overline{ds_2}+O(Y^{1+2\theta-\eta})$$

我们可以选到点集 $E=\{t_1,\cdots,t_r\}$ 及 $E'=\{t_1',\cdots,t_s'\}$，其中 $T_1\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_r\leqslant 2T_1, t_{j+1}-t_j\geqslant 1, T_2\leqslant t_1'<t_2'<\cdots<t_r'\leqslant 2T_2. t'_{j+1}-t_j'\geqslant 1$，则

$$R'_0(Y,M_1,\cdots,M_k)\ll Y^{1+2\theta-\eta}+(\log^2 Y)Y^{1+2\theta}\sum_{t_j\in E}\sum_{t_j'\in E'}\frac{|g(c+it_j)||g(c+it_j')|}{1+|t_j-t_j'|}\ll$$
$$Y^{1+2\theta-\eta}+(\log^3 Y)\cdot Y^{1+2\theta}\left(\sum_{t_j\in E}|g(c+it_j)|^2+\sum_{t_j'\in E'}|g(c+it_j')|^2\right)$$

由以上讨论可见，欲证式 ⑦ 中第 4 式仅需证明

$$R'_0(Y,M_1,\cdots,M_k)\ll Y^{1+2\theta-\eta}$$

引理 2　当 $Y^{\varepsilon}<M_1<Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}, M_1M_2<Y^{1-\varepsilon}$ 时成立

$$R'_0(Y,M_1,M_2)\ll Y^{1+2\theta-\eta} \tag{12}$$

证明　考虑和式

$$\sum_{t_r\in E}|g(c+it_r)|^2=\sum_{t_r\in E}N_1(c+it_r)N_2(c+it_r)N_3(c+it_r)$$

其中 $c=1+1/\log Y, N_1(s)=M_1(s), N_2(s)=M_2(s)L(s), N_3(s)=M_1(s)M_2(s)L(s)$. 记 $N_1=M_1, N_2=M_2L, N_3=M_1M_2L$，则 $N_1N_2N_3=Y^2/4$. 和式关于满足 $N_j(c+it_r)\leqslant Y^2N_i^{1/2-c}$ 的点 t_r 求和，显然满足式 ⑫. 将余下来的 t_r 分成至多不超过 $O(\log^3 Y)$ 个点集 $S(U_1,U_2,U_3)$. 在 $S(U_1,U_2,U_3)$ 中的点 t_r 满足

$$U_j\leqslant N^{c-1/2}|N_j(c+it_r)|<2U_j, j=1,2,3 \tag{13}$$

这里 $Y^{-2}\leqslant N_j^{1/2-c}U_j\leqslant 2^{-u}\leqslant 1$，对于某整数 u，则

$$\sum_{t_r\in E}|g(c+it_r)|^2\ll Y^{-1}U_1U_2U_3|S(U_1,U_2,U_3)|\log^A Y$$

其中 A 为适当的常数.

用 Montgomery[①]完全一样的方法及 $T\leqslant N_3$，可得

$$S(U_1,U_2,U_3)\ll U_3^{-2}N_3\log^A Y$$
$$S(U_1,U_2,U_3)\ll U_2^{-2}(N_2+T)\log^A Y$$
$$S(U_1,U_2,U_3)\ll U_2^{-10}(N_1^5+T)\log^A Y$$

① Montgomery, H. L., Topic in multiplicative number theory, Berlin-Heidburg, New York, 1971.

又由 Huxley①的方法可得

$$S(U_1,U_2,U_3)\ll(U_2^{-2}N_2+U_2^{-6}N_2T)\log^AY$$

$$S(U_1,U_2,U_3)\ll(U_1^{-10}N_1^5+U_1^{-30}N_1^5T)\log^AY$$

我们仅需讨论 F 的估计，F 满足

$$F=\min\{U_3^{-2}N_3,U_2^{-2}(N_2+T),U_1^{-10}(N_1^5+T),$$
$$U_2^{-2}N_2+U_2^{-6}N_2T,U_1^{-10}N_1^5+U_1^{-30}N_1^5T\}$$

当 $F\leqslant 2U_2^{-2}N_2$ 时，因为总可以找到正整数 k，使 $N_1^k>T$，则由 Montgomery②可得

$$S(U_1,U_2,U_3)\ll U_1^{-2k}N_1^k\log^AY$$

故 $F\leqslant 2U_1^{-2k}N_1^k$. 于是

$$F\ll(U_3^{-2}N_3)^{\frac{1}{2}}(U_1^{-2k}N_1^k)^{\frac{1}{2k}}(U_2^{-2}N_2)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}\ll(U_1U_2U_3)^{-1}YU_2^{\frac{1}{k}}N_2^{-\frac{1}{2k}}$$

由 Titchmarsh③可见：由 $L>Y^\varepsilon$ 知存在 $\delta>0$ 满足 $U_2\ll N_2^{1/2}Y^{-\delta}$，即得 $F\ll(U_1U_2U_3)^{-1}Y^{1-\delta}$. 可见式 ⑫ 成立.

当 $F\geqslant 2U_2^{-2}N_2$ 时，若同时成立 $F\leqslant 2U_1^{-10}N_1^5$，则

$$\begin{aligned}F&\ll\min\{U_3^{-2}N_3,U_2^{-2}T,U_2^{-6}N_2T,U_1^{-10}N_1^5\}\ll\\&(U_3^{-2}N_3)^{1/2}(U_1^{-10}N_1^5)^{1/10}(U_2^{-2}T)^{7/20}(U_2^{-6}N_2T)^{1/20}\ll\\&(U_1U_2U_3)^{-1}N_1^{1/2}N_3^{1/2}N_2^{1/20}T^{2/5}\ll\\&(U_1U_2U_3)^{-1}Y^{1/10}(N_1N_3)^{9/20}T^{2/5}\ll\\&(U_1U_2U_3)^{-1}Y^{11/20}N_1^{9/20}T^{2/5}\end{aligned}$$

由假设 $N_1^{9/20}T^{2/5}\ll Y^{(1-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon)\frac{9}{20}+\frac{2}{5}t_0}\ll Y^{\frac{9}{20}-\varepsilon}$，可见式 ⑫ 成立.

又当 $F\geqslant 2U_2^{-2}N_2$ 及 $F\geqslant 2U_1^{-10}N_1^5$ 时，由

$$F\leqslant U_1^{-10}(N_1^5+T)$$

可知 $N_1^5<T$. 又此时必成立 $F\leqslant 2U_1^{-30}N_1^5T$. 故得

$$\begin{aligned}F&\ll(U_3^{-2}N_3)^{1/2}(U_2^{-6}N_2T)^{1/60}(U_2^{-2}T)^{27/60}(U_1^{-30}N_1^5T)^{1/30}=\\&(U_1U_2U_3)^{-1}N_3^{1/2}N_2^{1/60}N_1^{1/6}T^{1/2}\ll\\&(U_1U_2U_3)^{-1}Y^{31/60}N_1^{3/20}T^{1/2}\end{aligned}$$

由 $N_1^{3/20}T^{1/2}\ll T^{1/2+3/100}\ll Y^{29/60-\varepsilon}$. 在以下各引理中，我们将 M_1,M_2,M_3,L, M_1,M_2,M_3,L 分成三组，且满足 $L>Y^\varepsilon$ 以及至少有一个 L 属于第二或第三组. 每一组的乘积分别记为 N_1,N_2,N_3. 这些引理的证明方法与引理 2 类似，故从略.

---

① Huxley, M. N., On the difference between consecutive primes, Invent. Math., 1972, 15: 164-170.
② Montgomery, H. L., Topic in multiplicative number theory, Berlin-Heidburg, New York, 1971.
③ Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann Zeta-function, Oxford 1951.

引理 3　设 $N_1 > Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}, N_2 > T, N_1N_2 < Y^{2-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}$，则

$$R'_0(Y;M_1,M_2,M_3) \ll Y^{1+2\theta-\eta} \tag{14}$$

引理 4　设 $N_1 > Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}, N_2 \leqslant T, N_3 \leqslant N_2, N_1N_2 \ll Y^{2-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}$，且记 $a = \log N_1/\log Y, b = \log N_3/\log Y$，满足

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{20}b + \frac{9}{10}t_0 < 1 \tag{15}$$

则

$$R'_0(Y;M_1,M_2,M_3) \ll Y^{1+2\theta-\eta} \tag{16}$$

由引理 4 直接得到

系　若

$$Y^{2-\frac{36}{19}t_0} > N_1 > Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}, N_3 \leqslant N_2 < T, N_1N_2 \ll Y^{2-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}$$

则式⑯成立.

引理 5　设 $N_1 > Y^{\frac{t_0}{4}}, N_2 > T, N_1N_2 \ll Y^{2-\frac{6}{7}t_0-\varepsilon}$，则式⑯成立.

引理 6　设 $M_1M_2 < Y^{1-\frac{4}{9}t_0-\varepsilon}, M_1 > Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\varepsilon}, M_1M_2^2 > T, M_1M_2M_3 < Y^{1-\varepsilon}$，则式⑯成立.

引理 7　若 $\prod_{i=0}^{r} D_i < Y^{1-\frac{t_0}{2}-\varepsilon}, M_1 = \prod_{i=0}^{r} D_i$，则

$$R'_0(Y;M_1) \ll Y^{1+2\theta-\eta}$$

6.4　$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 的估计

定义 1　设 $D_0,D_1,\cdots,D_r$ 是一组实数，满足 $D_0 \geqslant D_1 \geqslant \cdots \geqslant D_r$，且 $D_0,\cdots,D_{2l}D_{2l+1}^3 \leqslant D(2l+1 \leqslant r)$，则称 $\{D_i\}$ 是 $D_0 - D$ 许可的数组.

定义 2　设 $\{D_i\}$ 为 $D_0 - D$ 许可的数组，将 $\{D_i\}$ 分成 k 组，其乘积分别为 $M_1,M_2,\cdots,M_k$，且满足

$$R'_0(Y;M_1,\cdots,M_k) \ll Y^{1+2\theta-\eta} \tag{17}$$

则称 $\{D_i\}$ 为 θ 许可.

注意到 Σ_2 和 Σ_3 的余项形为 $\sum_{z_0 \leqslant p \leqslant Y^{1/z}} R^+(D)$，将这个和式化为 $\sum_{D_0 \leqslant p \leqslant D_0^{1+\varepsilon^7}} R^+(D)$ 的和，而 $z_0 \leqslant D_0 \leqslant Y^{1/2}$. Σ_1 的余项是 $R^-(D)$，用 $D_{i-1}(i = 1,\cdots,\zeta)$ 来代替 D_i 即可. 欲证 R_1,R_2 和 R_3 满足式⑦，仅需证明每一个 $D_0 - D$ 许可数组 $\{D_i\}$ 必为 θ 许可.

若 $\prod_{i=0}^{r} D_i < Y^{1-\frac{t_0}{2}-\varepsilon}$，由引理 7 知 $\{D_i\}$ 为 θ 许可，故在本节中我们仅讨论满

足

$$\prod_{i=0}^{r} D_i \geqslant Y^{1-\frac{t_0}{2}-\epsilon} \qquad ⑱$$

的 $D_0 - D$ 许可数组 $\{D_i\}$，其中 $D = D(D_0)$ 由引理 8 ~ 16 给出. 又由 $D_0 \leqslant 2Y^{1/2} < Y^{1-\frac{t_0}{2}-2\epsilon}$，由式⑱可见必成立 $\prod_{i=0}^{r} D_i > Y^{2\epsilon}$. 当 $r = 0$ 时，易见 $\{D_i\}$ 必为 θ 许可. 下面仅需讨论 $\prod_{i=0}^{r} D_i > Y^{2\epsilon}$，也就是 $D_1 > Y^{\epsilon}$ 的情形.

引理 8 若 $D_0 \leqslant Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\epsilon}$，$D(D_0) = D^{(1)} = Y^{1-\epsilon}$，则 $D_0 - D^{(1)}$ 许可数组 $\{D_i\}$ 为 θ 许可.

证明 若 $D_0 > Y^{\epsilon}$，取 $M_1 = D_0$，$M_2 = \prod_{i=1}^{r} D_i$，由引理 2 得证. $D_0 \leqslant Y^{\epsilon}$，由式⑱可以找到 i_0，$0 < i_0 < r$，满足 $Y^{2\epsilon} \leqslant \prod_{i=0}^{r} D_i > Y^{\epsilon}$. 取 $M_1 = \prod_{j=0}^{i_0} D_j$，$M_2 = \prod_{j=i_0+1}^{r} D_j$ 由引理 2 得证.

引理 9 若 $Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\epsilon} \leqslant D_0 < Y^{\frac{1}{3}-\frac{4}{2}t_0-\epsilon}$，则 $D - D^{(1)}$ 许可数组 $\{D_i\}$ 为 θ 许可.

证明 由于 $D_3 \leqslant (D/D_0)^{1/5} < Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\epsilon}$，由引理 2 仅需考虑 $\prod_{i=3}^{r} D_i < Y^{\epsilon}$ 的情形(以下各引理也是这样). 据式⑱及 $D_0D_1 < Y^{1-\frac{t_0}{2}-2\epsilon}$ 可知 $D_2 > Y^{\epsilon}$，又由引理 2 知仅需考虑 $D_2 \geqslant Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\epsilon}$. 取 $N_1 = D_2$，$N_2 = D_0^2D_1^2D_2$，用引理 3 即证得本引理结论.

引理 10 若 $Y^{\frac{1}{3}-\frac{4}{27}t_0-\epsilon} \leqslant D_0 < Y^{\frac{16}{27}t_0-\frac{1}{3}+\epsilon}$，$D(D_0) = D^{(2)} = Y^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}t_0-\frac{1}{2}\theta_0}$，而 $\theta_0 = \log D_0/\log Y$，则 $D_0 - D^{(2)}$ 许可数组 $\{D_i\}$ 为 θ 许可.

证明 易见 $D_2 > Y^{\epsilon}$，在引理 3 中取 $N_1 = D_2$，$N_2 = D_0^2D_1^2D_2$ 即得证.

引理 11 若 $Y^{\frac{16}{27}t_0-\frac{1}{3}+\epsilon} \leqslant D_0 < Y^{\frac{2}{5}-\frac{8}{45}t_0-\epsilon}$，则 $D_0 - D^{(1)}$ 许可数组 $\{D_i\}$ 为 θ 许可.

证明 仅需讨论 $D_2 \geqslant Y^{1-\frac{8}{9}t_0-\epsilon}$，$\prod_{i=3}^{r} D_i < Y^{\epsilon}$ 的情形. 当 $D_0^2D_1^2 \leqslant T$ 时由引理 3 知结论成立；当 $D_0^2D_1^2 \leqslant T$ 时由引理 4 及系知本引理成立.

引理 12 若 $Y^{\frac{2}{5}-\frac{8}{45}t_0-\epsilon} \leqslant D_0 < Y^{\frac{2}{5}-\frac{6}{35}t_0-\epsilon}$，则 $D_0 - D^{(1)}$ 许可数组 $\{D_i\}$ 为 θ 许可.

证明 由于 $D_0 > T^{1/4}$,当 $D_0D_1^2D_2 > T$ 时由引理5,当 $D_0D_1^2D_2 \leqslant T$ 时由引理3及引理4知结论成立.

引理13 若 $Y^{\frac{2}{5}-\frac{6}{35}t_0-\varepsilon} \leqslant D_0 < Y^{\frac{18}{35}t_0-\frac{1}{5}}$,$D(D_0) = D^{(3)} = Y^{\frac{3}{2}-\frac{9}{14}t_0+\frac{1}{4}\theta_0-\varepsilon}$,则 $D_0 - D^{(3)}$ 许可数组$\{D_i\}$为 θ 许可.

证明 易知仅需讨论 $D_2 > Y^{\varepsilon}$ 的情形.故当 $D_0D_1^2D_2 > T$ 时由引理5,当 $D_0D_1^2D_2 \leqslant T$ 时由引理3及4得证.

引理14 若 $Y^{\frac{18}{35}t_0-\frac{1}{5}} \leqslant D_0 < Y^{1-\frac{2}{3}t_0-\varepsilon}$,则 $D_0 - D^{(1)}$ 许可数组$\{D_i\}$为 θ 许可.

证明 由于 $D_0D_1 \leqslant D_0(D/D_0)^{\frac{1}{3}} \ll Y^{1-\frac{4}{9}t_0-3\varepsilon}$,当 $\prod_{i=2}^{r} D_i < Y^{\varepsilon}$ 时由引理2,3及4知结论成立;当 $\prod_{i=2}^{r} D_i \geqslant Y^{\varepsilon}$ 时,由引理3,4及5知$\{D_i\}$为 θ 许可.

引理15 若 $Y^{1-\frac{2}{3}t_0-\varepsilon} \leqslant D_0 < Y^{\frac{4}{9}t_0+\varepsilon}$,$D = D(D_0) = D^{(4)} = Y^{3-\frac{4}{3}t_0-\varepsilon}D_0^{-2}$,则 $D_0 - D^{(2)}$ 许可数组$\{D_i\}$为 θ 许可.

证明 由 $D_0D_1 \leqslant Y^{1-\frac{4}{9}t_0-\varepsilon}$,故由引理3知$\{D_i\}$为 θ 许可.

引理16 若 $Y^{\frac{4}{9}t_0+\varepsilon} \leqslant D_0 \leqslant Y^{\frac{1}{2}}$,则 $D_0 - D^{(1)}$ 许可数组$\{D_i\}$为 θ 许可.

证明 由引理2及3即可得证.

Heath-Brown 和 Iwaniec①已经指出 R_i 可以表为 R'_0 的形式.引理8 ~ 16证明了当 $D = D(D_0)$($D(D_0)$已由各引理给定)时 R_i 满足式⑦.应用筛法②估计得

$$A_1 - A_2 - A_3 > -0.018\,979 \tag{19}$$

6.5 加权密度筛法

引理17 若 $\tau^{\frac{16}{5}}Y_1^{-2} \leqslant M^2 \leqslant Y_1^2\tau^{-\frac{5}{6}}$,则

$$\sum_{\substack{\beta \geqslant \sigma, |\gamma| \leqslant \tau \\ \beta_1 \geqslant \sigma_1, |\gamma_1| \leqslant \tau}} \frac{M(\rho)M(\rho_1)}{1 + |\rho - \rho_1|} \ll Y_1^{2-\sigma-\sigma_1}(\log Y_1)^c \tag{20}$$

这里 $\rho = \beta + i\gamma$,$\rho_1 = \beta_1 + i\gamma_2$ 是 $\zeta(s)$ 的零点,$\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1$,$\frac{1}{2} \leqslant \sigma_1 < 1$,$c$ 为某常数.

证明 由 Cauchy 不等式及注释① 中引理5.4,以 M^2 代替 M;以 Y^2 代替 X

---

① Heath-Brown, D. R. and Iwaniec, H., On the difference between consecutive primes, Invent, Math., 1979,55:49-69.

② Halberstam, H. and Richet, H. E., Sieve methods, Academic Press, 1974.

可得

$$\sum_{\beta \geqslant \sigma, |\gamma| \leqslant \tau} |M(\rho)|^2 \ll Y_1^{2(1-\sigma)} \log^A Y$$

$$\sum_{\beta_1 \geqslant \sigma_1, |\gamma_1| \leqslant \tau} |M(\rho_1)|^2 \ll Y_1^{2(1-\sigma_1)} \log^A Y$$

即可证得式⑳.

同样地,用注释①中引理 5.5 ~ 5.7 可以得到

引理 18 设 $\tau^{\frac{18}{5}} x^{-\frac{8}{5}} \leqslant M^2 N^2 \leqslant x^2, M^2 N^{-\frac{5}{2}} \leqslant x^2 \tau^{-\frac{9}{4}}$ 及 $M^{-\frac{5}{2}} N^2 \leqslant x^2 \tau^{-\frac{9}{4}}$,则式⑳对于 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1, 0 \leqslant \sigma_1 \leqslant 1$ 一致地成立.

应用上述引理可以证明 R_4 满足式⑦,再用筛法估计得

$$A_4 > 0.03 \qquad ㉑$$

于是由式⑲,㉑得

$$A_1 - A_2 - A_3 + A_4 > 0.03 - 0.019 = 0.011$$

式⑦证毕.定理 2 得证.

① Heath-Brown, D. R. and Iwaniec, H., On the difference between consecutive primes, Invent, Math., 1979, 55: 49-69.

第三部分

数论英雄——陈景润



自述与回忆

第十一章

1 我的心里话①

——陈景润

许多人都知道我在攻克哥德巴赫猜想这一数学堡垒中取得了一点成绩，却很少有人知道我这个对生活一窍不通的人心里想的是什么.这次借工人日报一角，向全国关心我的同胞们说几句话.

在家里，我排行老三.母亲生了12个孩子，只有6个存活下来.解放前，父母终日为生活奔波.我从生下来那天起，似乎已经被宣布为不受欢迎的人，一个多余的孩子.在学校，我觉得自己像一只丑小鸭.有些学生见我瘦小，经常欺负我.可我心里明白，一个人真正的强壮与弱小不在于体格，而在于志气的高下.记得读高中时，我的数学教师讲了一件事：我国古籍《孙子算经》中一条余数定理是中国首创，后来传到西方，欧美人士对之非常尊崇，称誉为孙子定理.我萌发了一个念头，我将来能不能像前人孙子那样，在数学上搞出点名堂来，为祖国争点光呢？后来，老师又讲了哥德巴赫的故事.老师说，数学的皇冠是数论，哥德巴赫猜想则是这顶皇冠上的璀璨的明珠.老师当时还笑着说，我有一天夜里，梦见我的一个学生，证明了哥德巴赫猜想.同学们听

① 原载《工人日报》1989年12月18日.

罢都笑了．然而，我没有笑，也不敢笑，怕同学们猜破我心里的憧憬．但我永远记着这件事，记着那皇冠上的明珠和我的抱负与理想．

转眼20年过去了，英国和德国两位数学家合作的数学专著《筛法》正在编校．他们见到我研究的关于哥德巴赫猜想的(1+2)成果论文，十分惊诧，立即要求他们这部专著暂不付印，在书中加添了一章：陈氏定理．他们称这是"筛法的光辉顶点"．我的研究成果为祖国争了光，心中当然高兴万分．但我更不能忘记，在我遭到磨难的关键时刻，是党组织和同志们帮我改善了环境，驱走了病魔，在我的生命中注入了研究的活力，追求的活力，这才有(1+2)的面世啊！

我身体状况的来龙去脉是这样的：1953年，我被分配到北京一家中学当教师．由于肩上种种负荷过于沉重，患上了肺结核和腹膜结合症．一年内，住院6次，手术3次．由于母亲就死于肺结核，我担心身体由此彻底垮掉．就在这时，厦门大学校长王亚南教授得知我的处境，把我调回厦门大学工作．后来与华罗庚老师取得联系，我又调到中科院数学研究所．环境的改变，复活了我的数学生命．

1973年，世界数学在数论方面的三十多道难题中，我攻下了六七道难题，并初步取得了(1+2)的研究成果．但同时得到的是已入膏肓的身体，我的身心已经到了衰竭的地步．当数学所的李书记、周大姐春节前为我送来苹果时，我激动极了，春节后上班第一天，我把论文稿交给李书记，郑重地说："这是我的论文，我把它交给党！"

同年1月，我被送进医院．卫生部一位副部长亲自为我作全面检查，让我立即住院．我执意不肯，副部长拿出了毛主席对我身体问题的专门批示，我激动得热泪盈眶，马上同意住院治疗．住院期间，周总理还特意安排我参加第四届全国人民代表大会，并和我在一个小组开会讨论大事．会上，得知周总理已患重病时，我悲恸地哭了，几夜睡不着觉．我结婚以后，当时任第一副总理的邓小平同志亲自指示把我爱人调到北京工作，又指示解决好住房等生活方面的问题．

前几年，我又患了世界公认的疑难病——帕金森综合征．全身僵直，大小便失禁，完全失去了工作能力．中科院生物物理所的祝总骧教授和他的同事郝金凯教授对我体贴入微，免费为我治疗，使我基本上恢复了工作能力．他们说，是为了让我继续为祖国争光．我决不辜负领导同志和全国人民的期望．

2 于无声处响惊雷——悼念陈景润院士①

——中国科学院数学研究所

中国科学院院士、数学研究所一级研究员陈景润教授因长期患病，医治无

① 原载《光明日报》1996年4月15日．

效，于1996年3月19日与世长辞，终年63岁.我们全所同仁为失去一位杰出的同事和朋友，为我国失去一位科研功臣而万分痛惜.

1957年，我所老所长、数学大师华罗庚教授远见卓识，把陈景润调来数学所，并引导他迈进数论研究的前沿.在此后的十几年里，陈景润对解析数论的许多重要课题作了深入探究.他在华林问题、圆内和球内整点问题、算术级数中的最小素数问题、小区间中殆素数分布问题、三素数定理中的常数估计、孪生素数问题和哥德巴赫猜想的研究中，独立地获得了十几项重要成果.

陈景润饮誉国际数学界的代表作是他对哥德巴赫猜想的研究.他证明了每个充分大的偶数都是一个素数与不超过两个素数的乘积之和(简称为"1+2").1966年，他在《科学通报》宣布了这个结果(但未发表详细证明).1973年，《中国科学》发表了他的证明全文，立即引起国内外数学界的高度重视.人们公认陈景润的论文是哥德巴赫猜想研究的重要里程碑，是重要的数论方法——筛法理论的"光辉顶点".这项成果被誉为"陈氏定理"，载入美、英、法、苏、日等国的许多数论专著.随后，学者们在陈景润工作的基础上，至少给出了该定理的五个简化证明(数学史上一些重要定理往往被人们用各种不同的方式加以证明)，足见陈氏定理影响之广泛.在哥德巴赫猜想的研究领域，陈景润的"1+2"现在仍居世界领先地位，历30年而无人能够超越.

陈景润教授的成就是他用心血铸成的，是他刻苦攻读与钻研的结晶.陈景润的刻苦，用"一箪食，一瓢饮，在陋巷，人不堪其忧，回也不改其乐"来形容，再贴切不过了.我们清楚地记得他在20世纪五六十年代的情景.清晨，他从食堂打一壶开水，买几个馒头和一点小菜，匆匆回到他那6平方米的小屋(那时大家的居住条件都比较差)，一干就是一整天.傍晚，他收听对外英语广播，然后又干到深夜.有时停电，他就点着煤油灯看书.走进他的房间，除了见到一张木床、一个课桌、一把木椅，余下的就全是一堆一堆的草稿纸.他不看电影，不聊天，全部生活就是研究数学.

从20世纪70年代后期至20世纪80年代中期，他已是闻名全国的学者、全国人大代表.在参加一些重要会议时，他仍停不下手头的研究.为了不影响别人休息，他常常深夜到有灯光的走廊或厕所去看书.在住院治疗期间，他也从不间断自己的工作.医生给他扎针，他不让往右手扎，因为他要用右手写字.同志们去医院探望，都劝他暂时放一放手头的工作，他总是摇摇头.到了生命的后期，他已不能握笔，不能清晰地发声，但他仍用手势和含糊的语言，跟他的学生探讨数学问题.这需要何等的毅力！实际上，陈景润很早就疾病缠身，中关村医院在1963年就曾告诫过数学所的领导，要特别留意他的病情，以免发生他一人"死在房间里无人知道"的悲剧.

常人有时难以理解陈景润对数学的这种追求与迷恋，而恰恰是这种精神使

他登上了一座座数学的高峰.在他用筛法证明“1 + 2”之前,数论专家们曾普遍认为,要想沿用已有的方法(包括筛法)来证明“1 + 2”几乎是不可能的.而陈景润居然于无声处响惊雷,对筛法“敲骨吸髓”,加以改进,使其效力发挥得淋漓尽致,几乎到了极限的地步,从而震撼了数学界.

在数学王国里,陈景润是位思维清晰、逻辑严谨、勤奋至极的耕耘者.对数学的如痴如醉,使他少与别人交往,言行难免有不为人理解或不合时宜之处.这便有了关于他的怪僻的不少传闻(其中有些是人们想象出来而实际并不存在的“故事”).其实在日常生活中,他是一个朴素正直、谦虚谨慎、受人尊敬的人.

陈景润生活俭朴是闻名的,几十年如一日,跟他在科学上追求的高标准形成鲜明的对照.成名后,他的经济状况有了很大改善,朋友们劝他多花点钱好好保养身体,他总是说:“我的生活条件和医疗条件已经比贫下中农好得多了.”跟常人相比,他的生活标准是很低很低的.

他为人大度,对别人总是以礼相待,和气相处.对帮助过他的人,他的感激之情常流露于面,每每相见总要连声道谢.陈景润尤其忘不了导师华罗庚和举荐过他的王亚南、沈元等教授的知遇之恩,在他们生前,常去登门拜访问候.华罗庚铜像落成时,陈景润已重病住院,但他仍坐着轮椅参加了揭幕典礼.

陈景润的谦虚谨慎,更为学界称道.他一生取得多项重要成果,发表50多篇论文、4本著作,但他从未说过自己的工作达到了多高的水平,从来没有去争什么奖项.对他工作的高度评价都是其他专家做出的,他所获得的奖励都是组织上帮他申请的.工作自己做,评价由别人,这是他的哲学,反映了他对科学成果评价的严肃态度.

陈景润的影响是巨大的.早在60年代初,他的成绩就受到科学院领导的重视,被树为从事科研工作“安、钻、迷”的典型.但在“文化大革命”期间,他也经常成为批判所谓“白专道路”的靶子.

1973年春,毛泽东主席圈阅了一份反映陈景润工作成绩和健康状况的简报.当时正值“读书无用论”、“理论无用论”盛行,“白专”帽子满天飞的时代,一个“白专”典型竟受到毛泽东的关怀.被空头政治闹得沸沸扬扬的学界,突然冒出一个面壁20年做出大成绩的陈景润.这确实震撼了人们的心灵,对知识分子和青年学生回到课堂、回到教学与科研工作中去,起到了极大的推动作用.1974年,周恩来总理亲自推荐陈景润为第四届全国人大代表.1975年,邓小平同志针对有人说陈景润是“白专”典型,愤怒地说,什么“白专”典型,总比把着茅坑不拉屎的人强,并具体过问陈景润的工作与生活.粉碎“四人帮”以后,他成了为科学献身的传奇式人物,成为青少年学习的榜样.我们数学所曾收到上万封青年的来信,表达对他的崇敬与关心.

1982年,陈景润与王元、潘承洞一起荣获第二届全国自然科学一等奖.这

是我国对科学成果的最高奖励.在此之前,因数学方面成就获此殊荣的只有华罗庚教授和吴文俊教授.

陈景润教授自20世纪80年代后期病情逐渐加重,中央领导同志和有关部委的领导十分关心他的健康,多次前往探视.许多医院对他进行过精心的治疗和护理.全国各地不少人士为他的治疗献计献策.福建省两次邀他返乡疗养.这些充分显示了国人对他的关怀与爱护.

陈景润教授是默默地离去的,他没有留下任何遗言.但是,他为科学痴心奋斗的光辉一生,他所取得的卓越成就,给我们留下了宝贵的精神财富.

3 忆景润①

——潘承洞

景润离开我们已百日了,最后一次见到他是在华罗庚老师铜像揭幕式上,那时他已病重住院,但仍非要坐着轮椅来,由数学所老书记李尚杰同志推着,向自己的恩师表示敬爱与感激之情.一见到他,我思绪万千.仪式结束后,我怀着深深的敬意向他问好,祝愿他早日康复,他仍是像往常一样,反复不停地说着:"你好!谢谢老潘……"周围一片热闹声,我却感到万籁俱寂,伫立着目送他渐渐离去……自己近年亦多病,后来没能再去看望他.他去世前半年,病重的消息不断传来,我和大家一样,焦急地希望能有好的医疗条件,让他平静地生活下去,即使不能工作也好.希望不要……

3月19日晚王元同志电告我这一噩耗时,止不住地悲痛与震惊.新中国自己培养的一代青年、中年知识分子最杰出的代表永远离开我们了……

景润去世后,全国各界出自内心的哀悼是有点出乎意料的.这使我回忆起他的著名论文在1973年刚发表及以后的情景."每个大的偶数一定可表为一个素数与一个不超过两个素数乘积的数之和"——这就是国内外所说的陈景润定理——早在1965年他就证明了,并在"文化大革命"刚开始不久的"科学通报"上发表了摘要.这一成果的重大意义,当时国内只有少数几个数论工作者清楚.而国际数论界则根本不相信,有的甚至在书上公开声言这是不可能的.因为当时国际上许多最优秀的数论学家都在梦想证明它,而结果一无所获,一个无名的中国年轻人怎么能在最著名的一个数学猜想上做出这样的历史性成果呢?随着"文化大革命"开始,这件事也被人淡忘了.

在风刀霜剑相逼,人人自危,朝不保夕的日子里,我至今仍无法想象,景润

① 原载《大学生》1996年第10期.

是以怎样的信念、理想、勇气、毅力及机智巧妙的方式，不顾后果地把全身心倾注在自己的“初生婴儿”上，以汗水、泪水和血水浇灌培育她成长．终于在1972年年底进一步完善简化了命题的证明细节，并把厚厚的一叠全文送给他最信任的闵嗣鹤老师审阅．1973年，他的论文在《中国科学》上全文发表了．一经发表，在国际数学界立即引起巨大轰动，他们折服了．

在国内，这是一个什么样的年代啊！全国人民深深地陷于迷惘、压抑、困惑，感到无比愤怒，为祖国前途命运担忧．一石激起千层浪．他的论文——一项重大的历史性科学成就——经新闻媒介的迅速及时介绍，即刻得到全国各行各业——不仅是知识分子和学生——的最强烈反响和欢呼！他得到了人民的认可！陈景润——一时成了几乎家喻户晓的传奇式名字．这意味着什么呢？这是对“文化大革命”胡作非为的强烈抗议．一个没有科学，没有教育，没有文化，没有法制，没有民主，没有纪律，没有自由，不抓生产，不搞经济，处处落后于外的民族能生存下去吗？人民被压抑得透不过气来，陈景润的成就为他们扬眉吐气．特别是学生和年轻人，在昏暗迷惘之夜，血雨腥风之时，看到了一线光明；看到了一颗星星——陈景润就是榜样！在某种意义上可以这么说，“文化大革命”后的好几届大学生、研究生正是在陈景润这样的榜样的鼓舞下，投身科学文化事业的．正是他们以自己的优良素质与业务能力成为现在各条战线上的骨干力量，有的已经做出了杰出成就．我想这就是景润对国家与民族的贡献，他的广泛久远的影响已远远超出学术领域了．我记得1978年夏，和承彪在威海工作之余去刘公岛海军基地参观时，应邀向官兵们介绍景润的工作与哥德巴赫猜想，说的就是这层意思．

人民是不会忘记自己的英雄儿女的．从中央领导到普通老百姓一直十分关心景润的健康、工作、生活．今天，科教兴国的战略方针反映了全国人民共同的强烈愿望，人民需要和呼唤千千万万像景润一样成就杰出、无私奉献的人．不幸，他过早去世了，人们怎能不无比悲痛与深切怀念呢……

“十年磨一剑”，景润大概是在1962年前后开始研究哥德巴赫猜想的，到他的著名论文正式全文发表，正好十年．数论界一致公认这一成果在今后相当长的一段时期内仍是最好的．这是景润研究工作的一个显著特点．他总是精益求精，要做得比别人好，要尽可能地做得最好．因此，他的大多数研究成果总是很难被改进，在很长时间内是国际领先的，不少著名问题的成果在今天仍是最好的．尽管如此，他总是极其谦虚谨慎．我从未听见和听说过他夸耀(哪怕是一点点)自己的成果．在报告他的成果时，言语十分朴实，总是说哪些地方应该可以做得更好些，哪些我还没做出来．他的唯一标准是要彻底解决著名难题．他从未主动申请过什么奖，他得到的荣誉和奖励与他获得的成就相比实在是太少了．景润对别人，特别是他的学生的工作的评价，也是实事求是、十分严谨、科学的，

从不跟着"潮流"滥加赞扬.我想他的这种学风也是他取得成就的原因之一.这一点是特别值得我和大家学习的.因为在今天,"那种不埋头苦干专做嘶鸣的科学工作者"遍地皆是,这种会毁掉我们正在成长的队伍的不实事求是的不良学风到处盛行,即使在最著名的教学、科研单位也是这样.

景润喜欢一个人独自钻研,很少和别人讨论、合作研究.他和我各自分别研究不少相同的数论问题,他最后得到的结果大多数要比我的好.在共同的事业中,我们之间的友谊和信任日益加深.值得纪念的是,1980年我们共同合作研究发表了关于哥德巴赫数的例外集的论文,这是由他主动提出的,这大概是景润和同事仅有的一篇合作成果.

《大学生》杂志在景润去世后不久,要我写篇纪念文章,这也是我所想的.不平静的心情使我几次举笔又放下了.今天写下这几句以作纪念,与全国大学生们共勉之.

景润,安息吧!一代青年一定会以你为榜样,在实现祖国四化的伟大事业中顽强拼搏、无私奉献!

4 只有陈景润……

——林群

林群,中国科学院院士,中科院系统科学研究所研究员.

陈景润令我钦佩,因为他与常人不同,有超常的毅力、耐性和不惜代价的投人.

有很多事件说明这些,下面是我的一些记忆,未必准确,但大意不会错.

大约在1963年,数学所办公楼里,陈问:"一个十阶行列式,怎么知道它一定不等于零呢?在一篇别人的论文里是这么说的,这个作者用什么办法来算它呢?"

这个问题如果硬算,单是乘法要算360万项以上(这意味着,如果一分钟算一次乘法,一天算10个小时,那么也要算10多年).虽然行列式计算有一般的"消去法则",具体怎么用来计算这个10阶的行列式呢?谁也说不上.

可是约过一个月,他告诉我:"已经算出来了,结果恰恰是零."真想不到他有这样的毅力和耐性.问他怎么敢碰这么大的计算量?他说:"不相信那篇文章的作者会有时间去算它,一定是瞎蒙的."

更使我吃惊的是,过不久,他又提出另一个问题:"一个三元五次多项式,怎样找出所有的解答?"

我只能说,即使是一元问题,也无从着手,这像是海底摸针.

可是,大约又过了一个月,他又来找我说:"全部解答都找到了,不信你可以

一个一个代到方程去，看看是不是满足."

我问他是怎么找出来的？他说："找到一个就少一个，一个个找，就是要肯花时间."

他的这种硬打硬拼的精神，使我五体投地.

陈景润的内心充满自信.凡是碰到这类问题，他总不信别人肯花时间、肯下功夫去做这些令人生畏的问题.这时他总说："要做这种问题，就得拼命."

他果真在拼命.他是老病号，因此就与别的病号一起被安排在同一房间里.晚上由于熄灯得早，他就到宿舍走廊上，蹲靠在厕所外的墙旁，在走廊的夜灯下，捧着一大叠稿纸就地计算，不管三更半夜或黎明，每当你上厕所，总能见到他入魔地算着，待他解决了一道难题：他也就该住院去了.这种不惜代价地做数学，简直是毅力之战.

还有一点充分表现了他的自信心，那就是他从不评价自己的工作.只有一次，我问他最好的工作是哪一项？他说："还是哥德巴赫问题做得最好.不过也很难讲.有人也可以说这个工作不怎么样."

他的治学精神和研究风格同样使我钦佩.他说："白天拆书，晚上装书.我就像玩钟表那样，白天把它拆开，晚上再一个原件一个原件地装回去，装上了，你才懂了.

"做研究就像登山.很多人沿着一条山路爬上去，到了最高点，就满足了.可我常常要试 9~10 条山路，然后比较那条山路爬得最高.凡是别人走过的路，我都试过了，所以我知道每条路能爬多高."

大概这就是为什么他变得这么内行，以及能超过别人达到顶峰的秘诀.如果科学界有这样一批人，我国的科学在国际上将会占有什么样的席位！这是不难做出判断的.

可是，谁敢这么做？谁肯付出如此的代价？

只有陈景润！

5 我的学生陈景润

方德值.厦门大学数学系教授.

——方德植

陈景润是解放后厦大数学系的首届优秀毕业生.他 1950 年以同等学力考入厦大数理系.当时，我任系主任，为他们开设了"高等微积分"、"高等几何"等基础课程.上课时我常常提起我国古代数学家杨辉和出身贫苦家庭的德国数学家高斯，以此勉励同学们刻苦学习，我常说："勤做题是很重要的，但必须掌握两条：一条是要加强对书本中的基本概念和定理的理解；另一条是要训练运算技

巧和逻辑推理.离开了这两条,数学是学不好的.""学数学要打好基础,科学研究必须循序渐进.基础不好就不能有所创造,有所前进."陈景润就是按这两条去做的.有一次"高等微积分"考试,我发现陈景润的试卷写得很乱,就把他叫到办公室,问他到底会不会,他当场做给我看,尽管给了他满分,还是教导他"字还要写清楚,让人家看懂.以后搞研究出了成果,不会表达,写不清楚,总是个缺点."他记住我所说的"字是写给别人看的,要让人家看得懂".后来,他做作业、考试都写得清晰、工整多了.

1953 年,因国家急需人才,该年级学生提前一年毕业.陈景润被分配到北京第四中学教书,当时我担心他的表达能力难以胜任这个工作,果然,一年后就被退回了.当时厦大校长王亚南正在福州开会.陈景润找到了王校长说:"我现在失业了,怎么办?"王校长回校时来找我说:"你的学生陈景润失业了,呆在福州找不到工作."我就对王校长建议让陈景润回数学系工作,于是他被安排到系里当助教兼资料室资料员.主要的目的是让他有较多的时间和较优越的条件多做研究.两年后,他因"他利问题"的论文引起国内数学界的重视.当时正好是解放后举行全国第一次数学讨论会期间.陈景润本来并没有准备赴京参加会议.华罗庚打电报给我,要陈景润参加报告"他利问题"的论文,陈景润便赴京参加这次会议,并做了报告.会后厦大数学系得到了好评.过后华罗庚写信给我,建议让陈景润到中国科学院数学研究所工作.我从大局出发,欣然同意,于是他就于 1957 年 9 月又回到北京.他成名后经常提到要学习我一丝不苟的治学作风和助人为乐、提携后辈的高尚品德.

陈景润在厦大就学期间的学习生活,可以用十个字来概括:家境贫困,而又醉心学业.他常一天只吃两顿饭,衣服舍不得用力洗,只在水里浸一下就拿出来晒,节俭下钱买书、买资料,还买个手电筒,作为在熄灯后躲在被窝里看数学书用的.我劝他注意身体,他却说:"饭可以不吃,但书却不能不念."他在学习上是全身心地投入,经常达到忘我痴迷的程度.在老师没有布置作业的情况下,他常自己拿一本习题集从头做到尾,每天要做百来道.后来他也是以这种"只要功夫深,铁杵磨成针"的精神攻克层层难关的.他之所以能取得这么大的成就,是与他的智慧与勤奋分不开的.他所研究的成果至今还保持着世界领先水平,作为他的老师,我是十分欣慰的.

陈景润的成就家喻户晓之后,他没有忘记母校,没有忘记老师.1981 年厦大 60 周年校庆,他从北京赶回来参加校庆活动,还特意早上五点多就赶往鼓浪屿,拜访已故校长王亚南的夫人和我.他时刻不忘师恩,对老师总是敬重有加的.回忆起在 1979 年,我到北京人民教育出版社主编《数学手册》时,陈景润从中关村乘公共汽车到北京城内来看我十几次.因当时他经常到中学里作报告,许多中学生都认得他,怕白天碰上他们要他签名,走不了.所以只好在晚上才来

与我见面.在这期间,除了谈一般工作外,还谈到十年动乱期间,四人帮要他写大字报揭发邓小平,多次的逼迫使他曾三次企图自杀,最终还是坚持原则,没有写.他说:"现在形势好转,我们心情舒畅,可以自由谈话了."

陈景润离开了我们,这是我国数学界的重大损失.但我深信全国数学界必能发扬陈景润的精神,必能继续陈景润的事业,为中华民族屹立于世界之林而奋斗!

6 景润,人民怀念你

——李尚杰

李尚杰,原中科院数学所党支部书记.

1972年9月,我从中国科学院院直组调到数学研究所做党支部书记工作.从那时起,我与陈景润相处20余年.对于陈景润,众说纷纭,莫衷一是,我从开始的耳闻到后来的目染,从逐渐熟悉,直到共事相知,成为亲密的同志和朋友.他的人生态度、学术成就、曲折坎坷的经历、百折不挠的精神,都使我十分钦佩.对于陈景润的逝世,我非常悲痛.这不但因为我失去了一个朋友,而且对于整个数学界也是一个损失.

陈景润的确是一个伟大而奇特的数学巨匠.他的经历,他的刻苦,他的节俭,他的爱心,足够写一部传奇之作.这里,我仅就几个方面做些回忆,以追悼和纪念他的英灵.

第一,陈景润一生的经历非常奇特,他出生在贫穷的邮局职员家庭,童年就得了肺结核.在抗日战争、解放战争年代,他断断续续地上了小学、初中,到解放初期刚念到高二,他出奇地以"高中毕业同等学力"的资格考取了厦门大学.1953年毕业,年仅20岁的他被分配到北京一所中学,因为福建口音重以及语言表达能力不佳,生活不适,不得不失业回家.不向命运屈服的陈景润曾幻想自谋生路,摆起街头书摊,来支持实现理想,但失败了.幸好厦门大学王亚南校长、陆维特书记发现了他,将他招回母校厦门大学,陈景润渡过了第一个"危机".

不久,陈景润初试锋芒,写出第一篇研究成果,经李文清推荐,得到华罗庚赏识,被邀请参加全国数学大会并作论文宣读.《人民日报》于1956年8月24日报道了"从大学毕业才三年的陈景润,在两年的业余时间里,阅读了华罗庚的大部分著作,他提出的一篇关于'他利问题'的论文,对华罗庚的研究结果有了一些推进."随后,他被调入数学所,接连写了几篇论文,眼看即将有成之际,在"反右"运动后期,他和恩师华罗庚都被错误地当"白旗"批判.陈景润被调出数学所从事非数学科研工作.

1961年,在周总理主持召开的"广州会议"上,华罗庚提出要调回陈景润.

他渡过了第二个“危机”.

陈景润回数学所后，不改初衷，夜以继日，废寝忘食，于 1966 年 5 月 15 日出版的《科学通报》上发表了著名论文(1+2)简报.《科学通报》因文化大革命随即停刊.陈景润的喜悦心情又笼罩了暴风雨即将来临的阴影，但他依然坚持科学研究.华罗庚曾称赞“陈景润这种坚忍不拔的精神非常难得可贵”.

陈景润被卷进了风暴旋涡，他被搜身，没收了积蓄，这是他最伤心的事，因他已经看到有大字报诬蔑他拿人民给的工资，研究“伪科学”，研究“洋人、古人、死人”的东西，“妄想复辟……”.他已做好除名后依靠自己已有的积蓄自力更生搞科研的准备.但当钱财被抄走后，陈景润不知所措了.搜身后，他又被“扫地出门”，那 6 平米小屋里的书和凝结心血的手稿被扔得满屋满走廊.他有时一天不吃饭，但他总要喝水呀！他的两只简易暖水瓶也被踢碎倒在地上.还有人抄起他的竹制雨伞打他，直至把伞抽碎，最后把他推进“牛棚”，陈景润被逼得走投无路了.作家徐迟用文学语言描述：“陈景润听着那些厌恶与侮辱他的，唾沫横飞的，听不清楚的言语，他茫然直视，他两眼发黑，看不到什么了.他像发寒热一样颤抖.一阵阵刺痛的怀疑在他脑中旋转.血痕印上他惨白的面颊.一块青，一块黑，一种猝发的疾病临到他的身上.他眩晕，他休克，一个倒栽葱，从上空摔到地上.”陈景润就在被推进“牛棚”的一刹那，猛地从三层楼的窗口跳了下去，幸好“被什么东西拌了一下”，才免遭于难.陈景润又渡过了第三个“危机”，被从“牛棚”里释放了.

再接再厉的陈景润，成功地简化了(1+2)证明，于 1973 年春全文发表在《中国科学》上，引起国内外数学界轰动，曾被誉为“移动了一座山”、“陈景润的惊人定理”、“从筛法的任何方面来说，它都是光辉的顶点”.著名数学家王元介绍：日本出了一本《100 个具有挑战性的数学问题》，书中只提到两个中国人，一个是 1 500 年前的祖冲之，一个是 20 世纪的陈景润.

偏偏就在环境和条件日益见好的时候，他患上“帕金森综合征”.十多年来，他一直坚持带四名研究生，撰写科普读物和审查论文，陈景润以奇特的毅力与疾病抗争着，他的一生真是出奇的曲折，他一息尚存，总是不断前进.

第二，陈景润对数学出奇的热爱.为了攻关，他出奇的刻苦，从沈元、李文清的启蒙开始，陈景润就立志攀登哥德巴赫猜想的高峰，他伴青灯孜孜矻矻而无怨，处清贫默默求索而无悔.他从小学起就是“读书迷”，为了读书，几乎忘记了一切.常人所谓的人间乐趣，根本与他无缘.为了钻研科学，他到数学所后几乎天天在图书馆里，有时竟听不见闭馆铃声，被关在里边.为了学英语，他每天半夜坚持收听中央台的对外广播，曾被人误为偷听敌台.中午，别人去吃午饭，他可以不上食堂，啃两口随身带的窝窝头挡饿.甚至他把自己关在陋室里，只要有两瓶开水解渴，可以一连两三天工作.的确只有这样奇特能吃苦的人，才能取得

成就，才能用自己积累的理论知识去移动“数学上的一座山”.

众所周知，他曾住在原设计为小锅炉房的6平米的房间里.此前，他还坚持要领导将尚未启用的、只有不到3平米的厕所分配给他，由于他固执的要求，就答应了.厕所没有暖气片，他只装了一只100瓦的灯泡取暖.问他冷了怎么办，他说最冷的三九天他把衣服全穿上，甚至棉胶鞋也不脱，把整个身体围在棉被套里读书，冬天墨水结冰了，就改用铅笔做笔记.陈景润就是如此不怕世俗嘲笑，以苦为乐，为科学献身的.

第三，陈景润在生活上毫不讲究，工作环境也不计较，他出奇地节俭，千方百计克服面临的困难.

在吃的方面，前边已说过，多数情况都买窝窝头，只是后来白面供应充裕了，而且不常做窝窝头了，他才改买些馒头.福建籍人有喜食大米的习惯，但他很少买米饭，他说“这样可以适应北方的生活习惯”.就在取得成功后，一日，他遇见一位当记者的老乡，他说：“今天见到你很高兴，我请你吃饭.”老乡问：“吃什么?”他说：“吃面条.”吃面条对陈景润来说都是一种享受.

在穿的方面，只要不露体，新旧残破他都不在乎，年年都穿布料衣服.棉大衣、棉帽他无法自制，才去找裁缝店.从他来北京到1979年1月6日赴美国访问制新装前，十多年就做过一次棉帽和棉大衣.至于短棉袄，则买两件棉毛衫，套在一起，装上用棉花票买来的棉花，填充在两层棉毛衫之间，粗针大线缝上，外罩制服就算完成.鞋袜也是竭力俭省，能穿的绝不轻易扔掉，一般人认为应当抛掉的，如胶皮鞋已露出脚指头，后跟磨出洞，他还要垫上纸板凑合.袜子只在天凉时才穿，有时见他两只脚竟穿两个颜色的袜子，偶尔还见他只穿一只袜子，塑料凉鞋破损了，甚至鞋带断了，一走一趿拉，也凑合着穿.除夏天每月理一次发，秋冬季总要两三个月才理上一次.为什么要这样呢？回答是：他绝不是通常人们理解的那种吝啬鬼，财迷！他曾经说过，他怕失业，怕再出现曲折，他是尽可能地存一点钱，作为自己可以长久进行科研的基础保证.他失业过，摆过书摊，被搜身，被扫地出门，几次遭错误批判，又调离数学所，难道他的忧虑是多余的吗?!

陈景润从不占公家便宜，也不占别人一分钱.在那是非颠倒的年代，打、砸、抢有功，而在艰难条件下带病坚持搞科研的陈景润，只因交了病假条子，却要扣去病假工资，直到“四人帮”垮台才得到清算.他节俭一生，没损害国家民族的利益，也没损害他人的利益.这与那些贪婪攫取国家利益的人截然相反，因此，陈景润是值得人们尊敬的.

第四，陈景润爱党、爱国、爱家庭.他的爱心也十分奇特.他是用奋力摘取科学皇后王冠上的明珠的奇特的方式，来表达这种爱心的.1973年春节过后，他把著名科学论文(1+2)简化证明交给了党组织，并说：“是党培养了我！是党在

我最困难的时刻支持我、帮助我的."

他出国访问讲学期间,写过论文,有人曾建议他留在国外发表,他不同意,说:"我的论文要在中华人民共和国发表."

1979 年 6 月他第一次从美国讲学访问回国,省下 7 500 美金,他刚出机场,就执意要把存折交给组织,说:"我把省下的钱交给党组织,目前国家还不富裕,我要为四化出点力."他结婚以后,特别爱他的家庭.当他的夫人由昆生了欢欢以后,这种感情特别强烈,从来没怎么跑菜市场的陈景润,开始提着菜篮子买鸡、买鸡蛋、买里脊肉、买猪蹄、买青菜,等等,交给婆婆去烧制.然后他还要亲自给由昆往医院送饭.他似乎一反常态,有人笑着问他说,这回搞不了科研了吧?他说,哪里!哪里!白天是耽误了一点时间,夜里还要工作的.他还常常在由昆没下班之前,亲自动手做饭.说是要表演一下闽菜功夫.实际上他总是简单从事,不愿在做饭上花太多的时间.每逢这个时候,由昆总是说:"先生,还是我来做,你休息一下."他凡是能替由昆减轻负担的地方,都尽量想到.

有时记者采访他,他就把由昆表扬一番,他说:"我开夜车,她总是催我快点休息!""我在家里得听她管!"……

他在儿子很小的时候,就总设法引导儿子学习拿笔,让儿子翻大本的英文辞典.儿子上小学了,他每天都要检查孩子的作业.1987 年 7 月,正是欢欢上小学的当口,他闹着要出院.他说:"小学和中学阶段是打好基础,养成良好习惯的时期,要告诫他不要偏科,每门功课都同等重要."他还与记者开心地说:"我可以教博士生,可我教不了我的儿子,中小学教师太伟大了."

陈景润还和由昆讨论,要节省家庭生活开支,能不买的东西,就不买,以后市场经济,儿子上大学要支付学费的,美国等国家都是如此,要给儿子攒学费的.由昆回忆说:"我对市场经济不甚了解,听先生一说,开始还觉得他想得太多哪!"

由昆医生回忆说,先生两次出国,一个电器大件都没买,后来林群院士出国回来,帮先生买了一台 12 英寸黑白电视机.先生爱国心很强烈,冰箱也要买国产的,在先生的影响下,我儿子也要我买一台国产微波炉.

陈景润就是这样对待人生的.

1991 年北京电视台《祝你成功》节目组采访他们一家,当时我在拍摄现场.记者问他"人生的目的是什么?"陈景润说:"人生的目的是奉献,而不是索取!"

奇特的陈景润走完了他辉煌的一生,他虽然没有享受什么荣华富贵,也未曾尝遍山珍海味,但他的英名永在,那是用金字镌刻在数学史上的.他为共和国争得的国际领先的地位已保持了 30 年了,那是无形的丰碑,将永远矗立在人们的心中.

写到这里,我忽然想起鲁迅先生说的那句名言.是啊,陈景润不正像鲁迅先

生所说的那样,吃的是“草”,而挤出的是“奶”.

大地怀念他! 人民怀念他!

景润,安息吧!

1997 年 1 月 30 日

7 陈景润在数论上的成就

——李文清

李文清,厦门大学数学系教授.

7.1 陈景润在厦门大学学习的情况

陈景润于 1950 年入学,1953 年毕业,1956 年开始做创造性工作,1957 年调到中科院工作.

1950 年厦大数学系还是数理系,方德植先生是当时的系主任.陈景润是解放后第一期学员.我为这一班曾开过数论课,教材是东京帝大高木贞治所著《初等数论》.这是当时讲授的主要参考书.我为这一班讲述过数论史上三大未决问题,即(1)费马问题,(2)双生素数问题,(3)哥德巴赫猜想.陈景润很注意听讲,布置的习题他都认真做.他做的习题很少错误.毕业后分配到北京某中学任教,因表达能力较差,离开中学,王亚南校长把他又调回厦大,在厦大数学系资料室工作,也做一些教学辅导工作.

陈景润勤奋读书,曾征求我的意见,读什么书,我介绍他读华罗庚先生所著《堆垒素数论》.他刻苦学习,将华先生这本书读了近 30 遍,每条定理都学得很透,反复演算.他写出第一篇论文“他利(Tarry)问题”,这篇文章改进了华先生的结果.这篇论文我读后,陈又请张鸣墉先生给他仔细读过,然后我把此论文寄给关肇直先生转交华先生.正当 1956 年开全国数学会,华先生打电报叫陈去报告他的创作.由于他表达能力差,我上台代他讲了一半,后来华先生补充发言,做了评述.1957 年华先生调陈到数学所工作.1958 年、1962 年、1964 年我曾利用在北京开数学会的机会,同陈交谈数论问题,不过他在这方面已走得很远了,我反过来向他学习了.几次谈的内容都是围绕三角和、筛法的公式化、黎曼 Zeta 函数.有一次和林群一起交谈,林说陈对基本功下得很深,像老工人熟习机器零件一样熟习数学定理公式,老工人可以用零件装起机器,他可以用这些基本演算公式写出新的定理.在科学院同其他研究人员一起进行研究,并有华罗庚先生这样名师的指导,他的工作越来越成熟,所谓切磋琢磨、千锤百炼.他做出了成绩,为伟大的社会主义祖国赢得了光荣,在 1968 年出版的日本岩波数学辞典上已有了他的名字.他在数学领域做了很多工作,在下面作一介绍.

7.2　陈景润数学工作的领域及在数论上的成就

(1)哥德巴赫猜想.

在2 000多年前古希腊有一个学者爱沙托芬尼提出用筛法做素数表.在数论中素数分布、筛法理论形成一个重要研究的领域.在1742年哥德巴赫给欧拉的信中提出任一大于4的偶数可以用两个素数之和表示.这一猜想提出之后经过许多学者的议论和研究,才达到今天接近最终解决的阶段.在40年代的教科书中,如高木贞治《初等数论》提到"尚有一自古以来有名的素数分布有关的问题,即哥德巴赫猜想,2以外的偶数可用两个素数表示至今还未得到证明,但解决确实很困难".

此难题英国数学家哈代(Hardy)及李特伍德(Littlewood)对此猜想作过研究,但未解决.此难题在很多数论著作中被讨论过.如Karl Prathar所著《素数分布论》(1957年版)曾证明"几乎所有的偶数可表示两素数之和".秋达可夫所著《L-函数引论》(1948年版)、英国T. Esterman著《近代素数引论》及维诺格拉多夫著《三角和方法》(1971年版)三书都载有维诺格拉多夫的结果,即任一大奇数可表示三个素数之和.关于大偶数用素数积之和表示,曾经过V. Brun、Schnirelman、华罗庚、潘承洞、王元、维诺格拉多夫等学者创作性的研究,其成果载于潘承洞、潘承彪所著《哥德巴赫猜想》,最佳的结果是陈景润证明了"大偶数为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和".

(2)格子点几何.

在圆 $x^2+y^2=t$ 的内部及圆周上面整点数目当 $t\to\infty$ 时为

$$R(t)=\pi t+O(t^{\theta}) \qquad ①$$

1942年华罗庚的结果为 $\theta\leqslant\frac{13}{40}$,陈景润在1963年得的结果为 $\theta\leqslant\frac{12}{37}+\varepsilon$,改进了华先生的结果.陈同时也研究三维空间的球 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 的整点个数问题,他的结果为 $a^{\frac{4}{3}+\varepsilon}$,改进了前人的结果.

(3)华林问题.

此问题为对下列不定方程式求解问题

$$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k \qquad ②$$

k 是一个正整数,n 为任一大于零的整数,当 k 确定后,寻找一最小正整数 s 使此不定方程有正整数解,此 s 是 k 的函数记作 $s=g(k)$,此问题曾有希尔伯特、哈代、华罗庚等人研究过,Dickson解决了 $k=4,5$ 以外的最小 $g(h)$.陈景润得到结果为 $g(5)=37$,$19\leqslant g(4)\leqslant 27$,填补了数论史上的空白.

(4)黎曼Zeta函数.

此函数为

$$\zeta(z)=\frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\cdots+\frac{1}{n^z}+\cdots \qquad ③$$

此函数是研究解析数论的重要函数,林德洛夫猜想为

$$\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)=O(t^{\varepsilon}) \qquad ④$$

国际上曾有 Vander Corfut、Koksma、Titchmarch、闵嗣鹤等人进行研究,闵先生的结果为 $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)=O(t^{\frac{15}{92}+\varepsilon})$. 1965 年陈的结果为 $\zeta(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)=O(t^{\frac{6}{37}})$,改进了前人的结果.

(5)关于算术级数最小素数问题.

Dirichlet 曾证明当 a,b 是互素的正整数时

$$an+b=P \qquad ⑤$$

可表示无限个素数,最小的素数 P 是什么? 陈景润证明了最小素数 $P\leqslant a^{168}$,改进了潘承洞等人的结果.

7.3 国内外评论

H. Halberstan(英国)及 Richert(德国)两位学者 1974 年出版的《筛法》一书中将陈氏定理作为该书一章的内容,并且评论陈的结果在筛法理论上,不论怎么说是筛法理论的光辉的顶峰.

1976 年在东京一个学术会上,维也纳学者鲁贝尔特教授也用同样评语,并加上“使人心激动”的词句.

日本数学会出版的《数学百科辞典》对陈的哥德巴赫猜想及格子点几何的成果作了介绍.

潘承洞等所著《哥德巴赫猜想》第九章对陈的定理作了详细的叙述.此书对哥德巴赫猜想研究的发展史有细致的论述.

陈景润的工作在 1978 年的《人民教育》有记载.

8 我所认识的陈景润①

古来圣贤皆寂寞.

——李白

我不想名利和地位,我只希望能好好地研究数学,在这方面有一些贡献,可以为中国人争一口气.

——陈景润 1979 年 9 月 29 日

① 摘自李学数,著.数学和数学家的故事.北京:新华出版社,1999 年.

8.1 老幼妇孺皆知的陈景润

陈景润是中国数学家,也是全国人大代表及人大主席团的主席之一,他的名字在中国可以说是家喻户晓.可是由于许多人很喜欢加油加酱、涂脂抹粉,流传的故事有许多是歪曲他的形象的.

陈景润是一个像你我一样的普通人,有时也会做出一些幼稚可笑的事,但是在经过歪曲加工的故事里的他却变成了一个怪诞的与众不同的人.

几千年来,中国一些文人对于有成就或创大业的人,肆意宣传是天赋异禀或是天降神物,结果本来是一个普通活泼会犯错误的人,却要变成一个半神或神,不会犯错误的超人,于是社会形成两个层面,下面是广大的浑浑噩噩无知的"群氓",他们要顶礼膜拜上面的一小部分能歌舞升平、享尽富贵、鱼肉良民的"诸神".

连一千多年前我国伟大的诗人李白,由于读万卷书行万里路,知识面广而能写出许多活泼有生气的诗,后人就牵强附会说这个"诗仙"是文曲星下凡,是"神"不是人.难怪他在写《将进酒》时要长太息以流涕,哀叹道:"古来圣贤皆寂寞",因为一变成圣贤就意味着和广大的人民距离远了.

我们的陈景润在特意关怀之下,也变成了一个圣贤.全中国到处流传关于他的故事,例如,远在中国南疆的海南岛的一个穷乡僻壤的老太婆对海外回来的亲人说:"中国出了一个大数学家,这个人是很怪,专门蹲在茅坑上研究数学,他的大定理就是这样发现的."

我们的民族有一个可爱的特点:做事喜欢"一窝蜂",有样学样(这里有电影为证,在外国人拍的著名的《愚公移山》电影里,就有北京的一个"四合院",只要有一家今天买鱼,其他家也跟着买鱼来烧.明天炒韭菜,大家也跟着炒韭菜.当然熟悉中国内情的人可以举更多例子).于是有许多条件不太好的傻小子,竟然相信蹲茅坑可以读好数学,也在里面不怕臭味蹲了半天.

有些少年儿童听到陈景润拼命苦干的故事,于是向他学习,课间操不做,驼着背拼命在钻难题或做习题,不懂怎么样劳逸结合,把眼睛和身体损坏,结果要《体育日报》的记者去专门访问这位从来不懂得做体育运动的数学家谈体育和身体好的重要性.1979 年初,我在美国普林斯顿研究所见到景润时,我就取笑他:"言不由衷."景润说:"我不希望少年学我,把身体弄坏,他们应学雷锋叔叔有一个健康的体魄.有一位教授的孩子,在数学比赛中得到名次,他现在课间操也不做,就是钻数学习题,他家的物质条件较好,不做运动不要紧.我们有许多孩子营养不是那样的好,活动的空间不多,不做一点运动,身体很容易损坏,长远看来是对国家不利的."

8.2 流传海内外的恶毒的流言蜚语

在 1979 年初,由于在一些关心中美科学文化交流的人士如陈省身、杨振宁等教授的努力安排下,美国普林斯顿高等研究所邀请了陈景润与著名的拓扑学家吴文俊先生一起去那里做短期研究和演讲.

陈景润的身体是不太好,在出发前一天还是在医院里疗养,到普林斯顿后,他看到那里有许多图书和资料,非常的高兴,整天就是埋在研究所的图书馆和办公室,做他的研究和学习.他觉得从老远的中国来美国很不容易,有这样好的学习条件,不好好地学习,不获得成绩,将会失去祖国人民的厚望.

景润在留美期间,除了参加一些热情的华裔科学工作者的邀请吃饭外,从来不花钱在外面吃饭,自己动手煮饭.他很爱惜时间,他也对研究所给他的钱很珍惜,他想到自己的国家穷,现在要向科学进军,可是自己所属的科学研究院的图书馆却还是很缺乏书籍,买外国书籍需要许多外汇.他在留美期间省吃省穿,也不花钱去电影院看电影,结果回国后把一分一分省下的 7 500 美元全部送给科学院作为购买书籍之用,他这种大公无私的精神是值得人们尊敬的.

可是在他还未回国之前,竟然有梦想打倒他的"钢铁工厂"和"制帽公司"的伙计们,散布了这样的谣言:"陈景润不回中国,他已变成美国人了."这谣言传布之广和速度之快的确是惊人的,驻北京的外国记者听到这样敏感的消息,赶快打电话通知美国的同行调查此事.

有记者打电话问普林斯顿研究所的负责人,负责人否认有这样的事;问陈景润,景润生气地回答:"我是中国人,我还要回我的祖国.我是一个中国人!"就把电话挂断.

法新社的记者还特意打电话问美国国务院有关人士,要证实此事件.国务院的官方人士说:"没有这一回事,我希望你们不要登载不符合事实的消息,这会妨害中美的友好关系."结果证明这是别有居心者散播的谣言.

这个事情弄得景润心情很不舒畅,这种魍魅的伎俩是可卑和可耻的.但他很快就忘掉这一切,又专心钻研一些较难的问题,要把成绩汇报给祖国.

景润初来美国时我曾见过他,这事件发生时刚好我到普林斯顿研究所看望在美工作的年轻优秀数学家之一萧荫棠教授.本来我想去安慰景润,但萧先生讲还是让他安静地搞他的工作.我想想也对,就没去见他.

1979 年 9 月初,景润被法国的高等科学研究所邀请来法做研究和报告工作,我在巴黎又见到他.我对景润提起这件事,并且表示在那段他难过的日子,我没有过去看他并安慰他,事后觉得是做错了,心中感到不安.他紧握我的手,表示感激,他说:"这个事件流传很广,中国几个省的人都知道.我去开人大会议时,还有一些人大代表跟我开玩笑说我是美国代表.这样的谣言很不好."

是的，套用中国的术语，这种谣言就是要“破坏安定团结”.

8.3 火后凤凰

在 1979 年 9 月 31 日，我和许多旅法华侨坐在“互助之家”的大厅观看回顾中国这百年来历史的纪录片：《光明的中国》，在这纪录片里就拍到陈景润的一些事迹，他怎样辛勤地在图书馆读书，他写的数学论文手稿，等等.把他比喻成科学园地里一只辛勤的蜜蜂.

在 10 月 1 日的下午，我和许多法国数学工作者及大学生在著名的庞加莱研究所听景润对他的工作的报告.随他而来的研究生小丁在黑板上抄写一些英文句子、定理、符号公式，景润用有气无力的声音说：“感谢你们的邀请，我能来这里介绍我的工作，我感到很高兴.我的英文不好，讲错了请你们原谅.”

大家对景润的坦白很是感动，虽然他的声音微弱，但整个演讲厅鸦雀无声，可以听到他的讲话，许多人早从法文读物中知道景润过去的一些遭遇，对于他不能很好地大声讲的缺点是可以谅解的.

当我坐在那里一面听他讲，一面看手中分到的讲稿摘要，我的思想却没有停留在这些复杂深奥的公式上，而是飞到过去的日子，我回想了他过去的经历.

脑海突然浮现了在第二次世界大战抵抗德国纳粹，领导反法西斯队伍的法国民族英雄戴高乐将军的一句话：“困难，对于有个性的人，特别有吸引力.一个有个性的人在面对困难的时候，才会真正认识他自己.”是的，景润的确是个有个性的人物.

景润在 1953 年从厦门大学毕业，他当时为了解决一些著名的数学难题，为了不要分心，没有注意他周围发生的事，很早就给人戴上“白专”的帽子.

他的一些研究论文很受华罗庚的赏识，要把他从福建调到北京的数学研究所工作，可是在那个时期有政治运动，一些人以思想问题阻止他来到北京.后经华罗庚力争之下，景润才在 1957 年来到科学院数学研究所工作.华罗庚搞的数论小组原本有许多学生，后来大部分党员出身的都转到应用数学去，现在全中国属于华的学生且还搞解析数论的只剩下王元(1952 年大学毕业)和陈景润这两个人.在研究队伍中，他们可以说是孤军作战.

景润开始对数论一些著名难题进军，由于他专心于数学，自己的生活也不懂得处理，他在数学所是著名邋遢的人.他只管自己感兴趣的数学问题，其他什么事情全不关心，在有政治运动时，他又不置身于政治运动当中，于是一些以“政治”为重的人对于他这种生活方式自然不满了.

他在文化大革命开始之前，就在哥德巴赫问题上有一些突出的成果(关于此问题可参见拙著《数学和数学家的故事》第一册里的《趣味的素数》一文)，可是在文化大革命发生后，景润被批为“安钻迷”——安于高楼大厦(在研究所里)，

钻洋纸洋书(中国科技落后,新中国成立科技书不是翻译外文就是原本厚洋书),迷成名成家.于是对一个在数学上有贡献,他的成就为中国带来荣誉的人,头上却被戴上了“白专”的帽子.

关心他的研究所所长华罗庚被一些公然违抗周总理指示的红卫兵抄家,而且还被揪斗,有些人还想出这样的毒招:要学生出来斗老师.逼迫这个曾被华罗庚栽培的景润在数千人的大会上斗华罗庚.景润假装肚痛躲进厕所,然后乘人不备跑走,不想批斗自己的老师,可是他能躲到哪里去呢?他靠在篮球场的架子下,耳朵听到上面扩音机传来的声音:“陈景润逃跑了,把陈景润捉回来!把陈景润捉回来!”他眼泪不断地流了下来……

华罗庚被斗的消息还好被周恩来总理早发现(事实上当时南斯拉夫的记者把这消息传到全世界,周恩来从外国新闻中知道此事),马上由毛主席及周总理出面保护他,并把他转移到安全地方,没有受到更多的凌辱折磨.

景润却没有这样的幸运,他被人辱骂为“白痴”,“社会主义社会的寄生虫”,要受到种种的折磨和凌辱.他本来不健康的身体这时是更加坏了.可是他还是想学习和研究,不能搞数学了,他拿起《毛泽东选集》的英译本来学英文,可是不久这本书也被人夺走不让他读了.

有一次在批斗他的大会上,人们发现陈景润突然间有进步了,不断地手写人们批判他的话,全神贯注.有些人还说陈景润已受教育了.可是人们后来发现,景润写的全是不好懂的数学符号和公式,原来在斗他时,他想到数学问题(忘记了就是因为研究数学他才遭殃),聚精会神地想和算,忘记了当时人们是在批判他;批判他的人看到这种样子真是啼笑皆非.

8.4 周恩来关心陈景润

我曾问他,以他这样著名的所谓“白专典型”,怎么又会成为人大代表呢?景润说据他所知道的,“四人帮”把批判他的许多材料给毛主席看.毛主席却说:“景润虽有缺点,还是应该爱护,应该帮助他.”

而周恩来总理对于自己国家培养出来的第一代科学工作者是非常关心的,为了能让更多这样的人参与国家管理事业,周恩来提名景润当人大代表.

当时为了这件事,周总理曾亲自几次打电话给副总理华国锋(当时他负责科学院的工作),科学院的常委第一把手原则上是同意景润当代表,但是许多人却反对不想让他当代表.结果科学院的党组织不通过他当代表.

为了不要让这样棘手的问题使许多人纠缠不清,引起争论浪费时间,为了整个国家命运着想,周总理觉得景润要成为北京地方代表太难,于是把他转移成为天津地方代表,并且把景润直接放在自己附属的小组里,这样能够对他照顾保护,关心他的成长.

景润谈起周总理是非常有感情的.周总理在那最困难的10年,不顾个人的安危劳累,要稳定局面,要保护许多受冤屈的人,忍辱负重,餐风宿露,能通宵达旦地工作,把全身心血献给国家、人民.

周总理不许红卫兵搞抄家,搞人身折磨,但一些人却阳奉阴违,对许多著名的文化及科学人士搞抄家、搞突击.比方在“科学院”就有人对华罗庚抄家,令他非常气愤.而林彪和“四人帮”的党羽对周总理还要迫害,在他的办事处前闹,说他是“两面派,调和派”,妨碍他的工作.

如果不是毛主席及周恩来出面保护许多人,这个国家的许多忠良精英就要消失了.景润告诉我他最后一次见周总理的故事,那是1975年四届人大小组会议,也是周总理最后一次在公共场所露面.

在那一次人大会议有许多青年代表,周总理见到天津小组的一位青年代表,就关心地问他的工作情况.这个青年讲他是在宾馆工作,周总理问他有没有外国人住宾馆,这个青年人说有.周总理问他会不会讲英文,这个青年人说不会.周总理说:“那么就应该好好学习英文,这对沟通思想促进国际友谊是很有用的.”

“我为什么要学英文?英国人、美国人不学我们的中文,我为什么要学他们的英文呢?我不懂英文,也是照样干革命!”

周总理就很和蔼地对这青年人讲:“毛主席的年纪这么大了,他关心世界的局势和革命,每天还用功地学习英文.你们青年人好好学习外语,对国家科学建设、对促进世界人民的友谊等都是很有用处的.”

周总理那一次接见他们,身体很明显地比以前衰弱许多.一些摄影记者要拍摄他的相片,周总理却提议去拍其他人,不要把镜头集中在他身上.周总理很坦诚地讲自己的身体的状况,说他已经动了几次手术,癌细胞已经扩散,他留在人世间的日子不久了.

许多人看到他病得这么重,还为国家操心,还对一个普通青年的思想情况注意,不禁感动得流下眼泪.他的光辉形象铭刻在景润心里.

8.5 “四人帮”怎样想利用景润

20世纪70年代中期,我在海外听到这样的小道消息:新华社开始介绍景润的数学成就(不是恶意那类)是在毛主席讲“应该好好照顾他”之后,于是江青召见景润,并且叫卫生部副部长对他检验身体,把他送到温泉去疗养,非常照顾.

我问他是否属实,他否认这回事,他说他只见过江青一次,是在这样的情况,有一次江青突然跑来科学院,说是:“代表毛主席向你们问好.”江青看到角落的景润并不认识,问钱三强:“这是你们科学院的人吗?”钱三强回答:“不!他

不是科学院的人."于是江青不再理睬他.后来江青走后,一些攀龙附凤思想重的人就讲景润:"哎哟哟!主席夫人想和你讲话,为什么你不和她讲,并且自我介绍.失去了这样的机会,真是可惜."景润回答:"她都没有和我讲话,我为什么要和她讲?"

景润病重在医院,"四人帮"党羽迟群有一次大摇大摆来看他,要景润写文章揭露华罗庚.迟群用心恶毒要挑拨他与老师的关系,然后再来对付华罗庚,说:"你是大数学家了,华罗庚偷窃了你的成果."景润不是那么幼稚可以被他骗.他否认他敬爱的老师有这样做法,而且还说华所长对他的成长及研究倾注了许多心血,绝对不会有那种事,坚决不写.

迟群目的达不到,恼怒在心,出去病房后下命令不许任何人探望陈景润,要见他一定要持有盖科学院几个大印章的批准信,可是这样的印章却掌握在"四人帮"手里,因此景润病在医院,孤苦地过日子,没有一个人能探望他.

景润虽是人大代表,可一点实权也没有.人大委员长朱德逝世,"四人帮"也不发信给他,他连想去见遗体致哀的机会都没有.病了想去医院看医生,叫一辆车都找不到,要他自己去挤公共汽车.

有一次江青的一个卫士来看景润,要他写对江青的"尽忠信",做一个"歌德派",可以给他当"数学研究所所长".我说这是荒唐不可能的事,研究所的领导工作不容易,不是单单只会数学就可以负责,研究所还有许多人材及老前辈,由景润你来当所长,我想没有人会心服.景润解释,这事是真的,"四人帮"为了结党营私扩大自己的势力,对于一个"头上长角,身上长刺"的不学无术的人,都可以准备封当教育部长,像他这样已出名的人更是可以拉来装门面,就算他当所长也是后面被人操纵.结果景润一个字也没有写.

在搞所谓"反右倾翻案风"的时候,"四人帮"要景润写批邓小平的文章.景润看那些分发要阅读的资料,发现许多是歪曲邓小平的话,比如邓小平就曾经说过,像景润这样所谓的"白专",还是对国家有贡献.可是"四人帮"却说:"邓小平讲'白专'对国家是有贡献。"把他的原意完全歪曲.景润不写,回答说,"我不会写东西.""四人帮"说:"你不会写不要紧,我们有记者可以写,然后就用你的名发表."景润坚决不写,也不许人家冒他的名写这些违背良心的文章,这样他又得罪了一些人.

8.6 后天下之乐而乐

打倒"四人帮"之后,知识分子不是"臭老九"了,凡是为国家为人民做过一些有益的事的人们,再重新受人尊重和肯定.陈景润不再被当作"社会主义寄生虫",而是一个"社会主义的劳动英雄",国家要给他及其他科学工作者非常宽敞舒服的房子住.

可是景润却仍然要住回他的那间小房间,不想搬进那高级的房子.他认为在中国许多为自己国家和人民有贡献的人,他们的居住条件很差,他们多数家中人口又多,而他自己又是孤身寡人,没有理由要住这么好和大的房子,他把房子给其他比他还需要的人.他说等大家都有好房子住了,他才来住好房子.你说他的想法是否可爱和可敬?(希望你不会说这是愚蠢的想法!他看问题倒是看得清楚.)

正当社会上刮起"物质享受"的歪风时,景润却仍然是那个景润,不要向国家要什么"电视机票"等,他什么票也不拿,他不要凭借人民给他的地位搞什么特殊的物质享受,他和一些忠心耿耿于科研工作物质生活条件仍差的科学家们一样,把工作放在第一位,生活的舒适问题撇在一边.在我看来他的确是"白专"——"白"是"一身洁白照人间","专"是"专心科研为国家".

如果你有机会认识了解他,你会喜欢这样的人,他不会油腔滑调,弄虚作假,是一个说老实话的正直的人.我听到一位外国新闻工作者讲有关他在美国的故事:《纽约时报》派一个中国血统的记者去访问在普林斯顿的陈景润,这记者是用英文讲话,人们以为他不会中文.陪同景润的还有一位中国官员,景润用英文讲感谢许多人在促进中美科学文化交流的工作,也感谢普林斯顿研究所给他们提供这样好的生活条件,研究所的办公室这么大,一个人一间,住的房子这么大,在国内研究院的条件还是较差,六七个人要挤一间小办公室工作,四五个人要睡一间房间.这时在景润旁边的官员就打断景润的话,用中文说:"一个人一个房间."要纠正他的讲话.

这官员可能传统思想较爱面子,认为"家丑不可外扬",结果忘记了华国锋主席号召的"说老实话,做老实人,要实事求是",想要景润讲不符合事实的话.

其实在外国,许多人都知道中国科研工作者的生活物质条件比外国低,外国人对中国科研工作者尊敬,是因为他们在那样物质条件差的情况下还能艰苦做出许多创造性的工作,有识之士不会讥笑中国人这方面的穷困,可是有些中国人为了爱面子却弄虚作假,难免给人瞧不起说是幼稚.

景润却是就事论事,没有修正他的讲话.而这时那位美国记者却用纯正的北京话讲话发问,不再用英文.那官员发现记者会讲会听中文,反而吓了一跳.

由于十多年中国科学受到干扰及许多科研工作停顿,目前中国的科技和外国的差距是很大.许多科学工作者也像景润那样争分夺秒工作,不只要把自己的业务做好,也要带领一些年轻人做研究,栽培接班人,想方设法地把科技搞上去.

然而中国的传统封建思想,对许多人的影响还是那么大,有些人"学而优则仕"、"仕而后特权"、"特权久而腐化",而一些歪风的泛滥,对一些青年人更起着腐蚀的作用.景润不是埋头自己的数学世界,看不到这种现象,他担心地对一些

青年说:"要做好科学研究工作,需要全心全意地去做,不要整天想到入党做官.一个人不能专心在科研上,他是很难取得成绩做出贡献的,这会对不起人民."

我了解景润,而且喜欢他这个人.他是有一些缺点,由于长年专心于数论,他的知识面不广,可能做一些事在一些人看来是窝囊.他把数学当作生命,因此对其他生活小节就不注意,心不在焉,恍恍惚惚.我不希望喜欢"锦上添花"的人们宣传他的奇谈怪事,对青年人是会起不良的影响的;也不要为了强调数学的应用价值,不符合事实地把他证明的"1+2定理"硬说是已在尖端的物理上有应用,做不科学的宣传,这对要提高人民的认识水平,这对要建立国家的威望是无益而有害的.

景润是一个有感情的人,不是什么"科学怪人".我记得在1979年初,据说是十年来普林斯顿最寒冷的一天去看他时,傍晚我和妻子要离开,景润想要送我们出研究所到市区搭车,我坚决拒绝,他要来回走这段漫长的雪路,又是这么冷,他的身体又不怎么好,万一冷坏生病不行.他看我坚持就只好陪我走一段路,路两旁堆积白皑皑的雪堆,他想到了自己的国土,他说:"如果我们有这么大的雪是多么好!我们的农业将能得到更大的丰收.我们有许多地方还是很干旱,急需要水分."

后来我乘"灰狗"快车,奔驰在广大的加拿大林海雪原上,看到窗外许多在严寒的北美雪地上伫立的松杉,我就像看到向我招手的景润.我想到他的过去、想到翻身后的景润不以自己过去所受的委屈而伸手要国家酬劳,这使我想起了一位曾遭迫害的正直的诗人的诗:"欲知松高洁,待到雪化时。"我心潮澎湃,心有感触地在车上写了这样的一首诗送给景润:"蜩蚯纷扰蛇鼠窜,寡廉宵小苟蝇钻.群妖盛气中宵舞,壮士断腕黔黎苦.周公吐哺撑天堕,中流砥柱挡汪澜.天公有情惊衰老,哀鸿遍野意沉消.苍天亦悲降霖雨,风卷阳霾露朝晖.自古疾风知劲草,尔今板荡识英雄.恩怨委屈俱忘怀,雄关漫道从头越.待到四化实现日,毋忘奠酒慰英魂."

后来给他的信中,我对他在送我走时讲的话"我们会开夜车苦干,而外国人会跳舞"提出异议,这是不了解外国人,而且那样的讲话也不科学.

外国人有许多热爱工作的人,他们苦干的精神不输于中国人,但是他们却是懂得怎么样工作,怎么样休息,劳逸结合得好,结果效率反而增高.爱因斯坦懂得用拉小提琴、读小说、驾帆船来使自己疲倦的脑袋休息.约里奥·居里(居里夫人的女婿,钱三强的老师,法国的原子弹之父)工作余后喜欢钓鱼沉思,并阅读与他本行无关的社会政治文章.就拿美国著名的写二百多本科学普及读物,科学幻想小说的阿西莫夫博士(Asimov)来说,他每天在打字机前工作十多个小时,进行大量创作,但他还很喜欢阅读各种各样的书,而且有机会出去时他也喜欢参观旅行放松自己.

景润那种埋头苦干，像苦行僧那样的做法是不能使身体发挥更大的作用的，使生活多彩些，就能使精神更活泼，更能做出好成绩.

在法国期间，我有一次周末，把这个苦行僧景润和他的小苦行僧小丁拉出来进巴黎看"先贤祠"(Pantheon)，看居里夫人的实验室及她当穷学生时在图书馆读书的地方，带他们看著名的"彭皮杜文化中心"，让他们认识到法国是怎样尊重有功于人民的人和是怎样对普及文化提高人民知识水平的重视.刚好在"文化中心"那里展示了许多1979年法国摄影师拍摄的中国人民的生活的照片，景润很有趣地看.我指着一张1979年5月拍的在昆明公园男女青年跳舞的照片，笑着对他说："景润你已经变成保守派，你的思想赶不上形势的发展."他害羞得赶快走开.

9 陈景润在厦门大学①

——余纲、王增炳

余纲、王增炳，厦门大学教授.

一株数学之花树在中华民族的土地上盛开怒放.这株花树就是今天举世闻名的陈景润——新中国培养出来的著名数学家.

28年前，这株花树的种子，落在祖国东南海滨厦门大学这个培育人才的苗圃里，它在这里萌芽、成长，并开出了第一朵鲜花.

让我们追溯一下这株花树生长的经历吧.

9.1 幸运的种子

还得从整个时代谈起.

让我们回到天翻地覆的年代，1949年，解放的怒潮席卷全国，红旗插到了福州城.这时陈景润还只是一个16岁的高二学生.解放了，他感到由衷的喜悦.党的阳光雨露照进了他的心扉，滋润了他的心田.他充满了对生活的期望.

这时候，解放战争还在继续进行，党已经十分注意培养干部和提高科学文化的工作.1950年5月中央人民政府教育部发布了高等学校1950年度暑期招考新生的规定.其中关于"投考资格"的条文中，有这样一条规定：凡有高级中学毕业的同等学力而又持有必要的证明者，可报名投考.新生的祖国，是多么迫切需要广泛吸收人才、选拔人才和培养人才啊！

陈景润看到了这条规定，抑制不住心头的激动.他从小沉默寡言，专心好学，在中学里就自学了大学用的数学书籍.他早就下了决心，要一辈子钻研数

① 原载《科技之光》福建人民出版社1979年版.

学，在这方面做出贡献．然而，在旧社会，他家庭生活困难，哪能上得起大学，他的愿望显得多么渺茫！新中国成立，为广大青年开辟了广阔的道路，展示了美好的远景．陈景润发现他的理想和现实一下子接近了起来．对数学的浓厚兴趣和强烈的求知欲望，促使他抓住这个好机会，以同等学力报考厦门大学数理系．八月初旬，陈景润经过短时间准备，参加了考试．不久，录取名单在报上公布了．他拿来一看，数理系，正取 20 名，其中分明印着“陈景润”三个字，名列第十！

他太高兴了，感到自己是一个幸运儿．当然，他能用同等学力考取，绝不是“碰运气”，而是刻苦学习的结果．但是，他确是幸运的，在他高中还没有毕业的时候，就遇上了解放的好年代．党给他送来了和煦的阳光、滋润的春雨，比起过去时代的有才能的青年们，挣扎着成长，走不必要的弯路，他的确是太幸运了．

陈景润兴冲冲地要准备到厦大了．他的想法很简单：厦大一定有许多好老师，有许多图书资料，在那里可以成天地钻研数学；将来，可以解决一道又一道的难题，在数学上做出成绩．至于做出成绩又是为了什么，在这个刚跨到新社会来的纯朴少年的思想中，还是模糊的．但家里的人想法可不一样．刚解放不久，家庭经济还有困难，陈景润要是到厦门去升学，难免要多花钱，衣服铺盖得添置，路费也得筹划．况且，厦门是前线，据说经常可以听到炮声、飞机声，危险啊！他们劝陈景润还是念福州的大学，随便选一个系，能就近升学就好．要他不念数学，陈景润死也不答应．他倔强地说：“只要有数学念，我走路去也可以．”家里的人拗他不过，只好帮他张罗行装．他嫂子拿出辛勤积蓄的一些钱给他，他哥哥也调整了一件旧的大衣给他．在一个初秋的清晨，他一手提了一个小铺盖卷，一手提了一个破旧的小藤箱，就踏上征途了．

厦大，在反动统治的年代里，是革命和反革命搏斗的战场．解放后，新生的厦大在党的领导下，继承发扬光荣的革命传统，成了革命斗争的熔炉．而且，由于它特殊的地理位置——面临台湾海峡，和敌占岛只有一水之隔，又是对敌斗争的前哨．这是锻炼和培养青年学生的好地方．

为了更好地建设人民的新厦大，1950 年 7 月，党派经济学家王亚南担任厦大校长．这位过去曾在厦大宣传马克思主义的进步教授回到厦大，毅然地挑起了全校行政领导工作的重担．他在工作中坚持了党所指出的正确方向，为培养德才兼备的年轻一代而贡献自己的力量．厦大的教学和科学研究蒸蒸日上，教师队伍也逐步壮大起来．厦大，充满着严肃战斗的气氛、蓬勃向上的朝气、认真勤勉的学风．

幸运的数学种子就在这个培育人才的苗圃里很快地生根、发芽！

9.2 顽强的幼苗

陈景润一踏进厦大，迎接他的就是一连串火红的日子，政治运动和对敌斗

争的烈火在厦大校园里熊熊燃烧，广大青年学生积极投身战斗，陈景润也没有置身局外.在备战动员中，他尽管身体孱弱，也和广大师生一起，坚持行军300里到闽西龙岩上课.眼前发生的这一切，他认为都是对的，应该的，就像数学的定理一样合乎逻辑，无可怀疑.他肯定，他拥护，他是非明确，爱憎分明.正是在斗争中，他受到了教育.他逐渐懂得了，应该为革命、为人民.他提高了民族自豪感和爱国心，他要为祖国、为人民在数学上做出贡献.

解放初期，厦大就进行了课程改革，开展建校建系运动.这就给各学科的学习和研究提供了指导，指出了方向.1950年9月，王亚南校长根据当时的形势，结合学校具体情况，在全校范围提出“端正学风，加强学习”的号召，强调“学生的基本任务在学习”，全校师生积极响应，学习风气空前浓厚.

陈景润念的是数理系.二年级分组时，他分在数学组.1952年院系调整，成立数学系.这个系十分重视基础课的教学.尽管解放初政治运动一个接一个，陈景润这一届学生为了国家建设的需要，又提前一年毕业，但系里还是安排他们修完必读的全部基础课程.系里还十分重视基础训练，每一门课程，尤其是基础课，都要求学生多做习题，务必使学生熟练掌握运算方法，并巩固所学的知识.同时，这个系还很重视学生的外文学习.三年级的课程，有的已采用外文课本，要求学生做到至少能阅读一种外文的专业书籍.陈景润在中学里英语就学得不错.大学三年中，他除了继续提高英语水平外，又初步掌握了俄语.当时系里有一位教授是法国人，不会讲汉语，但是会英语.陈景润为了锻炼自己的外语会话能力，尽管他从来没有跟外国人交谈过，也大胆地用英语和这位教授对话，这在全系学生中是绝无仅有的.当然，他的对话不免有点结结巴巴，但同学们都佩服他那种抓住一切机会努力学习的精神.

大学里有这样好的学习条件，本来就是数学迷的陈景润听起课来就更是津津有味，学起来也就更加锲而不舍，感到有无穷的乐趣了.但是，学习毕竟是艰苦的脑力劳动.陈景润之所以能学好这些课程，为他以后攀登世界数学高峰打下坚实的基础，主要还是靠他自己顽强刻苦的钻研.三年中，他抓紧一点一滴的时间，贪婪地阅读大量的数学书籍，仔细地做一道又一道的习题，不厌其烦地进行反复的计算.课本上的习题，一般同学只做教师指定的那部分，陈景润却不但全部做，而且还自己找课本以外的习题做.往往别人只做十题，他要做几十题甚至上百题.他的口袋里经常放着几张纸，一支铅笔，一有空隙的时间，就拿出来演算.像吃饭前后，开会前后，同学们打扑克、谈天的时候，他都从口袋里掏出纸和笔来，坐下来就埋头写写算算.他喜欢深入地独立思考，不轻易相信现成的结论.凡是数学上没有经过严格证明的，哪怕是公认的、一般人认为理所当然的东西，他也不盲从，总要问个为什么，而且要打破沙锅问到底.正由于他有这种钻研精神，同学们送给他一个绰号：爱因斯坦.

有一天晚饭后，他又坐下来埋头演算了.一个同学偶然好奇，问他："爱因斯坦，你在算什么？"也许是演算中碰到困难想跟同学交换意见吧，他抬起头来，把自己演算的纸张拿给这个同学看，并且兴致勃勃地、一本正经地大谈起他的想法来.那张纸上开头写着："三角形两边之和不一定大于第三边."底下已经密密麻麻地列了许多算式.这个同学一看，不禁哈哈大笑："三角形两边之和大于第三边，这是众所周知的几何定理，理所当然，你还想否定它？"陈景润有点不高兴了，他不跟这个同学辩论，坐下来继续他的演算.他证了好久，后来去请教跟他比较要好的一位研究生.当然，他终于明白了自己的这次证明是错误的，但通过这一钻研，对这个问题从理论上认识深入了一步.

一个人，当他的全部身心都沉浸在自己所热爱的事业中的时候，他会觉得双倍的时间也不够用.三年中，陈景润的生活几乎成了一个固定的数学公式，就是：宿舍—食堂—教室—阅览室.他奔忙在这条生活线上.他看书入了迷，往往听不见吃饭的钟声.当他恍然悟到时间已迟时，就得小跑步赶到食堂才吃得上饭.理工科因战备搬到龙岩上课的时候，生活条件很差，几十个同学挤在一间叫做"乐逸堂"的祠堂里，睡的是统铺.清早起来，有些同学跑到外面晒谷场上简易的篮球架下投篮.陈景润却拿了一本袖珍版的英汉四用字典，往田野走去.有的同学喊他："爱因斯坦，来打球吧！"他只是憨厚地笑了笑，又低下头边走边念他的英语去了.傍晚，昏暗的宿舍里蚊子很多，同学们三三两两，都到附近的田野散步去了，他却独自躲在破旧的蚊帐里看书.在厦门，风景如画的集美镇，海上明珠的鼓浪屿，都引不起他的兴趣.就是近在咫尺的著名的南普陀，岩洞清幽的五老峰，他也无心去拜访.从学校到市区，年轻人快步走起来，20分钟就够了，但他很少到市区去.他穿的衣服不怎么合身，原来当时厦大还没有百货商店，他的衣服是托同学到市区代买的.他爱穿蓝的、黑的一类暗色的衣服，这无非贪它洗起来容易些.为了数学，他漠视生活上的一切.

好在解放了，党和毛主席对年轻一代无微不至地关怀.陈景润在厦大享受了人民给他的助学金，他的基本生活有了保障.1950年和1951年，伟大领袖毛主席一再指示学校要注意健康第一.在解放初国家经济情况还比较困难的情况下，青年学生的生活条件不断地有了显著的改善.同时，和解放前在中小学时不同了，再也没有人欺侮他了.虽然他不爱跟别人来往，同学们还是主动关心他.党的关怀和培养，同志们的关心和照顾，都使陈景润深深感到生活在新中国的幸福.

过分的勤奋毕竟使陈景润本来就瘦弱的身体更加瘦弱了.然而，这颗数学的种子在三年之中，却萌芽、发叶，变成一株幼苗，并且茁壮地成长起来了.

9.3 辛勤的园丁

每当陈景润回忆起厦大三年美好的学习生活时，使他久久不能忘怀的是教

过他的老师.他尊敬这些热心教育事业,给他以谆谆教导的教师们.直至他已经取得了高度的成就,为祖国赢得了荣誉的今天,他仍然念念不忘母校这些教师对他的许多帮助.去年,几位老师出差到北京,他三番五次地从郊区跑到城里看望这些老师.这些年来,他给老师们写信,总是一笔一笔写得很工整,再三地向老师表示尊敬和感谢,并虚心地继续向老师求教.

每当陈景润给教过他"高等代数"和"实变函数论"的李文清副教授写信时,眼前就浮现出当年他听课的难忘的情景.这位老师教学认真负责,关心学生的学习,还常常在课堂上给同学介绍一些国内外学术动态,或者是一些引人深思的数学难题,或者是一些有意思的数学家故事,打开同学的眼界和思路,引导他们树立攀登数学高峰的理想.

有一次他给陈景润这班学生讲印度数学家拉马努金的故事.那是19世纪末和20世纪初的事.当时西方的学者很瞧不起东方学者,散布"西方智慧比东方高"之类的谬论.年轻的拉马努金连大学也没有念完,在一个税务机关当小职员.听了这些胡说,他憋了一肚子气,暗暗下决心要为东方弱小民族争光争气,就挤出时间,拼命攻读,刻苦钻研,把一本很厚的《微积分》放在一个布包中,一有空就拿出来演算.后来,他从自己做的习题中选出了120道题,寄给当时英国剑桥大学著名的大数学家哈代,以显示"东方古老的智慧".哈代从这些习题中发现了他的数学才能.他终于成了有名的数学家,在"数的分割"及"合成数的分布"方面有独特的贡献.

这时的陈景润,刚经历过抗美援朝的运动,受过反对亲美、崇美、恐美思想的教育,听了老师的介绍,联想起他解放前在一所教会学校念书的时代,那时他经常听到"中国月亮不如美国的圆"之类的谬论.的确,当时的中国真的也好像事事不如人.现在他懂得了,那是由于帝国主义侵略和国民党反动统治的结果.如今我们解放了,过去还是殖民地的印度的拉马努金能做到的事,难道新中国的青年就不能做到?……

李老师还给学生们介绍过数论史和日本高木贞治著的《初等数论》.有一次,他讲到数论史上三大没有解决的难题,这就是:(1)费马问题;(2)孪生素数问题;(3)哥德巴赫猜想问题.他微笑着风趣地说:"我们班上谁要是能解决其中的一个问题,对世界就有了不起的贡献."这时,有的同学笑出声来了,就像高中时代第一次听到数学老师讲哥德巴赫猜想一样,陈景润没有笑.哥德巴赫猜想又一次把他引入沉思之中,不同的是,比前几年高中时代,他更爱深入思考了.他还不清楚解决这个哥德巴赫猜想问题到底有多难,但他隐隐约约地想到:将来中国的数学家说不定会解决这个问题.天下无难事,只怕有心人……

这样,在老师的影响和引导下,大学时代的陈景润,逐步树立起了数学上的雄心壮志和远大理想.为了实现这一理想,必须通过严格的训练,打好基础.在

这方面，陈景润也十分感谢大学的老师们.他们的严格要求，使陈景润后来深感受益匪浅.有两件事给他留下了深刻的印象：

一次是在一年级学习“微积分”课程的时候.当时，任课教师不但在课堂上注意把概念讲透，要求学生比较深入地掌握基本理论，而且每堂课讲完，都要布置作业，要求同学们多练习，以便巩固所学的知识，并牢固地掌握运算方法.当这位老师每次批改学生的作业时，看到陈景润的作业，觉得有点奇怪：纸张长短不一，有的大约是一张纸写错了，裁去一段.为了节约纸张，这也无可厚非.主要问题还是答案太简单，有的只写两三行.好像是习题解答书中的提示那样，不像是演算习题.开头几次作业也许比较容易做，写得简单点还说得过去，但接下去几次都是这样，老师不禁怀疑了，会不会是抄袭别人的？他带着这个疑问到学生宿舍找到了陈景润，把作业摊在桌子上，直率地问：“你的作业写得太简单了，你有没有很好地做呢？”

陈景润有点紧张，赶快回答：“老师，我有做……”同时，他打开抽屉，翻出了一叠杂乱的草稿，交给老师.老师认真地从头到尾细看了一遍，发现这个学生的演算还是详细的，看来表达能力差些，写得过分简单了.他肯定了陈景润草稿的演算，也告诉他作业不能写得太简单，关键的地方，必要的步骤，必须写清楚.陈景润连声回答“好好好……”

但是，培养一个好习惯，并不是一朝一夕的功夫，在二年级学习“高等微积分”的时候，还发生过类似的事情.

有一次，任课教师看到陈景润的考卷，答案很简单，不能说明问题，从卷子本身看很难评上好成绩，但又没有发现什么错误.为了对工作负责，对学生负责，他便把陈景润找来当面问一问.

陈景润起先有点担心，不知道发生了什么事情.老师对他说：“这次考的问题你到底懂了没有，从考卷上看不出来，请你再做一做看吧！”

陈景润心里踏实了，他没说什么，坐下来就开始演算了，这些题目他做过，是熟悉的，不一会就把“第二次考卷”递了上去.老师看了，点点头，很满意，略为沉吟一下，提起笔来在原来的考卷右上角打了分数：98.他对陈景润说：“你回答得全对，本来可以给100分的，但写得不清楚，应该扣2分.如果不是找你来问，可能不及格了.以后自己写文章，也要注意表达清楚，否则你自己虽然懂了，人家还是看不懂.”

陈景润连声答应：“好好好……我以后一定写清楚.”

陈景润在这些严师的一再督促下，逐渐培养起了极为严谨精细的治学精神.

为了攀登科学高峰，还必须培养科研工作能力.在大学短短的三年时间里，学习很紧张，谈不上搞科研，但在老师的影响下，他逐步认识到科研工作的重要

性.尤其是教“复变函数论”的老师经常跟同学说,对于一个数学工作者来说,要坚持做到两条:一条是打好基础,特别是念好函数论;另一条是一定要学习写论文,在学习前人知识成果的基础上积极思考,大胆探索,在积累中创变,在创变中积累.他不同意一些人的说法,多看外国数学刊物上的文章,在广泛学习的基础上提出问题,努力写论文,就是什么“资产阶级方向”,“从外国论文夹缝里找题目”等.这一点深深影响了陈景润,推动他去进一步学习、研究更高深的数学问题.

陈景润这株数学幼苗,在厦大这个苗圃中三年,之所以让根扎得深些、正些,枝叶长得茂盛些,和这些园丁们的辛勤劳动是分不开的.它后来开出的鲜艳花朵,也渗透着园丁们的点点心血、颗颗汗珠.

9.4 战鼓催春

1953 年夏天,幸福的大学生活结束了.祖国的社会主义建设急需各方面的人才,陈景润这一届大学生提前一年毕业.他被分配在北京一所中学当数学教员.

实践很快就证明,他不太适合担任这个工作.尽管他在数学的学习上善于攻关,但面对着三尺讲坛,却手足无措,仿佛前面有一道难以逾越的障碍.他为此感到极大的苦恼.

一年多以后,正当他陷入困境的时候,厦大的老校长王亚南了解了这一情况,向校党委作了汇报.党委研究之后,决定让陈景润回来,由数学系安排工作.系里安排他担任教学辅助人员,负责管理数学系的教师阅览室,工作不多,阅览室又有比较丰富的图书资料,这样,他就有一个安静的环境和较好的条件从事数学的研究.

这时,厦大数学系正一派生机,朝气蓬勃.

1954 年全国综合大学会议开过之后,确定了综合大学的性质、任务、培养目标,强调综合大学的主要任务是培养理论科学与基础科学方面从事理论研究的专门人才.年轻的数学系在大好形势下,跨上骏马,奋力奔驰了.

1956 年,伟大领袖毛主席发出了向科学进军的号召,敬爱的周总理亲自领导制订了国家科学发展的远景规划.在校党委的领导下,根据这个规划,数学系制订了自己的科研工作规划,确定了 12 年科学研究的方向,雄心勃勃地提出争取在 12 年内赶上或达到国际先进水平.为了实现这一目标,全系教师通过讨论,统一思想,并提出不少切实的措施,积极创造条件,迎着困难上.

陈景润在数学系这个战斗的集体中,人们让他安心钻研,以前的老师们继续给他必要的指点和帮助,领导给他以时间保证,后来还结合他的科研方向,让他担任“复变函数论”课程的助教,使他能进一步得到锻炼,打好科研的基础.

这时，他集中力量，深入钻研华罗庚的名著《堆垒素数论》、《数论导引》.他更加顽强、坚毅，孜孜不倦.这些书，他从头到尾钻研过七八遍，重要的地方甚至阅读过40遍以上！此外，他还广泛阅读国内外数学刊物，努力吸收前人的成果.党的方针指引着他，大好的形势鼓舞着他，他认识到这是为革命、为祖国而钻研，祖国的社会主义事业需要数学！

陈景润住在"勤业斋"教工宿舍106室.这是一座矮小的平房，共有十来个小房间，住在这里的都是身体比较差或者有慢性病的单身教工，每人一小间，七平方米.这里的环境特别幽静，对陈景润那羸弱的身体和学习来说，是再适合也没有了.宿舍的背后就是一年四季墨绿苍翠的山峰，他的邻居们经常清早起来就去爬山，享受大自然的美景和清新的空气.宿舍离大海不远，游泳的季节一到，邻居们常常到海滨游泳场去，不会游泳的也爱去泡泡海水，晒晒太阳.而陈景润却惬意地遨游在抽象思维的太空，游泳在数学的海洋中.人们觉得他"怪"，好奇的人们背后议论他，好心的人们婉转地向他提意见.至于某些小小的误会，那就反而传为佳话.

有一次，夜已深了，整个"勤业斋"静悄悄的，笼罩在一片朦胧的夜色中，只有一个窗口漏出了一点微弱的光.两个担任巡逻的学生经过这里，望望这个窗口，有点奇怪：这是怎么回事？是老师在开夜车吗，怎么不把电灯开亮？怀着作为海防前线民兵所特有的警惕感，他们到窗口窥探了一下，更为迷惑不解：一个很大的黑色的灯罩，不但遮住了灯光，也遮住了灯下的人，他在干什么？这两个民兵终于去敲主人的门了.门开了，陈景润似乎刚从沉思中醒过来，惊讶地望着这两位不速之客.两位民兵弄清了是数学系的老师在演算数学，于是说明身份，笑了笑就走了.原来，陈景润因为怕邻居们议论，特地做了一个很大的黑灯罩，把灯光全部遮起来，不让邻居们知道他开夜车.灯罩很大，埋头工作的时候，把头都罩进去了.由于拙劣的手艺，灯罩做得不端正，又有漏洞，这才泄露了"秘密".

为了抓紧点滴时间学习，他把书本拆开了，放几页在口袋里，随时随地拿出来念，反复揣摩、钻研，直到烂熟了，就换几页.开会前念，空袭警报时在防空壕里念，甚至走路时也念.有人看到他手里经常拿着几页书，就怀疑了：他当图书资料管理员，会不会把公家的书撕了？后来一了解，那是他自己的书.

数学系的科研热潮激励着他.高中时代和大学时代老师在课堂上两次谈到哥德巴赫猜想问题的情景回到了他的记忆里，一个大胆然而是合理的念头开始萌动了：他也要向国际水平进军，攻下这道著名的难题.他，年轻的陈景润，能登上这样的险峰吗？他很清楚，这不是轻而易举的事，这个问题实在太难了，这是龙宫探宝，这是攀登珠峰.他在大学的三年学习，仅仅是打下了基础，在数学的海洋中，他不过初步学会了游泳，要探骊得珠，还必须深深地潜到海底；在数学

的高原上,他才走到登山的大本营,要登上珠峰,还得先进行多少次适应性的行军.

千里之行,始于足下.在深入钻研《堆垒素数论》的基础上,他的注意力合乎逻辑地集中在"他利问题"上.在这里,他迈开了新的一步.

这株青葱的数学之树,开始孕育第一朵瑰丽的蓓蕾了.

9.5 鲜花初放

"他利问题"当时是数论中的中心问题之一,它跟哥德巴赫问题一样,吸引着数论学者的注意和探讨.华罗庚在《堆垒素数论》中对这个问题进行了探讨,在1952年6月份出版的《数学学报》上的《等幂和问题解数的研究》一文中,也专门讨论了"他利问题".这个问题归结为对指数函数积分的估计,上述论文在进行了这方面的计算和估计之后,写道:"但至善的指数尚未获得,而成为待进一步研讨的问题."陈景润正是从这里出发,去敲打科学研究之宫的大门.

他思考又思考,计算又计算,觉得在前人成就的基础上,是可以获得进一步的成果的.然而,他念头一转,又犹豫了:这是著名数学家的著名著作啊!像我这样一个初出茅庐甚至还没有进人科研之门的小毛孩,能推进前人的成果吗?这样做会不会"不自量"、"枉费心机"呢?

他找"复变函数论"的主讲老师谈了自己的想法.老师热情地鼓励陈景润:"为什么不可推进前人的成果呢?不必顾虑重重了.现有的数学名著,它们的作者当然都是著名的.这些著作是他们的研究成果,但后来的年轻人如果不敢再进一步研究,写出论文来,数学又怎能发展呢?"

陈景润提高了勇气,加强了信心,在那向科学大进军的年代,向"他利问题"进军了.

在数学的海洋里,他不仅沉溺其中,而且开始往深处下潜了.他已经看不见、听不见岸上的一切,甚至水面的一切.他已经没有作息时间表,不管上班,下班,白天,黑夜,走路,吃饭,他几乎不停地、反复地构想、思索,尝试用各种可能的方法推演、运算,在一张张稿纸上书写、涂改.除了上班不得不去阅览室、买饭不得不去食堂外,他几乎哪儿也不去,人们难得看到他的身影,包括"勤业斋"的邻居们.吃饭的时候,邻居们都喜欢围着翠绿的芭蕉和竹子下面的小石桌,坐在光洁的小石凳上,边吃边聊天.而他,却悄悄地拿了粗菜淡饭,闪进那7平方米的房间,马上把门关上了.人们很难猜想他是在吃饭,还是在演算,或者同时进行这两项.只是在他进门的一刹那间,有人偶然瞥见地板上杂乱地堆积着不少涂写过的纸片或纸团,桌上杂乱地堆放着书籍和稿纸.那上面,多少复杂的符号、数字、等式、不等式,记录着它们的主人在抽象思维王国所经历的欢乐和苦恼、成功和失败.

经过多少个辛劳的日日夜夜，小房间里的地板上纸片和纸团越积越厚了，它们慢慢地凝聚、结晶，在上面形成了工工整整的稿纸——一篇关于“他利问题”的论文.

陈景润怀着激动的心情，把论文拿给教过他的李文清等老师看. 他们仔细地审阅这篇论文，觉得很满意. 接着，李文清副教授把这篇论文辗转寄给了华罗庚.

华罗庚以极大的兴趣审阅这篇论文. 他很高兴，看到了后起之秀能在他所研究的领域中有所发现，有所前进. 同时，他在这篇文章里看到了这个年轻的作者有着无限的发展前途. 在他的推荐下，全国数学会特地邀请陈景润参加 1956 年全国数学论文宣读大会，在会上宣读这一篇论文.

这篇论文是成功的，但作者的宣读却不那么成功. 8 月中旬的一天，数学论文宣读大会的数论代数分组会在北京大学的一间教室里举行. 陈景润站在讲台上，就像两年前在中学里教书一样拘谨. 下面坐着 30 多位数学家和数学工作者，注意力都集中在他身上. 他有点窘，不知道该怎么讲. 他在黑板上写下了题目，说不上几句话，又转身面对黑板，一直写起来，就像他在“勤业斋”的书桌演算一样. 不久，底下就有人摇头、嘀咕了. 他的厦大老师李文清替他暗中着急，后来，只好自告奋勇上台去，对与会者说明他的学生是不善于讲话的，并对论文的内容作了补充介绍. 接着，华罗庚也上台发言，阐述了这篇论文的意义，充分评价陈景润所取得的成果. 于是，作者口才的缺陷得到了弥补，宣读总算圆满结束了. 听众纷纷点头称是，他们为自己的队伍中又多了一位有前途的年轻的伙伴而感到高兴.

1956 年 8 月 24 日，《人民日报》报道了这次大会，特别指出：“从大学毕业才三年的陈景润，在两年的业余时间里，阅读了华罗庚的大部分著作，他提出的一篇关于‘他利问题’的论文，对华罗庚的研究成果有了一些推进.”

厦大党委很关心陈景润的工作，对他的成绩给以充分的肯定，鼓励他继续前进.

陈景润没有松一口气，他再接再厉，在数论上的三角和估计等方面开展研究工作，很快就写出了第二篇论文：《关于三角和的一个不等式》，发表在 1957 年第 1 期《厦门大学学报》(自然科学版).

在华罗庚的建议下，中国科学院数学研究所致函厦大，要调陈景润到数学所工作. 这个意见，得到厦大党委、王亚南校长和数学系的大力支持. 于是，1957 年 9 月，陈景润来到了北京，走上了新的工作岗位，开始了他科学生涯的新阶段.

数学之树已经成长了. 在开过了第一朵鲜花之后，它将进入繁盛的花期. 但是，在明媚的春光里，也要准备迎接狂风暴雨. 陈景润，他既然曾经是幸运的种

子,顽强的幼苗,经过暴风雨的洗礼,他也必将成为更加茂盛健壮的花树.这方面,用不着我们多说.我们只希望这里所介绍的他的经历,有助于促使更多科学的花树,在祖国大地上更加健康地茁壮成长.

10 告诉你一位真实的陈景润

——杨锡安

杨锡安,厦门大学数学系教授.

我和陈景润相识在1950年,那时我们一起考入厦门大学数理系(1952年分为数学、物理两系).当时读数学专业的只有3名学生,另一位是李秋秀,福建永春人,现在福州大学数学系,已退休了.到了二年级时增加一位陈孟平同学,共有4人一起毕业.大学期间,我们同住一个宿舍,朝夕相处.1957年他由厦大调到北京,我当时也正好派到北京中科院数学所学习三年,同是华罗庚先生的学生,他研究数论,我学习代数,彼此来往颇多,以后我们也几乎没有断过联系.在他成名前后,我们始终都以同学相待,亲如兄弟.可以说,我对他是非常熟悉的,也非常敬佩他.现在,陈景润的名字大家都知道,但关于他的故事却有许多不同传说.我想以我对他的了解,告诉大家一位真实的陈景润.作为他的同学,这是不可推卸的义务.

10.1 生活上非常俭朴

大学三年里,陈景润把所有心思都用在学习上,生活上非常俭朴.我的印象中,他始终穿着一件黑色学生装,戴顶黑色学生帽,穿一双黑色万里鞋.直到他成名后回厦大,也是穿着一件蓝色咔叽布列宁装和一双布鞋.当时读大学没有助学金,他家里生活贫苦,大概每月伙食费只用了3~4元左右.学校每周一次放电影,每场5分钱,他从没去看过.在校三年,他连鼓浪屿都没有去.20世纪80年代以后,他的生活明显好起来,但生活上仍然保持着俭朴的作风,学习用的一台小型收录机还是向数学所借的.生活上的清贫,并不是他真的穷到没有这样的经济能力.20世纪80年代他到美国、英国讲学,对方给了一笔讲学金,他只花了一小部分必需的开支,其余的回国后全部交给国家.是他不想改善自己的生活吗?不是的,他只是不愿意在生活上多花时间和精力.有的人对此不能理解,传说出他是个傻瓜,完全没有生活情趣.事实上,在他的心目中,只有数学的研究才能使他完全投入,生活上尽可以简单些.应该说,他是我们生活中形形色色人中的一部分,他们对科学的研究到了忘我的地步.而这部分人,是最有成功的希望,也是最值得尊敬的.每个人成功路上有各种阻碍,其中也包含抵御生活享乐的诱惑.陈景润能取得如此巨大的成就,正说明这一点.

10.2 学习上极端刻苦

在大学时,陈景润就得到一个美名"爱因斯坦",这是同学们对他那孜孜以求的学习态度给予的评价.他身体不好、几次住院,但只要身体稍有好转,便可看到他又在看书学习了.他时刻想着书中的问题,有时到了惊人的地步.有一次,从食堂回来,天下着雨,同学们都飞跑起来,而他仍独自慢步走着,我问他下雨不怕淋着吗?他说他完全没有感觉天在下雨,因为他脑海里已沉浸到书中去了.那时宿舍并没有实行按时熄灯制度,但他晚上看书,怕影响别人,常把头埋进被窝,打着手电筒看书.他几乎无法停止他对学业的思考,常常捧着书陷入沉思.有时外出,怕带书本不方便,便把书本一页一页撕下来,带上几页,有空就读.他的这个好读书的习惯,直到逝世前不久仍保持着.上大学时,学习用品缺乏,纸张都不容易得到,但对老师布置以外的习题,他都认真地去做,那些几百道的微积分题目,他全部做了下来.为了节省纸张,他仅写了简单的答案,而在粗糙的纸上做运算.在科学院的研究工作中,他的运算草稿纸可以装几麻袋,对他来说,这并不奇怪.完全可以这样说,陈景润的伟大成就,是在他极为刻苦,勤奋学习、研究的基础上得来的.这一点,常人也许不容易做到,但要达到常人所难于达到的顶峰,就要付出超常的毅力.伟大的贡献都是从勤奋中得来,陈景润为了哥德巴赫猜想奉献出毕生的精力,他一不为名,二不为利,完全是一种对真理追求的信念在支撑着他、激励着他.我想,这也许是今天学习陈景润的意义所在.

10.3 奉公守法

我们20世纪五六十年代毕业的学生,大部分在对待公与私方面,有着一种很强的自律感.奉公守法已成为我们生活中的信条.这一点,陈景润也不例外.如果说默默无闻时,还难以多吃多占,那么当陈景润名声远播,已是中科院学部委员、著名教授时,我们依然可以看到他的这一品行.1981年,厦大60周年校庆,校方邀请他和新婚不久的夫人一起来厦.我到火车站接他时,发现只是他一人下车.他对我说,我是作为校友受邀请回母校,而她(指陈夫人)又不是校友,来了影响不好.更令人敬佩的是,事先安排他坐软卧,而他坚持坐硬卧.当时北京到厦门的火车要花50多个小时,坐软卧对他来讲既不违规又舒适,但他还是选择了硬卧,而且返程也是坐硬卧.他只是觉得不能让国家多花一分钱.

前面提到20世纪80年代他曾到美国、英国讲学后,把省下的讲学金全部交给国家,也是一件很生动的例子.在美国,他仅买了一件"贵重"物品,一只欧米茄手表.但下了火车不久,他便向我借手表,我真是大惑不解,因为不久前我们在京见面时,他还告诉我在美国买表的事.后来,我才知道,原来他临走前,考

虑到厦门是个经济特区，带个这么好的手表，回来后别人会不会认为他买个偷漏税的好货，影响不好．当我把自己的旧上海表给他戴上时，他连声说，"这个好！这个好！"

陈景润出名后，特别是从美国回来后，他家里的亲戚都以为他肯定很有钱，而老家房子破旧，需要维修，他姐姐写信要他支持一下．而实际上陈景润并不富裕，他用自己的积蓄和一些稿费，凑了 2 000 元汇回家．成名后的陈景润，依然是那样俭朴、那样刻苦，但他却十分满足了．他并没有把自己的声望作为捞取名利的资本，他的所得是很微不足道的，但他却在世界科学的最前沿，为中国人赢得了一席之地，得到一枚含金量最高的金牌．那些大慷国家之慨的腐败分子，或动辄挥金如土的"富豪"们，在陈景润面前，实在应该感到汗颜．

10.4 平易近人

陈景润的名字不胫而走，广为宣扬时，他依然是过去的他．学生时代，他钻研自己的学业，自然没有陷入人际关系的是是非非之中．但他待人却是真诚的，尤其是做人的准则，他是一点也不含糊．他尊师长，爱家人，亲朋友，始终如一．只要他有新的论文发表，总要寄给过去的老师、同学阅读．方德植、李文清先生至今仍保留着陈景润给他们写的信，信中那毕恭毕敬的行文和字迹，令人感动．他回厦大时，利用会议间隙做的第一件事就是到老校长王亚南家去看望王师母，去看望过去的老师．他也到我家来看望我夫人和孩子，送上他们结婚照片，并为孩子们题字．那段时间我常到北京，每次都能在数学所的图书阅览室见到他，有次到他新婚家里去，他爱人因工作关系，晚上要很迟回家，他还亲自下厨做菜，几盘炒菜特别是西红柿炒蛋还做得蛮不错．他和夫人的感情很好，对孩子疼爱有加，是个幸福美满的家庭．给我印象很深的是他夫人对他的照料，细致入微．陈景润对自己身体并不太注意，每次要出门，起步便走，他夫人马上就会递上帽子，要他戴上．好几次都是这样，夫人一看他要外出，手中马上就会拿出帽子．陈景润把帽子戴在头上，笑在脸上，心里肯定是热乎乎的．看着他们这样一个普通而温馨的家庭，谁能说陈景润不懂得生活．陈景润其实与我们身边的普通人一样，他是我们生活中一位知书达礼的人，是一位可亲可敬的丈夫、父亲、同学、朋友……

陈景润离开我们了，这使我失去一位老同学、好同学，内心的悲痛是不言而喻的．现在，可能更多的人在思索着这样一个问题，究竟陈景润值不值得学习．为了征服一个世界数学难题，他毕其一生之功，得到的又是那么少，值得吗？有现实意义吗？自己能做得到吗？这些问题，读者可以自己去寻找答案，我的这些文字，是想让大家了解一个真实的陈景润．我想，像他这样的人，世界上应该是越多越好．终究要成就一项事业，靠投机取巧非长久之计，倒是只有孜孜不

倦、刻意追求的人，才有希望到达光辉的顶点．在这方面，陈景润给了我们一个很好的榜样，也是值得我们学习的．

1997年1月14日于厦大海滨

11 陈景润精神魅力永存①

温红彦，《人民日报》记者．

——温红彦

哥德巴赫猜想——"1+1"，这道世界各国科学家为之前赴后继奋斗了250多年的古典数学难题，曾被一位中国人在20世纪60年代中叶证明到最接近"1+1"的地步——"1+2"．他的成功为中华民族在国际数学领域争得了一席光荣之地，他攀登科学高峰的勇气更成为改革开放初期鼓舞人们迈步新长征的精神动力，他，就是大家熟知的著名数学家陈景润．

昨天(19日)，他去了．带着对"1+2"的满意微笑和对"1+1"的无限向往．由于受帕金森综合征的长期折磨，近日又因肺炎病情加重，他离开了我们，离开了那个让他眷恋的数学王国．

全世界公认，陈景润的"1+2"是数论领域中"筛法理论的光辉顶点"，被国际数学界称为"陈氏定理"．前天深夜，著名数学家杨乐、王元等看望了弥留之际的陈景润，今天，杨乐怀着沉痛的心情对记者说："陈景润是数学界一位非常重要的学者，他对数学的热爱如醉如痴，选择了哥德巴赫猜想这条极为艰辛的研究道路，他证明出的'1+2'，是我国数学界近几十年来取得的一项重要成果．"中科院数学所所长龙瑞麟说："陈景润的去世，是我国数学界的重大损失，他超人的刻苦和勤奋、执著的治学精神，将继续鼓舞我们和有志于献身科学的年轻人．"

20多年来，陈景润一直是热爱科学的年轻人的精神偶像．中科院数学所代数数论室的田卫东博士说："我是上中学时读了陈先生的事迹才走上这条道路的．"顺义出租汽车公司41岁的司机付铁玉告诉记者，在他上初中时就听过陈景润做的报告．他说："至今还记着这样一句话，'学习一定要刻苦，要忘我'，我常用这句话教育我的孩子．"

一天来，到陈景润的居所致哀的人络绎不绝．统战部、中组部的领导同志及中科院的科学家们对陈景润的去世表示沉痛哀悼．胡锦涛同志办公室打来电话，希望家属节哀．北大附中初二年级的陆望老师，带着学生们来到陈景润家，信宇轩同学对记者说："老师常讲，真实的知识是最宝贵的，我们要发扬陈景润的拼搏精神，将来为国家做出贡献．"

① 原载《人民日报》1996年3月21日．

从事科学研究是陈景润的全部生活和精神寄托.在陈景润寓所简朴的灵堂前,他的妻子由昆告诉记者,春节前后,他常给看望他的同行、领导唱《小草》这支歌,他说自己要像小草一样奉献给春天.她说:经北京医院建议,全家商量,就让他实现最后的愿望——遗体解剖,为科学事业做最后一次奉献吧!"

陈景润弥留之际,由昆带着上初二的儿子陈由伟来到病床前,她沉痛而深情地说:"你放心去吧,我一定把儿子抚养成人,一定向热爱科学的年轻人转告你的意愿,希望他们刻苦学习,勇攀高峰."陈景润微微点了点头,似乎还想尽力睁开双眼,但他太疲倦了,他需要休息.

安息吧!陈景润,您的精神魅力永存!

12 陈景润精神魅力永存(续)①

——温红彦

下雪了.春分已过,本不该下雪的.

雪如杨花,纷飘于春天的早晨;又如挽幛,静落在大地的怀抱.

几天来,陈景润去世的消息通过电波、报纸,传遍了全国.人们为失去这位在数学上卓有成就的学者而哀痛,为失去这位以勤奋著称,影响了整整一代人的楷模而惋惜.

多数人了解陈景润,是从读了作家徐迟的《哥德巴赫猜想》开始的.22日晚上,记者见到了刚刚出院在亲友家养病的徐迟.徐老八十有二,额顶皆白,他伸出颤抖的手,把写就的《悼念陈景润》一文递给记者.文章是这样写的:

"著名数学家陈景润先生去世,这是我国数学界的一个巨大损失.人们为他致哀,我也默默地悼念他.18年前我写他的一篇文章《哥德巴赫猜想》在《人民文学》1978年元月号上发表.紧接着上海《文汇报》和党中央的《人民日报》转载了……他的事迹就为广大读者所知.此后我和他再没有往来了,但我知道他很好,很忙……我不敢干扰他,没有想到突然的消息传来,他已去世.我深深地悼念他,祝他的灵魂平安!"

徐迟的哀痛是深沉而凝重的.他谈起当年采访陈景润时的情景,仿佛就在昨天.

这几天,到陈景润居所悼念的人像流水一样源源不断,鲜花已摆满灵堂,花丛中露出陈景润微微含笑的彩照.从福州赶来的陈景润的小妹陈景馨告诉记者,她这哥哥从小就爱读书,兄妹六人,只他最瘦弱也最用功.陈景馨说:"他在堂兄弟中排行第九,邻家的孩子都亲切地叫他'九哥'.因为不论问什么数学题,

① 原载《人民日报》1996年3月24日.

九哥都会，而且肯帮助每一个人.当年的孩子如今都老了，知道九哥去世，他们都哭了，我来时他们念起九哥的好处，让我在九哥的灵堂前一定谢谢他小时候对他们的帮助."

陈景润的儿子陈由伟今年15岁，既聪明又懂事，静静地守在爸爸的遗像前.他告诉记者，有一次，爸爸让他算一道技巧题，从1加到9等于多少，他想了很久也不会.后来爸爸耐心地告诉他，用两头相加的办法算就很简单，等于45，并批评他不用功.陈由伟说："我现在知道用功了，爸爸却离我们而去.我希望明年扫墓的时候，能以最好的成绩去见爸爸."他还告诉记者，妈妈由昆最辛苦，以后要帮妈妈做更多的事情.

当今水平的医学穷尽其能，也未挽留住这位数学家的生命.中科院系统研究所研究员林群最了解陈景润，他们同是福州人，又同在厦门大学读书，毕业后又先后来到中科院数学所工作.林群回忆说，当时他们同住一个单身宿舍，他每天夜间起床小解时，都会看到陈景润坐在门厅的地上，上身靠墙，在那里算着.如果哪天夜里看不到，一定是他住进了医院."他吃的药可以用公斤计算，以至于到最后，任何药物对他都不起作用了."中国科学报的《院士心迹》专栏介绍的第一个院士就是林群.在"你最敬佩的人是谁?"一栏中，林群说他当时毫不犹豫地写上了"陈景润"，"因为在我接触的人中，还没有看到一个比他更有毅力."

陈景润生前常说的一句话是："时间是个常数，花掉一天等于浪费24小时."他就是在对每个人都相同的时间常数下，做出了超出别人几倍的成就.用作家徐迟的话说，他对哥德巴赫猜想的研究是"空谷幽兰"、"高寒杜鹃"、"冰山上的雪莲"、"抽象思维的牡丹".

数学家王元和潘承洞最了解他的研究成果.潘承洞教授肯定地告诉记者："30年来全世界数论专家没有一位超过他，因为他把毕生经历都用在数学研究上了."陈景润一生发表学术论文50多篇，著述四本，在近代解析数论的许多重要问题上都取得了重要成果.

"他思考问题比我们都深刻，当年华罗庚教授就是看中这一点，才把他从厦门大学调到数学所的"，王元教授说，"搞科学的人都比较刻苦，但他的刻苦程度不是常人能比的，他能证出'1+2'，在于有一步关键性的证明，这一步全世界研究数论的人都没有想到.他的这一步是美妙的一步，天才的一步，也是艰难至极的一步!"是啊，数学本身是理性思维和逻辑思维的精髓，它使得自然科学其他领域的巨大进步成为可能.数学家的研究本来就是在挑战人类智力的极限，而中国的数学家们愿意这样说：陈景润是在挑战解析数论领域250年智力极限的总和！尽管这说法在数学概念上是蹩脚的.

21日午后去中关村采访，天公也在簌簌地落泪，落的是丝丝细雨.在换车去北京大学时，路过一位卖花女子的身旁，被花篮里一捧独具哀婉情调的淡紫色碎菊吸引住了."买花吧"，我说买过了，刚从一位死者家中出来，又情不自禁

地问她:"你知道陈景润吗?""知道的,上小学时老师讲过,他是数学家."她还告诉我她是安徽巢湖人,叫曹云霞,31 岁.是啊,从追随他继续数论研究的博士,到一个乡下的卖花女子,谁不知道"陈景润"的名字呢?

在北京大学,采访了 94 级数学系的几位学生.来自湖南的罗武安同学曾获 1994 年全国奥林匹克化学竞赛二等奖,他说:"我们即使学数学,也不可能对陈景润的数论研究都了解,但我们理解他奋发向上的精神,佩服他勇摘数学皇冠明珠的毅力.他为中国人争了光,我们学数学的人感激他."

作家徐迟对科学家的艰辛有更多的体会.他说:"理解一个人是很难的,理解一个数学家更不容易."中国社会科学院政治学所副编审王焱也深有同感,王焱说:"徐迟的报告文学塑造了一个科学家的形象,具有鲜明的时代特征,这使得科学家第一次在人民大众中获得广泛的认同和理解."他举了一个典故,说明有成就的科学家都有一种脱俗的境界:古希腊一位天文学家仰头看天,不小心掉在坑里,他的婢女讥笑道:地都没看好,还想看天? 黑格尔对这一典故有个很好的诠释:虽然婢女不会掉在坑里,但也永远不会发现宇宙的奥秘,王焱说:"没有忘我的境界,就没有科学,也就没有陈景润的'1+2'."

中国社会科学院社会学所陆建华博士是这样认为的:"陈景润的成就和人生道路警醒人们,现在的社会应该是一个承认专业成就的社会,陈景润就是在常人认为枯燥的数学领域,在自己对专业规范的理解、掌握和应用的基础上进行了创新,而没有妄想,没有仅凭热情。"他认为,强调专业成就至上是一股不可抗拒的时代潮流,它需要人们不论干什么,都得有一定的专业技巧和能力.经理必须懂企业管理,工人要掌握操作技能,这是现代人的必备素质.

是的,在实施"科教兴国"的今天,提高全民族的科学文化素质要靠每一个人的自身努力.陆博士说:"从陈景润身上我们看到,不但要有拼搏精神,还要培养自己的专业成就意识——追求合理,追求理性,追求高效率,这正是培养跨世纪人才的一个重要因素."

几天的采访收获颇丰,让人再一次认识了陈景润,感受到他那永恒的精神魅力.

13 关于哥德巴赫猜想的报道——是正确认识哥德巴赫猜想的时候了①

——温红彦

说起哥德巴赫猜想,恐怕中国有相当一部分人熟悉这个词,并会把它同数

① 原载《人民日报》,1992 年 2 月 17 日.

学家陈景润、同“1+1”、同“皇冠上的明珠”联系起来.

自从1977年报告文学《哥德巴赫猜想》问世后,神州大地不知有多少人向往着摘取那颗灿烂的“明珠”.十几年来,全国各地自称证明出哥德巴赫猜想的人数以千计,关于这种报道也时常见诸市井小报甚至一些大报名刊.但最后证实这些全是谬误.十几年来,光是中国科学院数学所就收到约100麻袋这样的论文,但没有一篇论文正确.这种怪现象最近又有抬头之势.

是正确认识哥德巴赫猜想的时候了.日前,中科院数学所特意邀请了北京十几家新闻单位,就此问题举行了记者招待会.由数学所所长杨乐主持,王元、潘承彪等7位数学家参加.会上,著名数论专家王元教授介绍了什么是哥德巴赫猜想,为什么要研究它,研究的难度有多大,其他专家也都谈了自己的看法,以求同新闻界、同热衷于“猜想”的人们达成共识.

哥德巴赫猜想是数学中的一个古典难题,它可以表述为:凡大于等于4之偶数必为两个素数之和(“1+1”是它的简单表述,即一个素数加一个素数).1742年,德国数学家哥德巴赫发现这个现象后,由于无法用严格的数学方法证明命题的正确性,故只能称之为猜想.他写信给当时瑞士大数学家欧拉,请他证明.欧拉一直到离开人世也没证出来,但他相信这个猜想是对的.从此,中外数学家们高擎火炬、辈辈相承地研究这个难题.

20世纪以来,研究有了突破性进展:1920年,挪威数学家布朗证明出“9+9”;1956年,原苏联数学家维诺格拉多夫证明了“3+3”;1957年,我国数学家王元证明出“2+3”;1962年,我国数学家潘承洞证明了“1+4”.到1966年,我国数学家陈景润证明的“1+2”在世界数学界引起轰动.“陈氏定理”的内容是:充分大的偶数可表示为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和.这就是至今有关“猜想”证明的最好结果.

哥德巴赫猜想不是一个孤立的数学问题.当年华罗庚教授倡导并组织研究这个难题,是有深邃的战略眼光的,因为它是带动解析数论,最终带动数学向前发展的重要推动力.如果孤立地看待哥德巴赫猜想,或把它当作一个数学游戏,可以随便猜一猜,那就偏了.

目前看来,“1+1”这颗灿烂的“明珠”并非距我们“一步之遥”,而仍在遥远的“天边”,在用今天最先进的“宇航工具”都不易到达的地方.当代中外研究数论的专家终不能使“猜想”变为“定理”,实在不是由于他们不思努力、不想摘那“皇冠上的明珠”.数学理论有一个由粗到精的逻辑严密化过程,要靠长期的积累,有时会长达数十年,几百年,甚至上千年.曾与其兄潘承洞在数论方面一起做出重大贡献的数学家、北大教授潘承彪感慨地说,搞数论研究的人谁不想摘取那颗“明珠”啊,但那只是一种理想,按目前国际数学界的理论发展水平,看来在相当时期内是难以达到的.王元教授编辑了《哥德巴赫猜想》一书,汇集了世界上最优秀的论文20篇.他在该书前言中写道:“可以确信,在哥德巴赫猜想的

研究中,有待于将来出现一个全新的数学观念."

这,已成为中国数学界同仁的共识.

这次记者招待会的举行,于科学家、于新闻界、于迷恋"猜想"的人们都是有益的.如果科学家们继续保持沉默,无异于让那些毫无学术价值的论证继续干扰科学家的研究,损坏新闻界的声誉,使更多的人走入歧途.

说那些论证毫无学术价值是有充分根据的.杨乐教授解释说:"我们看过的宣称已证明出这一难题的全部来稿,没有一处可取.从严格意义上说,不少作者连中学数学都没学好.中学数学是2 000多年前的成果,微积分的出现也离我们300多年了.200多年来,尤其是近几十年,数学各分支有了极大的发展,取得了极其丰富的成果.在这些成果和方法的基础上,大批中外数学家成年累月地努力尚未解决的难题,如果可以靠加加减减和微积分去解决,那么近几百年的数学发展不是等于零吗?大批数学家的努力不是等于零吗?!这些人的做法好比手持弓箭参与海湾战争、手持斧锯去造航天飞机."

科学家们还讲到一些令人哭笑不得的事.不久前,一位外地老同志退休后来到北京,跟潘承彪教授说他要搞哥德巴赫猜想.潘承彪劝他最好还是做点别的事,他却说"别的事不太好做".青年数学家贾朝华说,许多人拿了论文来让他提意见找找错,一看文章,找错几乎变成了"找对",有的竟连一处对的地方都找不到.

杨乐教授最后说:"我可以很负责任地告诉大家,这样的作者无论花多少时间,也绝对搞不出哥德巴赫猜想.如果有谁真的热爱这一'猜想',首先要学好高等数学,认真钻研数论,掌握这个问题的重要文献,否则,就不要在这方面浪费自己的宝贵时间和有限的精力了."

这,也是目前中国数学界同仁的共识.

但愿它还能成为真正热爱数学的朋友们的共识.

14 话说哥德巴赫猜想①

——刘志达 吴雅丽

最近,我们陆续从读者来信和一些材料中看到,有人宣称自己"已经得到了世界著名数学难题——哥德巴赫猜想的完整证明".我们怀着半信半疑的态度把有关材料寄给了著名数学家、学部委员王元教授,想征求一下他的意见.王教授很快回了电话:"这种类似的论文和信件我们已收到不下几十麻袋,都是错的,不知浪费了多少人的宝贵时间.我的意见早说过了,这种问题不是可以随便

① 原载《光明日报》,1992年2月14日.

搞的."

我们当即决定去数学所就此事进行采访.没想到,很多家新闻单位的记者也闻风而至,我们的采访便变成了一个记者招待会.杨乐、王元、潘承彪等许多著名数学家接待了我们.

王元首先介绍了什么是哥德巴赫猜想:一个大于等于4的偶数,它就可以写成两个素数之和.1742年,德国数学家哥德巴赫对许多偶数进行了检验,都说明这是确实的,但因为尚未经过证明,只能称之为猜想.哥德巴赫猜想的简单表述即"1+1".我国数学家陈景润经过不懈努力,于1966年证明出"充分大的偶数都是一个素数加上一个不超过两个素数的乘积",即所谓的"1+2"."充分大"到底有多大?用现在的方法是算不出来的,只知有那么个数存在就是了.

王元教授接着说,我们为什么要研究哥德巴赫猜想?因为它可以带动数学发展.华罗庚教授在20世纪50年代提出这个选题时认为,通过对"猜想"的研究,可以推动解析数论的发展.事实上,解析数论中的两个重要方法——筛法和圆法,就是在哥德巴赫猜想的研究中发展和完善起来的.当时,国外只证明到"4+4",距离"1+1"还有很大距离,我们可以做出成绩.我国也确实因此造就了一批数学家,其中包括3名学部委员:王元、陈景润、潘承洞.今天,再研究这个问题,难度就大多了.在国外也有个别人还在研究这个猜想,但不像我国有如此多的人热衷于此,而这些热心者大多数没有多少数学基础,这是个怪现象.

曾经与其兄潘承洞一起在解析数论研究方面取得过重要成果的数学家潘承彪说,自从1977年徐迟关于陈景润的报告文学发表后,不知有多少人迷上了哥德巴赫猜想.这类稿子我看过很多,有时是当作政治任务来看的,但那些方法都是错的.不久前有位地方官员退休下来,也研究起哥德巴赫猜想,他拿了"论文"来让我看,我马上指出他的错处,并问他为什么搞这个难题,他说别的不好搞.我给了他一本王元先生编的介绍"猜想"的书,让他先去看看.结果他回去不久又给我寄来第二篇"论文",说这回改对了,弄得我哭笑不得.数学是一门严肃的科学,是循序渐进的,你不知道前面的东西,就不可能证明后面的东西.

数学学报常务主编龙瑞麟研究员感慨更多,他说,徐迟的文章出来后,我们每年收到大量关于哥德巴赫猜想的稿件,简直是"群众运动",根本看不过来,因此,我们学报有个不成文的规定,一般不处理这方面的稿件.有些人声称他的方法可以引起数学界革命,而且和相当一级的领导打了招呼,让我们看,结果没一篇对的.

中科院数学所所长、学部委员杨乐说,北京一共有5位解析数论专家,今天到了王元、潘承彪和我们所副研究员贾朝华3位,陈景润和另一位专家身体不好没有来.我们为什么这么重视这件事呢?因为就我们看到的这些稿件,我可以斩钉截铁地告诉大家:这样的作者绝对搞不出哥德巴赫猜想,因为他们的工具不行.如果一个人拿着锯子、刨子就想造出航天飞机,这能让人相信吗?所以

有人拿着一摞稿子非让我看不可，我只用了一分钟，就告诉他，你是错的.他不高兴，以为我不负责任.其实我就是看了他用的什么工具，他只是用了加加减减、微积分，就等于用的是锯子、刨子.也许有人说自己的能力比陈景润强，这也不是不可能.但是在现代数学研究中，即使很普通的成果，也需要长期的努力学习，打下良好的基础，同时需要对所研究的领域和课题已有的成果、方法和最新文献有较好的掌握，还要在所研究的课题上下一番苦功夫.哥德巴赫问题，稍做解释任何人都能懂，但要在数学上予以证明，是极端困难的.中外数学家历时200多年尚未最终解决，现在业余爱好者纷纷上阵，好比说踢足球，国家队输了，成千上万的球迷痛心疾首，但还没一个人能说，你下来，我上去给你踢两脚.更何况数学训练比足球训练需要更长的时间和更多的非先天性因素.

话说到这里已经很明白了.我们问杨所长，陈景润对哥德巴赫猜想的研究是不是有什么新进展.他告诉我们，陈景润是一个优秀科学家，他搞的数论研究十分艰深，他得出的“1+2”成果非常辉煌.目前他患了帕金森综合征，很不好治.如果他有精力，他还会从事数论研究的.

31岁的青年数学家贾朝华说，我也看过很多这类的稿子，有的命题都没搞清，牛头不对马嘴，有的甚至全文都挑不出对的地方.

杨乐说，这么说吧，谁能跑百米破10秒纪录，国家体委心里是有数的，那么数论方面谁可能取得突破性进展，我们数学界心中也是有数的，不会埋没人才.何况我们国家现在是开放的，如果有谁说埋没了自己，他可以把论文寄给国外数学杂志.

据我们所知，以上意见，不仅仅是这几位数学家的看法，而是数学界大多数人的看法.著名数学家陈景润在1988年出版的《初等数论》的前言中也说过这样的话：“一些同志企图用初等数论的方法来解决哥德巴赫猜想及费马大定理等难题，我认为在目前几十年内是不可能的，所以希望青年同志们不要误入歧途，浪费自己的宝贵时间和精力.”

15 著名数学家呼吁——业余数学爱好者不要去钻哥德巴赫猜想等问题①

——满桂芳

日前，著名数学家王元、杨乐、潘承彪等发出呼吁：“请业余数学爱好者们不要在解诸如哥德巴赫猜想等数学难题上下功夫，这会白白浪费他们宝贵的时间和精力.”

① 原载《北京日报》，1992年2月17日.

自从20世纪70年代关于哥德巴赫猜想的报告文学发表后，引起了社会上许多人对这一问题的兴趣，他们之中的一些人不惜耗费大量的时间去钻研这些问题，仅中国科学院数学所这些年来接到有关宣称解开此类难题的稿件、论文就有近万件.

杨乐、王元等充分肯定了这些同志希望为国争光的精神，但是他们认为，要从数学上证明哥德巴赫猜想是极端困难的.这是一个古典难题，中外数学家经过两百多年的努力，尚未最终解决，现在的业余爱好者大多数想靠中学代数或者微积分来证明，这是绝对不可能的.

中学代数和微积分都是几百年前的东西，而近两百年，尤其是近几十年，数学发展迅速，有了二十多个二级学科.每个二级学科又形成了极其丰富的内容、成果、方法，运用这些最新的成果和方法，大批中外数学家成年累月地努力尚未解决哥德巴赫问题，试想，用三四百年前的工具，解决已发展到现在、有那么多工具还没解决的问题是可能的吗？这就像用锯、刨子等工具去造火箭一样，根本是不可能的.科学不能存有任何侥幸心理，这些著名数学家不希望那些同志在这个问题上浪费宝贵的时光.

当然，如果有人，特别是青年人立志从事数学研究，他们是非常欢迎的.他们告诫青年人，在现代数学研究上即使是做出很普通的成果，也需要经过长期的努力学习，打下良好的专业基础，对所研究的领域和课题已有的成果、方法和最新文献有较好的掌握，在所研究的课题上下一番苦功夫，除此之外，是没有别的途径的.

16　证明“1+1”还需新手段，业余爱好者切莫入歧途①

——荣　跃

在徐迟那篇著名的报告文学《哥德巴赫猜想》问世14年后，热心的读者们终于被浇上了一盆冷水.“陈景润从未去证明‘1+1’，甚至都没想过自己能证明‘1+1’.”刚卸任的中国数学会理事长、著名数论专家王元教授2月13日向新闻界宣布：“目前，中国数论界没有一个人企图证明哥德巴赫猜想.”

自从德国数学家哥德巴赫提出“一个大于等于4的偶数，可以写成两个素数之和”这一猜想(简单表述即“1+1”)后，国内外大批数学家经过250年的研究，终于确认，运用现有数学方法很难摘下这颗“数学皇冠上的明珠”，需要寻找新的、更先进的手段.

---

① 原载《中国青年报》，1992年2月17日.

然而,近些年在中国却有成百上千名业余爱好者自称证明了"猜想".几十麻袋的"猜想"论文寄到中科院数学所、数学学报编辑部."而且不少人纠缠得非常厉害."数学所所长杨乐教授迫不得已召开这次新闻发布会来排除干扰.

"这些业余爱好者的来信来访,不仅影响了研究人员的正常工作,也严重损害了科学的声誉."31 岁的数学所副研究员贾朝华颇有些感慨,"严格地说,他们大多数连中学数学都未学好,证明中大部分错误不超出中学常识范围."

有人说:"我们那么多人,万一证出来,怎么办?"杨乐斩钉截铁地回答:"不论这些爱好者有多少人,花多少时间,都证明不了哥德巴赫猜想.因为他们用的工具不行.如果有人要蹬着自行车上月球,谁也不会相信.所以,有人拿来一摞论文,我只看了一分钟就说,你是错的.他以为我不负责任.其实我就是看看他用的什么工具.他用的只是初等代数、几何、微积分,这就等于用的是自行车,想登月球是不可能的."

杨乐指出:"数学家出成果的最佳年龄是三十几岁,攻克数学难题需要优秀的青年数学家."他谆谆告诫有志攻数学难题的青少年,选择正确的成才之路,至少具备三条:(1)大学数学系的严格训练;(2)掌握所研究领域的重要成果、方法、文献;(3)在所研究课题上下一番苦功夫.他说:"遗憾的是,这一大批爱好者几乎毫不例外地连条件(1)都不具备,怎么会取得成功呢? 国内足球爱好者不下几千万,为什么没有一个宣称他踢得比马拉多纳还要好? 这是最浅显的道理,何况数学训练比足球训练还需要更长的时间."

杨乐代表中科院数学所宣布,今后,对这类命题的论文原则上不予受理,同时希望领导机关、新闻单位不要再转来此类信件.杨乐表示,他们绝无压制人才之意.他补充说:"国外有两百多家数学杂志,如果有人不相信,可以把论文寄去."

17 数学家尚且无奈,业余者岂能称雄①

——李大庆

对相当多的中国人来说,哥德巴赫猜想一词并不陌生.20 年前,著名作家徐迟在《人民文学》1978 年第一期上,发表了报告文学《哥德巴赫猜想》.随后,《人民日报》、《光明日报》、《解放军报》等都予以转载.紧接着,全国许多家报纸和电台都转载和连播了这篇报告文学,大、中学教科书也纷纷收入此文.一时哥德巴赫猜想一词弥漫于千家万户,那个文弱书生陈景润成了家喻户晓的"明

① 原载《科技日报》,1998 年 2 月 13 日.

星”.

如今20年过去了，那个报告文学《哥德巴赫猜想》中的人物陈景润已于1996年3月19日撇下他钟爱的数学，撇下他的妻儿，骑鹤而去；《哥德巴赫猜想》一文的作者徐迟也撂下他那支“划过了几十年逝波”的笔，追随陈景润撒手人寰.

17.1 研究仍无进展

20年前，徐迟的报告文学使不少中国人都知晓了陈景润是全世界离那颗数学皇冠上的明珠最近的一个人.以当时人们的感觉，这颗明珠仿佛已是陈景润的囊中之物，摘取它指日可待.然而20年过去了，中科院院士、数学所研究员王元在接受记者采访时说，到目前为止，哥德巴赫猜想没有什么新进展，还停留在陈景润的那个(1+2)的水平上.

哥德巴赫猜想是一个很神奇的数学问题，只要具备小学三年级的水平就能理解它.18世纪上半叶，德国数学家哥德巴赫发现每个不小于6的偶数都是两个素数之和.200多年来，就是这道连小学生都能理解的题却难倒了无数的数学家.

20世纪20年代，挪威数学家布朗用一种古老的数学方法“筛法”证明了每一个大偶数可分解为一个不超过9个素数之积与一个不超过9个素数之积的和(简称9+9).从此，各国数学家纷纷采用筛法去研究哥德巴赫猜想.1924年德国数学家拉德马赫尔证明了(7+7)；1932年英国数学家埃斯特曼证明了(6+6)；1938年原苏联数学家布赫夕塔布证明了(5+5)，1940年他又证明了(4+4)；1956年原苏联数学家维诺格拉多夫证明了(3+3)；1958年我国数学家王元证明了(2+3)；1962年我国数学家潘承洞证明了(1+5)；同年，王元、潘承洞又证明了(1+4)；1965年布赫夕塔布、维诺格拉多夫和意大利数学家朋比尼都证明了(1+3)；1966年5月，我国数学家陈景润证明了(1+2).在外行人看来，(1+2)与(1+1)仿佛只有一步之遥.但王元说，(1+2)与(1+1)的距离其实很远很远.陈景润是吸收了全世界关于哥德巴赫猜想60年的成果，再加上陈景润的天才创造才把哥德巴赫猜想推进到(1+2)的水平上.王元认为，使用目前的数学方法是不可能解决哥德巴赫猜想的.以他个人的看法，估计几十年内哥德巴赫猜想不会有什么新进展.

17.2 备受业余爱好者青睐

20年前，徐迟以他的报告文学《哥德巴赫猜想》一文“为中国的知识分子平了反”(王元语)，为科学正了名，向人们吹响了进军科学的号角.与此同时，也使哥德巴赫200多年前的猜想在中国不少数学爱好者的头脑中安家落户.

难以计数的中国人加入了证明这一猜想的行列.

王元先生说,《哥德巴赫猜想》发表后,他和陈景润不知到底收到了多少封讨论哥德巴赫猜想的来信,也不知有多少人宣称已经解决了这个问题.时至今日,中国科学院数学所几乎每天还能收到这样的来信.在数学所业务处,记者看到好几大纸箱的讨论猜想的来信,处长陆柱家研究员对记者说:"这些来信大概除了我之外没有人去处理它.因为哥德巴赫猜想虽然很简单,但要证明它依然很复杂,非专业人员看不懂,专业人员又没有时间整天埋在这里处理这些来信."陆处长曾给不少人回过信,告诉他们正确的途径是先写出论文向学术刊物投稿,如果编辑部认为有价值会请专家审稿的,数学所的研究人员都有自己的研究工作.然而,不断有人寄信来要求鉴定.有人即使接到了陆处长的信依然不屈不挠地来信.

曾有一天,数学所来了一位30多岁的妇女,自述高中毕业.她还带着自己的孩子.她说自己证明了哥德巴赫猜想,希望数学所鉴定一下.陆处长说让她写成论文寄到杂志社去,但她不止一次地来请求.

王元先生说,有许多人来信与他讨论哥德巴赫猜想,有的人还往他家里打电话讨论,更有甚者,有人不知怎么知道了王元家的地址,上门非要与王元讨论哥德巴赫猜想,弄得王元哭笑不得.王元说:"那些研究哥德巴赫猜想的业余数学爱好者,往往是低层次的,没有受过严格的数学教育.像一般大学数学系的毕业生几乎都没有搞哥德巴赫猜想研究的,因为他们都知道它的难度."

业余数学爱好者究竟能不能证明这一猜想呢?徐迟在《哥德巴赫猜想》一文中描写陈景润第一次听到哥德巴赫猜想的情景时写到:"当老师介绍了这一猜想后,学生们吵吵嚷嚷地认为没什么了不起.第二天就有几个相当用功的学生给老师送来答案,宣称哥德巴赫猜想已经证明."老师说:"你们算了吧,白费这个劲儿干什么?你们这些卷子我是看也不会看的,用不着看的.那么容易吗?你们是想骑着自行车到月球上去."数学所陆柱家处长解释说,如果一个人没有良好的高等数学基础,不了解一些非常现代的数学方法就想证明哥德巴赫猜想,就好比拿着改锥、锯、刨子造一架航天飞机,你说你造出来了,谁信呢?假如能用初等数学的方法证明,那么也早就被人证明了.

北京师范大学数学系惠昌常教授对记者说,他曾经见过一些业余数学爱好者号称攻克哥德巴赫猜想的论证.他说那些论证往往是有问题的.数学方法讲究的是严格的逻辑论证和推导,而那些号称攻克哥德巴赫猜想的论证往往是想当然的推理:因为今天上午阴天,所以下午肯定要下雨.假如是这样论证的话,那么从数学上讲结论是不能被承认的.

数学所收到的关于哥德巴赫猜想的来信五花八门.湖北武汉市的一位数学爱好者给数学所寄来了一封信,他仅用了普通信纸的14行就"证明"了哥德巴

赫猜想，而陈景润证明(1+2)的论文还有20多页呢！江苏南京的一位数学爱好者在给数学所的信中这样写到："过去我根本不敢碰哥德巴赫猜想，这几年倒来了兴趣，无事可做，搞点有钻头的东西，锻炼脑子也是好的．现在我把我的研究结论寄来，目的当然不是祈望成'家'，只请你们在备忘录上记一笔．将来有那么一天，出来一个'大权威'，他得出的结论与我的相似，你们可以证明一下：这个结论他不是第一个．"广东韶关的一位数学爱好者，在1996年底给数学所业务处的信中写到，他给某杂志寄的论文已8个月了，仍无结果，"为使审稿工作简单明了，作者愿出资委托贵处举办一个答辩会．答辩规模为：邀请20名专家，每一专家审稿费及出场费200元．租场地、印刷、劳务及一切会务费用均由作者承担．"

许多业余数学爱好者都强调他们研究哥德巴赫猜想是为国争光，有人甚至说："陈景润死了，我来接班．"王元先生对这些人的评价是：与1958年"大跃进"时期的"人有多大胆地有多大产"有异曲同工之处．王元先生劝告那些正在从事哥德巴赫猜想研究的业余数学爱好者不要再白白耗费时间去做无谓的探索了．

迄今，哥德巴赫猜想依然是一个未解之谜，数学家们依然还看不到证明它的"光明"前途．不过在各国数学家们已走过的追逐哥德巴赫猜想的探险路上，中国数学家们做出过巨大贡献，并且保持着冠军头衔．1996年，德国数学家Volke教授曾到中科院数学所访问，他说："中国数学家对哥德巴赫猜想的贡献那么大，如果哥德巴赫还活着，我猜想他一定会首先选择到中国来访问．"他还赠送给数学所一件礼物：哥德巴赫与欧拉关于哥德巴赫猜想的通信的复印件，以表示他对中国数学家的敬意．

报告文学与新闻报道

第十二章

1 哥德巴赫猜想[①]

——徐迟

陈景润是福建人，生于1933年，当他降生到这个现实人间时，他的家庭和社会生活并没有对他呈现出玫瑰花朵一般的艳丽色彩．他父亲是邮政局职员，老是跑来跑去的．他母亲是一个善良的操劳过甚的妇女，一共生了12个孩子，只活了6个，其中陈景润排行老三．上有哥哥和姐姐，下有弟弟和妹妹．孩子生得多了，就不是双亲所疼爱的儿女了．他越来越成为父母的累赘——多余的孩子，多余的人．从生下的那一天起，他就像一个被宣布为不受欢迎的人似的，来到了这人世间．

他甚至没有享受过多少童年的快乐．母亲劳苦终日，顾不上爱他．当他记事的时候，酷烈的战争爆发．日本鬼子打进福建省．他还这么小，就提心吊胆过生活．父亲到三明市，一个邮政分局当局长．小小邮局，设在山区一座古寺庙里．这地方曾经是一个革命根据地．但那时候，茂郁山林已成为悲惨世界．所有男子汉都被国民党匪军疯狂屠杀，无一幸存者．连老年的男人也一个都不剩了．剩下的只有妇女，她们的生活特别凄凉．逃难进山来的人多起来．这里飞机不来轰炸，山区渐渐有点儿兴旺．却又迁来了

① 原载《人民日报》，1978年2月17日．

一个集中营.深夜里,常有鞭声惨痛地回荡.不时还有杀害烈士的枪声.第二天,那些戴着镣铐出来劳动的人,神色就更阴森了.

陈景润的幼小心灵受到了极大的创伤.他时常被惊慌和迷惘所征服.在家里并没有得到乐趣.在小学里他总是受人欺侮,习惯于挨打,从来不讨饶.这更使对方狠狠揍他,而他则更坚韧而有耐力了.他过分敏感,过早地感觉到了旧社会那些人吃人的现象.他被锻造成了一个内向的人.他独独爱上了数学.演算数学习题占去了他大部分的时间.

当他升入初中的时候,江苏学院从远方的沦陷区搬迁到这个山区来了.教授和讲师也到本地初中里来兼点课,这些老师很有学问.他喜欢两个外地的数理老师.外地老师倒还喜欢他,人们对他歧视,拳打脚踢,只能使他更加爱上数学.枯燥无味的代数方程式却使他充满了幸福,成为他唯一的乐趣.抗战胜利了,他们回到福州,陈景润进了英华书院.那里有个数学老师,曾经是国立清华大学的航空系主任.

老师知识非常渊博,又诲人不倦.他在数学课上,给同学们讲了许多有趣的数学知识.不爱数学的同学都能被他吸引住,爱数学的同学就更不用说了.

数学分两大部分:纯数学和应用数学.纯数学处理数的关系与空间形式.在处理数的关系这部分里,讨论整数性质的一个重要分枝,名叫"数论".17世纪法国大数学家费马是西方数论的创始人.但是中国古代老早就已对数论做出了特殊贡献.《周髀》是最古老的古典数学著作.较早的还有一部《孙子算经》.其中有一条余数定理是中国首创.据说大军事家韩信曾经用它来点兵.后来被传到了西方,名为孙子定理,是数论中的一条著名定理.直到明代以前,中国在数论方面是对人类有过较大的贡献的.13世纪下半叶更是中国古代数学的高潮了.南宋大数学家秦九韶著有《数书九章》.他的联立一次方程式的解法比意大利大数学家欧拉的解法早出了500多年.元代大数学家朱世杰,著有《四元玉鉴》.他的多元高次方程的解法,比法国大数学家毕朱也早出了400多年.明清以后,我们落后了.然而中国人对于数学好像是特具禀赋的.中国应当出大数学家.中国是数学的故乡.

有一次,老师给这些高中生讲了数论之中一道著名的难题.当初,他说,俄罗斯的彼得大帝建设彼得堡,聘请了一大批欧洲的大科学家.其中,有意大利大数学家欧拉;有德国的一位中学教师,名叫哥德巴赫,也是数学家.

1742年,哥德巴赫发现,每一个大偶数都可以写成两个素数的和.他对许多偶数进行了检验,都说明这是确实的.但是这需要给予证明.因为尚未经过证明,只能称之为猜想.他自己却不能够证明它,就写信请教那时赫赫有名的大数学家欧拉,请他来帮忙做出证明.一直到死,欧拉也不能证明它.从此这成了一

道难题,吸引了成千上万数学家的注意.200多年来,多少数学家企图给这个猜想做出证明,都没有成功.

说到这里,教室里成了开了锅的水.那些像初放的花朵一样的青年学生叽叽喳喳地议论起来了.

老师又说,自然科学的皇后是数学,数学的皇冠是数论,哥德巴赫猜想,则是皇冠上的明珠.

同学们都惊讶地瞪大了眼睛.

老师说,你们都知道偶数和奇数.也都知道素数和合数.我们小学三年级就教这些了.这不是最容易的吗? 不,这道难题是最难的呢.这道题很难很难,要有谁能够做了出来,不得了,那可不得了呵!

青年人又吵起来了.这有什么不得了,我们来做,我们做得出来,他们夸下了海口.

老师也笑了.他说:"真的,昨天晚上我还做了一个梦呢.我梦见你们中间的有一位同学,他不得了,他证明了哥德巴赫猜想."

高中生们轰的一声大笑了.

但是陈景润没有笑.他也被老师的话震动了,但是他不能笑.如果他笑了,还会有同学用白眼瞪他的.自从升入高中以后,他越发孤独了.同学们嫌他古怪,嫌他多病,都不理睬他.他们用蔑视的和讥讽的眼神看着他.他成了一个踽踽独行,形单影只,自言自语,孤苦伶仃的畸零人.长空里,一只孤雁.

第二天,又上课了.几个相当用功的学生兴冲冲地给老师送上了几个答题的卷子.他们说,他们已经做出来了,能够证明那个德国人的猜想了.可以多方面地证明它呢.没有什么了不起的.哈! 哈!

"你们算了!"老师笑着说了,"算了! 算了!"

"我们算了! 算了,我们算出来了!"

"你们算啦! 好啦好啦,我是说,你们算了吧,白费这个力气做什么? 你们这些卷子我是看也不会看的,用不着看的.那么容易吗? 你们是想骑着自行车到月球上去."

教室里又爆发出一阵哄堂大笑.那些没有交卷的同学都笑话那几个交了卷的.他们自己也笑了起来,都笑得跺脚,笑破肚子了.唯独陈景润没有笑.他紧结着眉头.他被排除在这一切欢乐之外.

第二年,老师又回清华去了.他早该忘记这两堂数学课了.他怎能知道他被多么深刻地铭刻在学生陈景润的记忆中.老师因为同学多,容易忘记,学生却一辈子记着自己青年时代的老师.

福州解放! 1950年,陈景润考进了厦门大学.因为成绩特别优异,国家又

急需培养人才，提前毕了业．而且，立即分配了工作．1953年秋季，陈景润被分配到了北京！在中学当数学老师．这该是多么的幸福了啊！

然而，不然！在厦门大学的时候，他的日子是好过的．同组同系就只有四个大学生，倒有四个教授和一个助教指导学习．他是多么饥渴而且贪馋地吸饮于百花丛中，以酿制芬芳馥郁的数学蜜糖呵！学习的成效非常之高．他在抽象的领域里驰骋得多么自由自在！大家有共同的 dx 和 dy 等之类的数学语言．三年中间，没有人歧视他，也不受骂挨打了．他很少和人来往，过的是黄金岁月，全身心沉浸在数学的海洋里面．真想不到，那么快，他就毕业了．一想到他将要当老师，在讲台上站立，被几十对锐利而机灵，有时难免要恶作剧的眼睛盯视，他禁不住吓得打颤！

他的猜想立刻得到了证明，他是完全不适合于当老师的．他那么瘦小和病弱．他的学生却都是高大而且健壮的．他最不善于说话，说多几句就嗓子发痛了．他多么羡慕那些循循善诱的好老师．下了课回到房间里，他叫自己笨蛋．辱骂自己比别人的还厉害得多．他一向不会照顾自己，又不注意营养．积忧成疾，发烧到38℃．送进医院一检查，他患有肺结核和急腹症．

这一年内，他住医院六次，做了三次手术．当然他没有能够好好地教书．但他并没有放弃他的专业．中国科学院不久前出版了华罗庚的名著《堆垒素数论》．它刚摆上书店的书架，陈景润就买到了．他一头扎进去了．非常深刻的著作，非常之艰难！可是他钻研了它．

厦门大学校长来到了北京，在教育部开会．那中学的一位领导遇见了他，谈起来，很不满意，提出了一大堆的意见：你们怎么培养了这样的高材生？

王亚南，厦门大学校长，就是马克思的《资本论》的翻译者．听到意见之后，非常吃惊．他同意让陈景润回到厦门大学．

听说他可以回厦门大学数学系了，说也奇怪，陈景润的病也就好转了，而王亚南却安排他在厦大图书馆当管理员．又不让管理图书，只让他专心致意地研究数学．王亚南不愧为政治经济学的批判家．他懂得价值论，懂得人的价值．陈景润也没有辜负了老校长的培养．他果然精深地钻研了华罗庚的《堆垒素数论》和大厚本儿的《数论导引》．陈景润都把它们吃透了．他的这种经历却也并不是没有先例的．

当初，我国老一辈的大数学家、大教育家熊庆来，我国现代数学的引进者，在北京的清华大学执教．30年代之初，有一个在初中毕业以后就失了学，失了学就完全自学的青年数学家，寄出了一篇代数方程解法的文章，给了熊庆来．熊庆来一看，就看出了这篇文章中的英姿勃发和奇光异彩．他立刻把它的作者，姓华名罗庚的，请进了清华园来．他安排华罗庚在清华图书馆中工作，一面自学，一面听课．尔后，派遣华罗庚出国，留学英国剑桥．学成回国，已担任昆明云南大

学校长的熊庆来又介绍他当联大教授.华罗庚后来再次出国,在美国普林斯顿和依利诺的大学教书.中华人民共和国成立以后,华罗庚马上回国来了,他主持了中国科学院数学研究所的工作.

陈景润在厦门大学图书馆中也很快写出了数论方面的专题文章,文章寄给了中国科学院数学研究所.华罗庚一看文章,就看出了文章中的英姿勃发和奇光异彩,也提出了建议,把陈景润选调到数学研究所来当实习研究员.正是:熊庆来慧眼认罗庚,华罗庚睿目识景润.

1956年年底,陈景润再次从南方海滨来到了首都北京.

1957年夏天,数学大师熊庆来也从国外重返清华.

这时少长咸集,群贤毕至.当时著名的数学家有熊庆来、华罗庚、张宗燧、闵嗣鹤、吴文俊等许多明星灿灿,还有新起的一代俊彦,陆汝钤、王元、越民义、吴方等,如朝霞烂漫,还有后起之秀,杨乐、张广厚等已入北京大学求学.在解析数论、代数数论、函数论、泛函分析、几何拓扑学等学科之中,已是人才济济,又加上了一个陈景润.人人握灵蛇之珠,家家抱荆山之玉.风靡云蒸,阵容齐整.条件具备了,华罗庚做出了战略性的部署.侧重于应用数学,但也向那皇冠上的明珠,哥德巴赫猜想挺进!

要懂得哥德巴赫猜想是怎么一回事,只需把早先在小学三年级里就学到过的数学再来温习一下.那些12345,个十百千万的数字,叫做正整数.那些可以被2整除的数,叫做偶数.剩下的那些数,叫做奇数.还有一种数,如2,3,7,11,13等,只能被1和它本数,而不能被别的整数整除的,叫做素数.除了1和它本数以外,还能被别的整数整除的,这种数如4,6,8,9,10,12等就叫做合数.一个整数,如能被一个素数所整除,这个素数就叫做这个整数的素因子.如6,就有2和3两个素因子.如30,就有2,3和5三个素因子.好了,这暂时也就够用了.

1742年,哥德巴赫写信给欧拉时,提出了:每个不小于6的偶数都是两个素数之和.例如,$6=3+3$.又如$24=11+13$,等等.有人对一个一个的偶数都进行了这样的验算,一直验算到了三亿三千万之数,都表明这是对的.但是更大的数目,更大更大的数目呢?猜想起来也该是对的.猜想应当证明.要证明它却很难很难.

整个18世纪没有人能证明它.

整个19世纪也没有人能证明它.

到了20世纪的20年代,问题才开始有了点儿进展.

很早以前,人们就想证明,每一个大偶数是两个"素因子不太多的"数之和.他们想这样来设置包围圈,想由此来逐步证明哥德巴赫这个命题——一个素数加一个素数(1+1)是正确的.

1920年，挪威数学家布朗，用一种古老的筛法（这是研究数论的一种方法）证明了：每一个大偶数是两个"素因子都不超九个的"数之和．布朗证明了：九个素因子之积加九个素因子之积(9+9)是正确的．这是用了筛法取得的成果．但这样的包围圈还很大，要逐步缩小之．果然，包围圈逐步地缩小了．

1924年，数学家拉德马赫尔证明了(7+7)；1932年，数学家埃斯特曼证明了(6+6)；1938年，数学家布赫夕塔布证明了(5+5)；1940年，他又证明了(4+4)．1956年，数学家维诺格拉多夫证明了(3+3)．1958年，我国数学家王元证明了(2+3)．包围圈越来越小，越接近于(1+1)了．但是，以上所有证明都有一个弱点，就是其中的两个数没有一个是可以肯定为素数的．

早在1948年，匈牙利数学家兰恩另外设置了一个包围圈．开辟了另一战场，想来证明：每个大偶数都是一个素数和一个"素因子都不超过六个的"数之和．他果然证明了(1+6)．

但是，以后又是十年没有进展．

1962年，我国数学家，山东大学讲师潘承洞证明了(1+5)，前进了一步；同年，王元、潘承洞又证明了(1+4)．1965年，布赫夕塔布、维诺格拉多夫和数学家朋比尼都证明了(1+3)．

1966年5月，像一颗璀璨的明星升上了数学的天空，陈景润在中国科学院的刊物《科学通报》第17期上宣布他已经证明了(1+2)．

自从陈景润被选调到数学研究所以来，他的才智的蓓蕾一朵朵地慢慢开放了．在圆内整点问题、球内整点问题、华林问题、三维除数问题等之上，他都改进了中外数学家的结果．单是这些成果，他那贡献就已经很大了．

但当他已具备了充分依据，他就以惊人的顽强毅力，来向哥德巴赫猜想挺进了．他废寝忘食，昼夜不舍，潜心思考，探测精蕴，进行了大量的运算．一心一意地搞数学，搞得他发呆了．有一次，自己撞在树上，还问是谁撞了他．他把全部心智和理性统通奉献给这道难题的解题上了．他为此而付出了很高的代价，他的两眼深深凹陷了，他的面颊带上了肺结核的红晕，喉头炎严重，他咳嗽不停，腹胀、腹痛难以忍受．有时已人事不知了，却还记挂着数字和符号．他跋涉在数学的崎岖山路，吃力地迈动步伐．在抽象思维的高原，他向陡峭的巉岩升登，降下又升登！善意的误会飞入了他的眼帘，无知的嘲讽钻进了他的耳道．他不屑一顾，他未予理睬．他没有时间来分辨，他宁可含垢忍辱，餐霜饮露，走上去一步就是一步！他气喘不已，汗如雨下．时常感到他支持不下去了．但他还是攀登．用四肢，用指爪，真是艰苦卓绝！多少次上去了摔下来．就是铁鞋，也早该踏破了．人们嘲笑他穿的是通风透气不会得脚气病的一双鞋子．不知多少次发生了可怕的滑坠！几乎粉身碎骨．他无法统计他失败了多少次．他毫不气馁．他总结失败的教训，把失败接起来，焊上去，做登山用的尼龙绳子和金属梯子．吃一堑，

长一智．失败一次，前进一步．失败是成功之母，成功由失败堆垒而成．他越过了雪线，到达雪峰和现代冰川，更感缺氧的严重了．多少次坚冰封山，多少次雪崩掩埋！他就像那些征服珠穆朗玛峰的英雄登山运动员，爬啊，爬啊，爬啊！而恶毒的诽谤，恶意的污蔑像变天的乌云和九级狂风，但热情的支持为他拨开云雾，明朗的阳光又温暖了他．他向着目标，不屈不挠，继续前进，继续攀登，战胜了第一台阶的难以登上的峻峭，出现在难上加难的第二台阶绝壁之前．他只知攀登，在千仞深渊之上；他只管攀登，在无限风光之间．一张又一张运算的稿纸，像漫天大雪似的飞舞，铺满了大地．数字、符号、引理、公式、逻辑、推理，积在楼板上，有三尺深．忽然化为膝下群山，雪莲万千．他终于登上了攀登顶峰的必由之路，登上了(1+2)的台阶．

他证明了这个命题，写出了厚达200多页的长篇论文．

闵嗣鹤教授细心地阅读了论文原稿．检查了又检查，核对了又核对．肯定了他的证明是正确的，靠得住的．他给陈景润说，去年人家证明(1+3)是用了大型的、高速的电子计算机．而你证明(1+2)却完全靠你自己运算．难怪论文写得长了，建议他加以简化．

他当时正修改他的长篇论文，突然被卷入了政治革命的万丈波澜．滚滚而来的巨浪冲击了一切剥削阶级的思想意识．史无前例的无产阶级文化大革命，像一颗颗的精神原子弹氢弹的成功试验一样，在神州大地上连续爆炸了．

天文地理要审查，物理化学要审查，生物要审查，数学也要审查．陈景润在无产阶级文化大革命中受到了最严峻的考验．老一辈的数学家受到了冲击，连中年和年轻的也跑不了．庄严的科学院被骚扰了，热腾腾的实验室冷清清了．日夜的辩论，剧烈的争吵．行动胜于语言，拳头代替舌头．无产阶级文化大革命像一个筛子，什么都要在这筛子上过滤一下．它用的也是筛法．该筛掉的最后都要筛掉，不该筛掉的怎么也筛不掉．

有人曾经强调了科学工作者要安心工作，钻研学问，迷于专业．陈景润又被认为是这种所谓资产阶级科研路线的"安钻迷"典型．确实他成天钻研学问．不太问政治，是的，但也参加了历次的政治运动．共产党好，国民党坏，这个朴素的道理他非常之分明．数学家的逻辑像钢铁一样坚硬，他的立场站得稳．他没有犯过什么错误．在政治历史上，陈景润一身清白．他白得像一只仙鹤．鹤羽上，污点沾不上去．而鹤顶鲜红，两眼也是鲜红的，这大约是他熬夜熬出来的．他曾下厂劳动，也曾用数学来为生产服务，尽管他是从事于数论这一基础理论科学的．但不关心政治，最后政治要来关心他．

善意的误会，是容易纠正的．无知的嘲讽，也可以谅解．批判一个数学家，多少总应该知道一些数学的特点．否则，说出了糊涂话来自己还不知道．陈景润被批判了．他被"帽子工厂"看中了：修正主义苗子，安钻迷，白专道路典型，白痴，

寄生虫，剥削者.就有这样的糊涂话：这个人，研究(1+2)的问题.他搞的是一套人们莫名其妙的数学.让哥德巴赫猜想见鬼去吧！(1+2)有什么了不起！1+2不等于3吗？此人混进数学研究所，领了国家的工资，吃了人民的小米，研究什么1+2=3，什么玩意儿?！伪科学！

说这话的人才像白痴呢.

并不懂得数学的人说出这样的话，那是可以理解的，可是说这些话的人中间，有的明明是懂得数学，而且是知道哥德巴赫猜想这道世界名题的.那么，这就是恶意的诽谤了.权力使人昏迷了，派性叫人发狂了.

台风的中心是安静的.

而旋卷在台风里面的人却焦灼着、奔忙着、谋划着、叫嚷着、战斗着、不吃不睡，狂热地保护自己的派性，疯狂地攻击对方的派性.他们忙着打派战，竟没有时间来顾及他们的那些“专政”对象了.

待到工人宣传队进驻科学院各所以后，陈景润不但可以读书，也可以运算了.但是总有一些人不肯放过他.每天，他们来敲敲门，来查查户口，弄得他心惊肉跳，不得安身.有一次，带来了克丝钳子，存心不让他看书，把他房间里的电灯铰了下来，拿走了.还不够，把开关拉线也剪断了.

于是黑暗降临他的心房.

“九一三”事件之后，大野心家已经演完了他的角色，下场遗臭万年去了.陈景润听到这个传达之后，吃惊得说不出话来.这时，情况渐渐地好转.可是他却越加成了惊弓之鸟.激烈的阶级斗争使他无所适从.唯一的心灵安慰就是数学.他只好到数论的大高原上去隐居起来.现在也允许他这样做了.图书馆的研究员出身的管理员也是他热情的支持者。事实证明，热情的支持者，人数众多.他们对他好，保护他.他被藏在一个小书库的深深的角落里看书.由于这些研究员的坚持，数学研究所继续订购世界各国的文献资料.这样几年，也没有中断过，这是有功劳的.他阅读、他演算，他思考.情绪逐步地振作起来.但是健康状况却越加严重了.他也不说，他也不顾.他又投身于工作.白天在图书馆的小书库一角，夜晚在煤油灯底下，他又在爬，爬，爬了，他要找寻一条一步也不错的最近的登山之途，又是最好走的路程.

敬爱的周总理，一直关心着科学院的工作，着手排除帮派的干扰.半个月之前，有一位周大姐被任命为数学研究所的政治部主任.由解析数论、代数数论等学科组成的五学科室恢复了上下班的制度.还任命了支部书记，是个工农出身的基层老干部，当过第二野战军政治部的政治干事.

到职以后，书记就到处找陈景润.周大姐已经把他所了解的情况告诉了他.他们会了面，会面在图书馆小书库的一个安静的角上.

刚过国庆，十月的阳光普照．书记还只穿一件衬衣，衰弱的陈景润已经穿上棉袄．

“李书记，谢谢你，”陈景润说，他见人就谢，“很高兴，”他说了一连串的很高兴．他一见面就感到李书记可亲．“很高兴，李书记，我很高兴，李书记，很高兴．”

李书记问他：“下班以后，下午五点半好不好？我到你屋去看看你．”

陈景润想了一想就答应了：“好，那好，那我下午就在楼门口等你，要不你会找不到的．”

“不，你不要等我，”李书记说，“怎么会找不到呢？找得到的．这是用不到等的．”

但是陈景润固执地说：“我要等你，我在宿舍大楼门口等你．不然你找不到．你找不到我就不好了．”

果然下午他是在宿舍大楼门口等着了．他把李书记等到了，带着他上了三楼，请进了一个小房间、小小房间，只有 6 平方米大小．这房间还缺了一只角．原来下面二楼是个锅炉房．长方形的大烟囱从他的三楼房间中通过，切去了房间的六分之一．房间是刀把形的．显然它的主人刚刚打扫过清理过这间房了．窗子三槅，糊了报纸，糊得很严实．尽管秋天的阳光非常明丽，屋内光线却暗淡得很．李书记没有想到他住处这样不好．他坐到床上，说：“你床上还挺干净！”

“新买了床单，刚买来的床单，”陈景润说，“你要来看看我，我特地去买了床单，”指着光亮雪白的蓝格子花纹的床单，“谢谢你，李书记，我很高兴，很久很久了，没有人来看望……看望过我了．”他说，声音颤抖起来．这里面带着泪音．霎时间李书记感到他被这声音震撼起来．满腔怒火燃烧．这个党的工作者从来没有这样激动过．不像话，太不像话了！这房间里还没有桌子．六平方米的小屋，竟然空如旷野．一捆捆的稿纸从屋角两只麻袋中探头探脑地露出脸来．只有四叶暖气片的暖气上放着一只饭盒．一堆药瓶，两只暖瓶．连一只矮凳子也没有．怎么还有一只煤油灯？他发现了，原来房间里没有电灯．“怎么？”他问，“没有电灯？”

“不要灯，”他回答，“要灯不好，要灯麻烦．这栋大楼里，用电炉的人家很多．电线负荷太重，常常要检查线路，一家家的都要查到．但是他们从来不查我．我没有灯，也没有电线，要灯不好，要灯添麻烦了．”说着他凄然一笑．

“桌子呢？你怎么没有桌子？”

陈景润随手把新床单连同褥子一起翻了起来，露出了床板，指着说，“这不是？这样也就可以工作了．”

李书记皱起了眉头，咬牙切齿了．他心中想着：“唔，竟有这样的事！在中关村，在科学院呢．糟蹋人啊，糟蹋科学！”

李书记回到机关．他找到了比他自己早到了才一个星期的办公室老张主

任.主任听他说话后,认为这一切不可能,“瞎说！怎么会没有灯呢!”李书记给他描绘了小房间的寂寞风光.那些身上长刺头上长角的人把科学院搅得这样!立刻找来了电工.电工马上去装灯.灯装上了,开关线也接上了.一拉,灯亮了.陈景润已经俯伏在一张桌子之上,写起来了.

光明回到陈景润的心房.

数学的公式也是一种世界语言.学会这种语言就懂得它了.这里面贯穿着最严密的逻辑和自然辩证法,它可以解释太阳系、银河系、河外系和宇宙的秘密,原子、电子、粒子、层子的奥妙.但是能升登到这样高深的数学领域去的人不多.

且稍稍窥视一下彼岸彼土.那里似有美丽多姿的白鹤在飞翔舞蹈.你看那玉羽雪白,雪白得不沾一点尘土;而鹤顶鲜红,而且鹤眼也是鲜红的.它踯躅徘徊,一飞千里.还有乐园鸟飞翔,有鸾凤和鸣,姣妙、娟丽,变态无穷.在深邃的数学领域里,既散魂而荡目,迷不知其所之.

闵嗣鹤教授却能够品味它,欣赏它,观察它的崇高瑰丽.他当时说过:“陈景润的工作,最近好极了.他已经把哥德巴赫猜想的那篇论文写出来了.我已经看到了,写得极好.”

“你的论文写出来了,”一位军代表问陈景润,“为什么不拿出来!”陈景润回答他:“正做正做,没有做完.”军代表说:“希望你早日完成.”

室里的领导老田对李书记说:“可以动员动员他,让他拿出来.但也不急.他不拿出来,自然有他的道理的.”

陈景润说:“那个稿子我还在做.我确实没有做完.”

……

“我确实还没有做完.我的论文是做完了,又是没有做完的.自从我到数学研究所以来,在严师、名家和组织的培养、教育、熏陶下,我是一个劲儿钻研.怎么还能干别的事？不这样怎么对得起党？在世界数学的数论方面三十多道难题中,我攻下了六七道难题,推进了它们的解决.这是我的必不可少的锻炼和必不可少的准备.然后我才能向哥德巴赫猜想挺进.为此,我已经耗尽了我的心血.

“1965年,我初步达到了(1+2).但是我的解答太复杂了,写了200多页的稿子.数学论文的要求是(1)正确性,(2)简洁性.譬如从北京城里走到颐和园那样,可以有许多条路,要选择一条最准确无错误,又最短最好的道路.我那个长篇论文是没有错误,但走了远路,绕了点儿道,长达200多页,也还没有发表.从那年到今天已经过去7年.

“这个事是比较困难的,也是难于被人理解的.从学习外语来说,我是在中

学里就学了英语,在大学里学的俄语,在所里又自学了德语和法语.我勉强可以阅读而且写写了.又自学了日语、意大利语和西班牙语,到了勉强可以阅读外国资料和文献的程度.因而在借鉴国外的经验和成就时,可以从原文阅读,用不到等人翻译出来了再读.这是必不可少的一个条件.我必须检阅外国资料的尽可能的全部总和,消化前人智慧的尽可能不缺的全部的果实.而后我才能在这样的基础上解答(1+2)这样的命题.

"我的成果又必须表现在这样的一篇论文中,虽然是专业性质的论文,文字是比较简单的;尽管是相对地严密的,又必须是绝对地严密的.若干地方就是属于哲学领域的了.所以我考虑了又考虑,计算了又计算,核对了又核对,改了又改,改个没完.我不记得我究竟改了多少遍?科学的态度应当是最严格的,必须是最严格的.

"我知道我的病早已严重起来.我是病人膏肓了.细菌在吞噬我的肺腑内脏.我的心力已到了衰竭的地步.我的身体确实是支持不了啦!唯独我的脑细胞是异常的活跃,所以我的工作停不下来.我不能停止……"

1973 年 2 月,春节来临.

早一天,数学研究所的周大姐说,佳节前后,要特别关心一下病号.她说:"那些老八路的作风,那些过去部队里形成的作风,我们千万不能丢掉了.尤其像陈景润那样的同志,要关心他,他很顽强.他病得起不来了,但又没有起不来的时候.在任何情况下挣扎起来,他坚持工作.他为什么?他为谁?为他自己吗?为他自己,早就不干了.不是,他是为人民,为党工作.我们要去慰问他.也要慰问单位里所有的病人."

大年初一早晨,周大姐和几个书记,包括李书记,一行数人,把头天买好了的苹果、梨子装进一些塑料网线袋子.若干袋子大家分头提了,然后举步出发,慰问病人.他们先到陈景润那里.他住得最近.

陈景润正从楼梯上走下来.大家招呼他.他很惊讶,来了这许多的领导同志.周大姐说:"过春节,我们看你来了,你的病好点了吧!"李书记也说:"新年好,给你贺新年."陈景润说,"噢,今天是新年了啊?谢谢你们,谢谢你们.新年好,你们好."李书记说:"到你屋里去坐坐吧.""不,不行,"陈景润说,"你没有先给我打招呼,不能进去."周大姐沉吟了一下,说:"好吧,我们就不去了.李书记,你给他送水果上楼吧.我们还上别家去,你回头再赶上我们好了."李书记说:"好."周大姐和陈景润握手,并祝他早日恢复健康,然后转过身走了.李书记把水果袋递给陈景润说:"春节了.这是组织上送给你的.希望你在新的一年里,多给党做点工作.""不要水果,不要水果,"陈景润推却了,"我很好,我没有病,没有什么……这一点点病,呃……呃,谢谢你,我很高兴."说着说着他收下了水

果.李书记说:“上你屋聊聊!”他又张手拦住,“不,不要进屋了,你没有给我打招呼.”

李书记说:“那好,我不上去了.你有什么事,随时告诉我.我也得去追他们,到别家去看望看望.”于是握手作别,他返身走.刚走两步,后面又叫,“李书记,李书记!”陈景润又追过来,把水果袋子给了李书记,并说,“给你家的小孩吃吧!我吃不了这(么)多.我是不吃水果的.”李书记说,“这是组织上给你的,不过表示表示,一点点的心意罢了.要你好好保养身体,可以更好地工作.你收下吧,吃不下,你慢慢的吃吧!”

他默然收下了.他默默地送李书记到大楼门口.李书记扬手走了,赶上了周大姐他们的行列.陈景润望着李书记的背影,凝望着周大姐一行人的背影消失在中关村路林阴道旁的切面铺子后面了.突然间,他激动万分.他回身上楼,见人就讲,并且没有人他也讲.“从来所领导没有把我当作病号对待,这是头一次,从来没有人带了东西来看望我的病,这是头一次.”他举起了塑料袋,端详它,说,“这是水果,我吃到了水果,这是头一次.”

他飞快地进了小屋.一下子把自己反锁在里面了.

他没有再出来.直到春节过去了.头一天上班,陈景润把一叠手稿交给了李书记,说:“这是我的论文.我把它交给党.”

李书记看他,又轻声问他:“是否是那个(1+2)?”

“是的,闵老师已经看过,不会有错误的.”陈景润说.

数学研究所立即组织了一次小型的学术报告会.十几位专家,听了陈景润的报告,一致给以高度评价.然后,数学研究所业务处将他的论文上报院部.

4月中的一天,中国科学院在三里河工人俱乐部召开全院党员干部大会.武衡同志在会上作报告.他说到数学研究所一位中级的研究员做出了世界水平的重大成果.当时没说人名.李书记在座中,听到了,还不知说谁.旁边的人捅了他一下.“干什么?”他问,那人说:“你听到没有?”“怎么啦?”那人又说:“这活儿是陈景润做出来的啊!”“噢?还这么重要?”那人说:“这是世界名题,真不简单!”

第二天,新华社记者来访,他见到了陈景润,谈了话,进他房间看了看,回去就写出一篇报道,立即在内部刊物上发表.其中,说到了陈景润的经历;他刻苦钻研的精神;重大的科研成果以及他现在还住在一间烟熏火烤的小房间里.生活条件很差!疾病严重!!生命垂危!!!

伟大领袖和导师毛主席看到了这篇报道,立即做出了指示.

当天深夜,武衡同志走进了陈景润的小房间.

他立即被送进医院,由首都医院内科主任和卫生部一位副部长给他作了全

面的身体检查.他患有多种疾病.他们要他立即住院疗养,他不肯.于是,向他传达了毛主席的指示.

他一共住院一年半.

在住院期间,敬爱的周总理亲自和华主席(当时是副总理)安排了陈景润的全国人大代表席位,在第四届全国人民代表大会上,陈景润见到了周总理,并和总理在一个小组里开会.人代会期间当他得知总理的病时,当场哭了起来,几夜睡不着觉.大会后,他仍回医院治疗.

当他出院的时候,医院的诊断书上写着:"经住院治疗后,一般情况较好.精神改善,体温正常.体重增加十斤;饮食睡眠好转,腹痛腹胀消失;二肺未见活动性病灶.心电图正常,脑电图正常,肝肾功能正常,血沉及血象正常."

关于他的工作和健康,华主席也非常关怀,并亲自作过几次批示.

早在他的论文发表时,西方记者迅即获悉,电讯传遍全球.国际上的反响非常强烈.英国数学家哈勃斯丹和联邦德国数学家李希特的著作《筛法》正在印刷所付印.他们见到了陈景润的论文立即在这部书里加添了一章,第十一章——"陈氏定理".他们誉之为筛法的"光辉的顶点".在国外的数学出版物上,诸如"杰出的成就"、"辉煌的定理",等等,不胜枚举.一个英国数学家给他的信里还说,"你移动了群山!"

真是愚公一般的精神呵!

或问:这个陈氏定理有什么用处呢?它在哪些范围内有用呢?

大凡科学成就有这样两种:一种是经济价值明显,可以用多少万,多少亿人民币来精确地计算出价值来的,叫做"有价之宝";另一种成就是在宏观世界、微观世界、宇宙天体、基本粒子、经济建设、国防科学、自然科学、辩证唯物主义哲学,等等之中有这种那种作用,其经济价值无从估计,无法估计,没有数字可计算的,叫做"无价之宝",例如,这个陈氏定理就是.

现在,离开皇冠上的明珠,只有一步之遥了.

但这是最难的一步,且看明珠归于谁之手吧!

陈景润曾经是一个传奇式的人物.关于他,传说纷纭,莫衷一是.有善意的误解、无知的嘲讽、恶意的诽谤、热情的支持,都可以使得这个人扭曲、变形或扩张放大.理解人不容易,理解这个数学家更难.他特殊敏感、过于早熟、极为神经质、思想高度集中.外来和自我的肉体与精神的折磨和迫害使得他试图逃出于世界之外.他成功地逃避在纯数学之中,但还是藏匿不了.纯数学毕竟是非常现实的材料的反映."这些材料以极度抽象的形式出现,这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实."(恩格斯)陈景润通过数学的道路,认识了客观世界的必然规律.他在诚实的数学探索中,逐步地接受了辩证唯物论的世界观.没有一定

的世界观转变，没有科学院这样的集体和党的关怀，他不可能对哥德巴赫猜想做出这巨大贡献. 正是无产阶级文化大革命不可抗拒地促使他突变. 被冷酷地逐出世界的人，被热烈的生命召唤了回来. 帮派体系打击迫害，更显出党的恩惠温暖. 冲击对于他好像是坏事也是好事，他得到了锻炼而成长了. 病人恢复了健康. 畸零人成了正常人. 正直的人已成为政治的人. 他的进步显著. 他坚定抗击了“四人帮”对他的威胁与利诱. 无所不用其极地威胁他诬陷邓副主席，他不屈！许以高官厚禄，利诱他向人妖效忠，他不动！真正不简单！数学家的逻辑像钢铁一样坚硬！今后，可以信得过，他不会放松了自己世界观的继续改造. 他生下来的时候，并没有玫瑰花. 他反而取得成绩. 而现在呢？应有所警惕了呢，当美丽的玫瑰花朵微笑时.

2 生命与春天同在——一个数学巨匠的人生旅程①

——张严平

1996 年 3 月 19 日，对于中国数学界来说，是一个令人扼腕痛惜的日子——一代数学巨匠陈景润在距离他 63 岁诞辰还有两个月的时候静静地走了.

他走了，带着对“1 + 2”的满意微笑. 他的这一辉煌证明使得哥德巴赫猜想这道各国数学家为之前赴后继奋斗了 250 年的古典数学难题，在本世纪 60 年代中叶达到了接近顶峰的最后一步.

他走了，带着对“1 + 1”的无限向往. 直到他生命的终结，他一刻不曾停止过向这一顶峰攀登.

他走了，他透支了太多太多. 他把自己的全部心智都献给了哥德巴赫猜想，他的生命早已与他毕生努力的数学合为一体.

……

2.1 他留下了一颗金子的心，这颗心凝聚了千千万万中国知识分子的品质与精神

有人说，陈景润是天才.

他的同仁们说，他的成果是他用生命换来的.

徐迟 1978 年在那篇著名报告文学《哥德巴赫猜想》中这样写道：“陈景润把全部心智和理性统通奉献给这道难题的解题上了，他为此而付出了很多代价.

① 原载《国际人才交流》1996 年第 7 期，选载时略作删节.

他的两眼深深地凹陷了.他的面颊带上了肺结核的红晕.喉头炎严重,他咳嗽不停.腹胀、腹痛,难以忍受.有时已人事不知了.却还记挂着数字与符号……”

这就是陈景润.

陈景润有一位同仁叫林群,他们同是福州人,又同在厦门大学读书,毕业后又前后脚来到中科院数学研究所,林群是陈景润日常交谈比较多的一个人.早在几年前,中国科学报的《院士心迹》专栏介绍林群时,在“你最敬佩的人是谁?”一栏中,林群毫不犹豫地写下了一个名字“陈景润”.多年朝夕相处,那是林群永远无法从记忆中抹掉的情景.

1956年陈景润来到数学所以后,先是与几个人共住一套单元房,为了深夜读书研究不影响别人,他个人住进了单元房那个报废的厕所里,一张单人床把整个空间塞得满满的,废厕所没有暖气,冬天里面滴水成冰,陈景润就用报纸把窗户糊得厚厚的,以抵挡严寒.人们注意到,陈景润的这间“居室”灯光长年彻夜不熄.后来,这些单身汉都搬到了一幢比较正规的集体宿舍楼,陈景润由于身体不好,被分配住在一个病号房间,病号房规定晚上十点熄灯,于是,每天晚上一到十点钟,陈景润就会准时地出现在楼道公共卫生间的门厅下,背靠墙壁,席地而坐,手拿一张纸、一支笔,借着卫生间昏暗的灯光算题.十点来卫生间的人会看到他,十二点来会看到他,半夜两点、三点、四点……依然会看到他,一直到天大亮,楼道里所有的人都起床吃早饭了.陈景润才摇摇晃晃站起来走回自己的房间,白天他还要继续工作.他通常一干就是七天七夜,接下来大病一场,病稍好,每天晚上十点钟他又会准时出现在卫生间的门厅下,开始了又一个七天七夜.再后来,陈景润搬到了紧靠暖气锅炉烟囱的一间六平米的小屋,除了打开水、吃饭,人们很少见他走出这间小屋.他在这里住了很久,无数个日日夜夜他是怎么度过的,人们可以想象到,但是多年以后,当人们踏进这间小屋,看到屋里的全部情景——一张木床,一个课桌,一把暖壶,一堆药瓶,几麻袋演算稿纸时,仍然被深深地震撼了.

陈景润曾向林群袒露心迹:“数学没有什么秘密,就是要拼命.这就像爬山,如果有十条路,一般人爬一条或两条通不到顶,可能就算了,而我是要爬遍十条道路的,从而找到一条最有希望到达顶峰的路.”

华罗庚当年也正是看准了陈景润的这一点,他说陈景润是慢才,数学竞赛他是不合格的,即问即答,他可能答不出,但第二天他做出的回答却会比所有的回答都深刻.有人形象地把陈景润比做一束激光,说他做的是穿透钢板的工作,而不是纸上的工作,他的一句研究结论常常是以一麻袋演算稿纸做背景的,真正是一句值千金.

“1+2”的成果公布以后,所有了解陈景润的人都发出同一个感慨:这只能属于陈景润.的确,这只能属于陈景润.数论研究是挑战人类智力的极限,而哥

德巴赫猜想是挑战数论领域250年智力极限的总和,陈景润就像一个竞赛场上的运动员,对这一挑战充满了打破纪录的强烈信念,为此他投入了全部的生命.他常说一句话:"时间是个常数,花掉一天等于浪费24小时."他甚至对林群说:"人不存在失眠问题,失眠正说明需要工作."他不懂得什么叫休息,不懂什么是爱惜身体,别人对他讲也没用,真正是如痴如醉,死而后已.

有人说,陈景润是一个不懂社会的人.

他的同仁说,他心中有一杆看世界的秤.

徐迟的《哥德巴赫猜想》中说了这样一句话:"数学家的逻辑像钢铁一样坚硬."

这就是陈景润.

十年浩劫期间,陈景润曾被作为安(心工作)、钻(研业务)、迷(于专业)的"白专典型"受到冲击,他研究的"1+2"被斥为"白痴"、"伪科学".他的工资被扣了,小屋的电线被掐了,连桌子也被抬走了,每次批判会,他都要登台作靶接受批判.他原本瘦弱的身体越发摇摇晃晃了,他极度神经衰弱,常常惊恐不安,他不明白世界发生了什么紊乱,在他数字的王国里,从来都是充满了和谐与美妙的啊!

然而,他不曾趴下.他是一位真正的数学家,他瘦小虚弱的身躯包裹着的大脑,有着钢铁般坚硬的逻辑:真理是打不倒的,对真理的追求是不能放弃的.

他忍受屈辱,不停追求.工资扣发,他就极力克俭,一餐饭常常只是馒头伴酱油兑开水;桌子没了,他就把铺盖卷起来,以床板当桌;电线掐了,他就点煤油灯……他的大脑仍然日夜不停地运算.有一次,他所在的"专政队"开批判会,屋里屋外找不到他,再回到他的小屋,发现刚才看到的床板那团破棉絮动了一下,打开一看,陈景润竟缩在里面正打着手电筒算题呢!

陈景润也有爆发的时刻.那是一次批判会,有人批判他研究哥德巴赫猜想是跟外国人跑,是卖国.听到"卖国"两个字,他一下子被激怒了,他第一次在人前大声地争辩:"不,我是爱国!运动员打乒乓拿冠军是中国的光荣,为什么我拿世界数学纪录就不是中国的光荣呢?"数学家的钢铁般的逻辑,使批判他的人亦无言作答.

爱国,是陈景润这位中国科学家感情世界的精髓,是他无论何时何地一生不变的痴情.20世纪70年代,已是名扬天下的陈景润到英国讲学时,一位大学校长盛情邀他留下工作,愿意为他提供世界上最好的研究条件和生活待遇,他毫不犹豫地回答:"感谢你的盛情,可我得回中国去,我是全国人大代表,我应该回去."他带着一个中国人的骄傲回到了祖国.新华社为此专门发出快讯,向全国人民报告"陈景润回来了".科学是没有国界的,可是科学家是有祖国的——这是历史上许多伟大科学家的共识.陈景润无疑是一位伟大的科学家,他把自

己的命运和祖国的命运始终连接在一起.许多年来,只要他愿意,移居国外对他来说是一件十分容易的事.可是他没有走,直到回归脚下的厚土.

浩劫年代,陈景润最大的一次爆发,是在他耗费了十几年心血计算出的几麻袋数学手稿被人焚于一旦、他被强拉硬拖赶出那间他赖以能够躲开耳目算题的 6 平米小屋的那一刻,他绝望了,悲愤交加,从四层楼上纵身跳下.万幸,他没有死.他的极端举动,昭示了他献身科学、万劫不改的痴心.

1973 年春天,毛泽东主席在一份内参上知道了陈景润的情况,立即作了批示.陈景润一辈子都忘不了那个春天的早上,新任数学所所长不久、和蔼可亲的周大姐和在他最困难的时候竭力保护他的数学所党支部李书记,来到了他的身边,递上了一袋水果.他激动万分,噙着泪默默地收下了.就在这一天,他把自己反锁在小屋里,几天没出来,等他再次走出小屋时,他把 1965 年只公布了结果的"1 + 2"的全部演算手稿交给了李书记,说:"这是我的论文,我把它交给党."

1974 年,周恩来总理亲自推荐陈景润为第四届全国人大代表.1975 年,邓小平同志针对有人说陈景润是"白专典型",愤怒地说,什么"白专典型",总比把着茅坑不拉屎的人强,并具体过问了陈景润的工作与生活.粉碎"四人帮"以后,陈景润成了献身科学的传奇式人物,成为青少年学习的榜样.1981 年,他当选为中国科学院学部委员,他先后获国家自然科学一等奖、何梁何利基金奖、华罗庚数学奖等多项重大奖励.

陈景润是幸福的,在祖国的土地上.尽管他有过困惑,受过屈辱,但最终这片生他养他的土地用加倍的爱与温暖拥抱了他.

陈景润是一位真正的攀登者.他一生取得多项重要成果,发表五十多篇论文,四本著作,但他从未说过自己所作的工作达到了多么高的水平,工作自己做,评价由别人,这是他的哲学.他雄心勃勃的永远是对科学本身的探索.当他做出"1 + 2"后,林群问他,你做出这样重要的成果,数学界评价很多,你怎么看?他说:"无论怎样评价,我都是'1 + 2',现在只有'1 + 1'才是我更关心的."

成为名人的陈景润社会活动多了,但无论走到哪,他都放不下手上的研究工作,在外参加会议期间,每天深夜他仍会像过去一样到走廊或厕所去看书.他生命的后十年,由于患病,长期住院治疗,需要扎针时,他从不让医生扎右手,因为他要用右手写字.当他已不能握笔,不能清晰地发声,但他仍用手势与含混的语言跟他的学生探讨数学问题.在医院中,他不仅培养了三个博士生和一个硕士生.而且与别人合作,写出了十篇论文.

1983 年,林群曾问陈景润,搞出"1 + 1"有没有希望?陈景润说:"要拼命.现在步子还太小了,还要走一百步才能走到."

壮志未酬身先死,几十年的呕心沥血,陈景润透支了他全部的生命,他终于在通向"1 + 1"的途中过早地倒下了……

他留下了距离顶峰只有一步之遥的古典难题，他更留下了一颗金子的心，这颗心凝聚了千千万万中国知识分子的品质与精神，每一个知识分子都可以从中看到自己的影子，看到精神世界中“1+1”那颗灿烂的明珠，它最终将吸引更多更多的人……

2.2 他深爱他的妻子儿子，他多么不想离开这个家啊

丙子三月，北京落雪了，春分已过，本不该落雪的.纷纷扬扬的雪花静静地飘在春天的夜晚.

陈景润的妻子由昆坐在家中摆满了鲜花的客厅内，望着鲜花丛中陈景润身穿红色羊绒衫面带微笑的大幅彩照，望着她和陈景润及他们的爱子陈由伟的合影，一次次泪眼朦胧.“这两张照片是先生去世前三个月照的，当他第一次拿到照片时，高高捧在眼前，连声说‘好！好！’他还高兴地答应，等病好一些，胖一些，再照一张.没有想到他走的竟这样快……”由昆心痛欲碎.

徐迟在《哥德巴赫猜想》中曾经说过：“理解一个人是很难的，理解一个数学家更不容易.”由于陈景润对数学的如痴如醉，使他少与别人交往，所以在很长一段时间，许多人把陈景润想象成一个满脑子只有数字，缺乏感情的人，他的婚姻和家庭由此蒙上了一层神秘的色彩.

年轻的医生由昆是怎样与终日沉迷在数学王国里的陈景润走到一起的呢？

“这是缘份.”由昆至今深信这一点.

1978年，深秋季节，由昆从湖北解放军某部来到北京解放军309医院学习，十分巧的是陈景润这时也在309医院住院，他的病房正属于由昆所分工工作的病区.她以医生对每一位病人特有的认真、细致、亲切、热情走进了陈景润的视线；而这同时，陈景润对科学所具有的“一箪食，一瓢饮，在陋巷，人不堪其忧，回也不改其乐”的刻苦痴迷的钻研，令她感到震惊，并深深地敬慕.

有一天，由昆值班，陈景润来到值班室，没头没脑地问道：“你爱人在哪个单位工作？”由昆说：“我还没结婚呢！”陈景润又问：“有没有男朋友？”由昆顺口回答：“没有.”陈景润听后默默地走了.这次简洁、突兀的造访，使当时的由昆除了感觉这位数学家性格独特外，并没太在意.又一天，由昆在医院的平台上学习英语，陈景润不知什么时候走过来说：“我们一起学吧，这样进步快.”并坚持邀请由昆到他病房去学英语.由昆说：“那可不行，院里有要求，不能打搅你.”陈景润说：“没关系.”由昆当时没有多想，只是为能有这样一位英语老师而高兴.那是一个阳光灿烂的日子，陈景润在与由昆一起学习时，终于向她表露了真挚的爱慕之情.

由昆十分吃惊和慌乱，尽管她内心深处对这位数学家独具的个性及透明的感情有着越来越多的理解，但现实又使她无法接受：自己是个年轻医生，而陈景

润是个中外知名的大科学家，这怎么可能呢？得不到由昆的明确答复，陈景润一连几天十分伤感，他对由昆说："我知道自己年纪大了，身体又不好，你不同意，我尊重你的意见，只是除了与你，我不会结婚了．"这句话让由昆久久的心疼．

万分矛盾中的由昆，提笔给父母写了一封信，让他们帮自己拿拿主意．她的父亲——一位耿直、坚毅的老军人从女儿的信中看出了她与陈景润彼此相互的真情，他给女儿回了一封很长的信，他告诉女儿：他从报纸上读到过有关陈景润的事迹，他十分钦佩陈景润对科学的献身精神，他认为这样一个人所表达的感情是格外认真而珍贵的，建议女儿不要拒绝命运多舛的陈景润，不要伤他的心，也不要回避自己心底深处的那份情感．

由昆终于把自己的手交到了陈景润的手中．那一天，陈景润高兴得像个孩子，从医院匆匆赶回数学所，向见到的每一位同事宣布：他有对象了！这确实是个大新闻，就在这之前，还曾有人关心地对年近半百的陈景润提及婚事，他摇摇头，不谈婚娶．谁曾想，由昆的出现，竟使这位数学家深深隐于内心的情感一下子奔涌出来．全所同仁们都由衷地为他高兴．1980 年，陈景润与由昆结婚，那一天他们沉浸在深深的幸福中，陈景润的恩师华罗庚先生亲自到场向这对新人祝福．

"我感谢生命，它安排我与先生相识、相知、相爱，这是我一生受之不尽的幸福．"这是与陈景润携手走过 16 年之后，由昆心底的话．

婚后两年，他们的儿子出生了．那是一个寒冬腊月的日子，滴水成冰．这一天住在医院的由昆要做剖腹产，陈景润担心、激动，几乎一夜未眠，凌晨三、四点钟就起床，要去医院．家中请的婆婆告诉他，这么早，医院不开门，劝他再睡一会儿，可陈景润怎么也睡不着，五点多又起床，匆匆往医院赶．在产科病房里，陈景润望着刚从手术室被推出来、脸色苍白的妻子，心疼得不得了，他紧紧地握着妻子的手，不知所措．当医生告诉他，由昆为他生了个儿子时，他兴奋极了，当日冒着寒风步行赶到数学所，就像当年报告他有了对象一样，向所里的人们报告他喜得贵子的消息，让大家分享他的喜悦．给儿子起名时，他对由昆说，你生孩子太辛苦了，就让他随你姓，叫由伟吧．妻子感谢丈夫的真切爱心，但没有同意，"孩子是我们俩的，就叫他陈由伟吧，小名欢欢．"

儿子的降生，为已年过半百的数学家陈景润带来了无限的欢乐．当时他们还住着一间半的房子，带保姆全家四口人，十分拥挤，房间里到处挂满了孩子的尿布．陈景润全然不觉这份生活的窘迫，他满足极了，常常抱着欢欢在屋子里转来转去，他每天还去为儿子买牛奶，有一次出去时，忘了带手套，回来手都冻僵了，但他呵呵地笑着，亲着儿子的小脸蛋，心里暖暖的．那时，北京冬天的街头上除了大白菜，很少见到带颜色的蔬菜．十分喜欢花草的陈景润在家中瓦盆里种

下了一颗西红柿，竟长得茂盛健壮，结出了一串又红又大的果实．由昆摘下这些冬天里的珍品，做成汤菜，让丈夫吃，希望能给他多病的身体补充一点营养．但是陈景润说什么也不肯吃一口，“不行！欢欢需要它，吃下它，孩子会更健康的．”

孩子能满地跑了，从来不舍得为自己的事多花费一点时间的陈景润每天却都要抽出一定的时间与孩子在一起玩．他与孩子玩的方式很独特，他常常拿着糖果逗孩子，每次都要问拿走几颗还剩几颗，意在从小培养孩子对数学的兴趣．孩子接触到的每件物品，他都不仅教会孩子用中文怎么讲，还教孩子用英语说出，他希望孩子从小掌握英文这项从事科学研究必不可少的工具．孩子长到5岁之后，有一段时间对绘画发生了浓厚的兴趣，家中的墙壁上、桌椅上到处是他用彩笔涂抹的颜色．当医生爱洁净的妈妈对儿子的行为表示不满，但是陈景润却站在儿子一边，他对由昆说：“孩子画画，是要表达他内心的想法，不要阻止他．”为了鼓励儿子的兴趣，陈景润在家中的走廊上专门办起了“欢欢绘画展”，让儿子把自己的作品陆续不断地张贴在上面，陈景润工作之余，总要到画展前认真地评论一番．再大一些的欢欢有了更勇敢的举动，他把自己所有的玩具都拆散了，妈妈不解，认为这个孩子太调皮，仍是陈景润说出了孩子的心思：“这是欢欢在动脑筋了，他要研究东西的结构，让他做．”

近年来，由于病魔缠身，陈景润不得不长期住在医院．与孩子在一起的时间少了，但他对孩子的牵挂与关心却不曾停止，每当由昆带着孩子去医院探望他时，他总是拉着欢欢的手问长问短，并一遍遍叮嘱孩子上课怎样听讲，下课怎样复习，就在他去世前两个月，听说欢欢正准备期末考试，他还对由昆说：“让小欢到我这里来复习吧，我可以辅导他．”为了不使丈夫过劳，由昆最终没有同意．但是这深切的父爱却深深地烙在了孩子的心上．

由伟永远忘不掉爸爸曾经给他讲过的一道数学题，“那是他一生中给我讲的唯一一道题，后来爸爸的病就越来越重了．那道题是‘$1+2+3+\cdots+9$’，我当时小，不懂事，爸爸告诉我答案是45．他还说，对每一道题，都要认真思考，掌握它里面的规律．”“爸爸在我心中最深的印象都是他和妈妈同我在一起时开心的样子．有一次，我和爸爸、妈妈一起玩牌，我偷换了一张牌，被爸爸捉到，他开心地大笑，肚子都笑痛了．”

陈景润留给儿子的不仅仅是这些．由昆说：“关于孩子的成长，先生对我最常讲的一句话是，不要使孩子有什么优越感，要教育他尊老敬师，要告诉他，不能靠父母，要靠自己发愤．”陈景润是以渗透他生命的全部东西期望于孩子！陈由伟记住了父亲的话．他在学校是一个谦虚好学的学生，在校外是一个经常帮助邻居爷爷奶奶提东西的热心人，在家中是一个能为父母分劳、不讲究吃穿的爱子．由昆记得，有一次她和由伟一起去商场给他买鞋，想想如今许多孩子身上

穿戴的名牌,做母亲的决意要给孩子买一双名牌鞋,不想售货员把鞋拿出来一报价格,由伟二话没说,拉着妈妈就走,坚决不要.

陈景润以他的爱、以他朴素正直谦虚谨慎的品格滋养了孩子的心灵,生前他常为儿子感到欣慰,他在儿子身上看到了他所期望的,尽管他来不及看得更多.由伟曾在父亲的遗像前说过"爸爸,我绝不辜负你!"这该是陈景润在天之灵听到的最让他开心的一句话吧!

63岁的人生,对于距离摘取哥德巴赫猜想那颗数论皇冠上的明珠只有一步之遥的数学家来说,是逝去的过早过早了;对于相携走过16年风雨至亲至爱的妻子来说,这是以全部生命的代价都无法抵御的刻骨铭心的悲痛,"从先生与我相爱至今,他给予我的太多太多."由昆无限深情.

结婚16年来的每一天,只要陈景润在家,由昆下班回来一敲门,就会传出陈景润孩子般欣喜的欢叫:"由回来了! 由回来了!"

每当由昆下班碰到下雨天,陈景润都会嘱咐家中请的阿姨拿伞去车站接她,这件小事竟成为一条定律印在了孩子心上,以至于6月里有一次天下雨,陈景润住院,阿姨也出去了,年仅6岁的由伟自己找出妈妈的一件毛衣,揣上伞,穿着小汗衫短裤,跑到车站接妈妈.由昆下车,望着被雨水浇得全身直打哆嗦怀里却紧紧抱着给妈妈的毛衣和伞的孩子,心疼万分,责备他不该来,孩子却一脸欢快的说:"这是爸爸让做的事."由昆的泪水一下子涌了出来.

每天晚饭后,他们全家都要在外面散一会儿步,四五岁的小欢欢常常让妈妈抱.丈夫心疼妻子,便对孩子说:"小欢,我们出来干什么?""散步.""那你散步怎么散到妈妈怀里去了? 来,爸爸牵着你的手走."孩子这时会一出溜从妈妈的怀里滑下来,跑着奔向爸爸.

陈景润最喜欢的歌之一是《十五的月亮》,从头至尾全能唱下来,每当唱这首歌时,他都会情不自禁的用手打着拍子,眼睛深情地望着妻子.

作为丈夫,陈景润给了由昆一腔透明深厚的爱,同时也给了由昆精神和事业上的支撑.由于陈景润独具的个性,以及身为名人之妻,由昆常常遇到一些预料不到的烦恼.婚后不久,她听到一件有关陈景润早年的传闻,说是先生去城里商场买东西,回来发现售货员少找了几毛钱,又得不偿失的花费更多的钱坐车返城去讨还.她曾问先生是否有这件事,陈景润说:"哪有这等事? 我的时间每天都不够用,怎么会为那几毛钱再花费半天."由昆不禁对编造这个"故事"的人十分生气,但陈景润却以大度、淡泊的心境对她说:"不要生气,不要管别人怎么想我们,说我们,这都不重要."

还有一次,由昆在中科院宿舍等班车,一位老者问她是哪个所的,她答是数学所的,当那位老者和她同乘一车时,凑过来对由昆说,你知道吧,陈景润疯了,他媳妇要和他离婚! 由昆说这根本不可能,是造谣.那老者说,好多人都知道

了,不信去问问你爸爸(他把由昆当成数学所某人之女了).由昆非常生气,对那老者说:“告诉你,我就是陈景润的爱人,我叫由昆.陈景润没有疯,我也不会和他离婚,我们的感情一真非常好,现在也非常好!”那老者目瞪口呆.由昆回家后,气愤难消,把这件事告诉了陈景润,陈景润对妻子说:“不要管它,别人愿怎么说随他说好了,重要的是我们现在不是生活得很好吗?”

“先生的宽厚大度给了我精神上极大的抚慰,支持我走过了风风雨雨.”由昆每每说起这句话.

由于陈景润事业及身体的原因,作为妻子的由昆在家里有着更多的操劳,然而在单位上,作为医院放射科的主任,她仍有着出色的工作.有人说她是女强人,由昆不同意,她说一切都是先生支持和激励的结果.1984年,陈景润病情加重住院之后,中科院和她所在医院的领导决定让由昆休班照顾陈先生,由昆同意了,不想陈景润坚决不同意.他对由昆说:“我生病了,已经要耽误工作了,你不能再为我也耽误工作.”由昆与孩子去看陈景润都是在星期天,如果哪一天由昆去的日子不是休息日,陈景润都要问清是不是上夜班,如果不是,就立刻让由昆回去上班.陈景润这种看来近乎呆板的做法,真切地表达了他对事业对工作的无私.其实,他何尝不想有更多的时间与妻儿在一起?医院的许多医护人员都曾多次见到过,每当由昆和孩子来看望陈景润时,他总是紧紧地抓住他们的手,久久不肯松开.

“先生从来都是为工作想,为别人想,就是不为自己想.在他病重期间,他从来没有停止过工作,就在他去世前几天,他还用手撑着眼睛为他的博士生修改论文.我只有努力工作,不然,我对不住先生.”

1996年春节是陈景润一家三口最后一个团圆年.被抢救过来的陈景润住在北京医院,由昆和孩子节日里天天去医院和他呆在一起.大年初三,陈景润精神很好,对由昆说:“给我唱首歌吧.”由昆刚一开口,他也随着唱起来,他们唱了《小草》、《我是一个兵》.由昆看着生命力顽强的丈夫,很是感动,她坚信随着又一个春天的来临,先生一定能再站起来.她告诉陈景润,5月22日,她和孩子要把他接回家给他过63岁的生日,陈景润高兴极了.然而,由昆万万没有想到,就在这之后不久,陈景润的病情突然恶化,高烧不退.3月18日,由昆抓住不断处于昏迷中的丈夫的手泪如雨下:“先生啊!先生!你不能走,你一定要看着儿子长大,看着他上大学.”陈景润用微弱的声音回答:“我一定!我一定!”这是陈景润最后的话.3月19日,他走了——这一天是丙子春分的前夕.

从这一天开始每个晚上,欢欢开始作功课时,由昆就会到陈景润的相片前坐下,“我要陪陪他,和他说会儿话.先生是多么不想离开这个家啊!他没有走!”由昆常常这样静静地坐着,许久许久.

是的,陈景润没有走.63年前,他与春天一起来到这个世界,63年后,他又

停留在春天的门槛上.他的生命与春天同在……

3 哥德巴赫猜想①

——王丽丽、李小凝

对陈景润这样的人,成名是一种痛苦,甚至成为了对他的工作的干扰.他如果不是那么大名气,可以有更多的安静的空间,有充分的时间来更好地进行他的研究.成名对他来说真是一种痛苦,一般人可能不知道,也不能理解.

我想,要是没有成名,他的研究可能要比他后来的进展深入得多.

——徐迟

陈景润的事迹公开报道之后,在社会上引起了强烈的反响,在那个是非不明的年代,人们对陈景润评价不一.当时的《中国青年》适时开展了"在青年中可不可以提倡学习陈景润的讨论".据当时主持这次讨论的编辑回忆,开始陈景润是不同意展开这个讨论的.他说:"不要提倡向我学习,我没做什么工作,应当提倡向雷锋、王杰那样的英雄模范学习."但是讨论依然进行了.因为是否提倡向陈景润学,已不是对他个人的评价,而是对他献身祖国科学事业,二十年如一日,含辛茹苦、坚忍不拔地走过的这条路的评价,是对他所代表的优秀知识分子的评价.讨论的结果是大家可以预想到的,陈景润不仅不是白专,而且是又红又专的典型.这不仅是对陈景润的承认,也是对全中国知识分子的承认.随后发表的报告文学《哥德巴赫猜想》更把对陈景润的宣传推向了顶点.

1977年11月,已经60多岁的著名作家徐迟在武汉接到《人民文学》杂志社的邀请,希望他能到北京采访一下陈景润.当他搜集材料准备采访的时候,很多人阻止他说:"算了,算了,写这样有争议的人物,没好处."后来徐迟特意请教了一位长者,问他陈景润能不能写.长者说,陈氏定理很重要,写吧.

徐迟先到数学所去见了陈景润,他"意想不到地发现,陈景润竟处身于那样尖锐的矛盾斗争的生活中,可泣,可歌"之后,徐迟去了华北油田,回来已经12月了,他开始动笔,第一个星期采访,第二个星期写作,第三个星期修改,到第四个星期,一篇《哥德巴赫猜想》已经在《人民文学》的编辑部里发稿了.

数学所的支部书记李尚杰成为徐迟的主要采访对象,他讲陈景润的饮食起居,讲陈景润的为人处事,讲陈景润的逸闻趣事,渐渐地,一个刻苦得近乎痴迷的陈景润显现在徐迟的面前."众人认为是可笑的事,实际上正说明陈景润专注

① 原载,王丽丽,李小凝,著.陈景润传.新华出版社,1998年.

得比别人深，他整个人埋在他的研究里，我没见过其他的科学家能像他这样．所以我写的时候，带着很钦佩的态度．"

当时陈景润还住在那间6平米的小屋，他推着门不让人进去，也不好意思接受采访．徐迟在整个写作的过程中总共见过陈景润两次，进过他的小屋一次．为了能采访好陈景润，徐迟先采访了与他同事的杨乐和张广厚，和他们一起归纳出采访的提纲，提纲一共三个问题：(1)"猜想"这个题目是怎么回事？(2)"猜想"的题目怎么写，答案怎么写？(3)(1+2)的突破在哪里？徐迟和陈景润围绕着这三个问题交谈了两三个小时，陈景润把解答这些问题的三段数学公式抄给了徐迟，正如读者看到的，徐迟在他的作品的显著位置引用了这些公式．

徐迟写《哥德巴赫猜想》的时候，并没有想到会给陈景润和他自己带来那么大的影响，他说："陈景润拿出了成果，我只不过是给他照了相．"这位18岁开始写作，写过诗歌，写过散文，写过小说的多产作家说："我写得最好的报告文学是《哥德巴赫猜想》和《祁连山下》．"

报告文学《哥德巴赫猜想》的发表，使陈景润在全国的影响迅速扩大，他由一位科技界的优秀工作者，成为妇孺皆知的民族英雄．就像当年向雷锋学习一样，全国掀起向陈景润学习的热潮．拗口的哥德巴赫猜想成为使用频率极高的词，几乎每个人都能说出这个世界级数学难题的来龙去脉，科学家一夜之间成为最时髦的职业．这当中有文革期间残留的热情在作怪，人们对陈景润的崇拜也难免盲目，但是这对于纠正当年"读书无用"的观念，纠正人们心中的极左思想起到了不可估量的作用．

1978年2月17日，《人民日报》、《光明日报》同时转载了徐迟的《哥德巴赫猜想》．这一天，陈景润应天津科协的邀请，正在天津做报告，中午当他在李尚杰的陪同下从天津回到北京的时候，发现邮局前人头攒动，许多人在争相购买当天的报纸．当他得知大家争相一睹为快的是《哥德巴赫猜想》之后，他赶紧从人群中退了出来，连声说："这样不好，不好．"

这股愈刮愈烈的"陈景润旋风"不仅席卷了中国的大地，而且漂洋过海，震荡了另外的半球．英帝国学院一位博士说，英数学家正设法请陈景润访英．路透社发表文章评论徐迟的报告文学．原文如下：

> [路透社北京二月二十一日电]（记者克里斯托弗·普里切特）有一名在一个显然没有实际重要的问题上取得进展的中国数学家，在这里已被提高到民族英雄的地位．
>
> 报纸上对陈景润的报道，将使西方电影明星和政治家感到妒忌．最近，一篇关于他的生平和研究成果的报道，除了在一些专业杂志上刊登以外，还占去《人民日报》和知识分子阅读的《光明日

> 报》的大部分版面.
>
> 中国人说这篇报道,使报纸像刚出炉的热饼一样,很快销售一空.它是多年来公开发表的最有人情味的小说之一.
>
> 有一个人说,"这篇报道非常动人,文字真美."他面前摊着一份《光明日报》.
>
> 关于陈的身世的报道,不仅可以使人了解中国人心目中的人情味是什么,而且展示了中国的科学在文化革命时代以后的大转变.在文化革命期间,科研必须产生受到赞美或者是可以容忍的成果.
>
> 陈一直在设法证明哥德巴赫猜想,这个猜想由一个德国人于一七四二年提出……

《哥德巴赫猜想》发表之后,陈景润应《人民文学》编辑部的邀请去那里作了一次客,并向徐迟和编辑部表示感谢.

此后,陈景润和徐迟保持着电话联系.1979 年之后,他们的来往渐渐少了.八届全国人代会召开的时候,徐迟作为湖北代表来京开会,因为时间紧张,他没有去看望陈景润,两人错过了最后相见的机会.

写完《哥德巴赫猜想》,徐迟还保留了一些素材,"我准备陈景润证明(1+1)的时候追踪再写一篇,后来跟数学家们一讨论,认为这个问题非到 21 世纪才有可能解决,所以我就放下了."

关于《哥德巴赫猜想》对陈景润个人的影响,徐迟在接受《三联生活周刊》记者专访时表示:"对陈景润,这篇文章起了一定的作用,但也有许多不好的作用.因为当时影响很大,他一下子成了名人.对陈景润这样的人,成名是一种痛苦,甚至成为了对他的工作的干扰.他如果不是那么大名气,可以有更多的安静的空间,有充分的时间来更好地进行他的研究.他后来有了许多社会活动,他要当人大代表,他还是一个学校的校外辅导员,而这些活动是要花很多时间的.成名对他来说真是一种痛苦,一般人可能不知道,也不能理解.我想,要是没有成名,他的研究可能要比他后来的进展深入得多."

1996 年,陈景润逝世的噩耗传来,已届 82 岁高龄的徐迟,须发皆白,他伸出颤抖的手写就了《悼念陈景润》:

> 著名数学家陈景润先生去世,这是我国数学界的一个巨大损失.人们为他致哀.我也默默地悼念他.18 年前我写的一篇文章《哥德巴赫猜想》在《人民文学》1978 年元月号上发表.紧接着上海《文汇报》和党中央的《人民日报》转载了,各地党报转载了,他的事迹就为广大读者所知;当年对青少年的成长也许有过较好的影响.以后我和他再没有往来了,但我知道他很好,很忙.他自己藏起来

作研究,找他也找不到.我不敢干扰他,他一直很有成绩.没有想到突然的消息传来,他已去世.

我深深地悼念他,祝他的灵魂平安!

徐迟

1996年3月21日

湖北省作协顾问徐迟于1996年12月12日深夜不幸去世,享年82岁.

也许是一种巧合,徐迟生前的最后一位采访对象也是一位原籍福建的科学家,也姓陈,他就是北京大学副校长陈章良.从陈景润到陈章良,这位老作家似乎在用一条无形的线提示人们,在他整整20年的报告文学写作生涯中,他描绘了祖国春天的到来,他关注着中国科学的发展壮大.

1996年12月13日,"徐迟同志治丧小组"在为徐迟作生平总结时,有这样一句话:(晚年的)徐迟同志痛惜时光流逝,他以一个著名作家特有的社会使命感和思想敏锐性,把目光聚集在现代化建设和科技发展上.徐迟同志以自己的创作实践再次证明,作家应当是一只预报时代精神的"晴雨表".

4 《陈景润传》序①

——周光召

1996年3月19日,年仅63岁的陈景润院士离开了我们.他走得太早、太匆忙了.他几十年超负荷地工作,对生命透支得太多了.陈景润去世前,中组部、统战部、卫生部和科学院党组和学部的领导多次到医院探望.去世还不到一个半小时,统战部常务副部长刘延东就赶到医院代表王兆国部长慰问亲属.不久,中组部、统战部和科学院的领导也来到了医院.首都各大报纸、电台、电视台都发表了消息.乔石、朱镕基、胡锦涛等中央领导同志委托秘书打来电话表示沉痛哀悼并慰问家属.温家宝同志亲笔写了唁函,用传真从外地发到北京.几天里,从他的家乡父老到全国各地的普通百姓,从他的同事友人到年轻学生,无不感到悲痛.温家宝、卢嘉锡、洪学智、朱光亚、王兆国等领导送了花圈.一位科学家的去世,牵动了众多人的心,引起这么大的反响,是罕见的.这足以说明陈景润在全国人民心目中的地位.

陈景润在学术上的成就是有目共睹的.除了在哥德巴赫猜想研究中"1+2"的辉煌成果以外,他在解析数论的其他许多重要问题,如华林问题、圆内整点和

① 原载于王丽丽,李小凝,著.陈景润传.新华出版社,1998年.

球内整点、算术级数中的最小素数、小区间中殆素数分布、三素数定理中的常数估计、孪生素数、哥德巴赫例外集等问题的研究中，获得多项重要成果，做出了不可磨灭的贡献.他的学术成就为国内外所公认，先后获得全国科学大会奖、国家自然科学一等奖、华罗庚数学奖、何梁何利基金奖等重大奖励.

陈景润具有强烈的爱国精神和民族精神.他在国际科学前沿争得了一席之地，为中华民族争了光.他不愧是新中国培养的知识分子中最杰出的代表之一，是我们民族的骄傲.1974年，国际数学家大会在介绍意大利数学家朋比尼获数学菲尔兹奖的工作时，特别提到"陈氏定理"作为与之密切关联的工作之一.陈景润本人曾两次(1978年和1982年)收到国际数学家大会作45分钟报告的邀请.美国普林斯顿高等研究所曾两次邀请陈景润去作访问研究.毛泽东主席、周恩来总理和邓小平同志都曾亲切关心过陈景润的工作和生活.他的事迹和拼搏献身的精神在全国广为传颂，成为几代青少年心目中传奇式的人物和学习的楷模.对于振兴我国的教育和科技起到了巨大的推动作用.这是陈景润在学术领域以外的一大贡献.

陈景润的敬业精神，更使他对数学的迷恋和热爱达到了如痴如醉的程度，数学研究几乎是他的全部生活和精神寄托.他的生命早已和数学融为一体.他心里装着非常宏伟的目标，在实践中则一步一个脚印，一步一个台阶.他有着超人的勤奋和顽强的毅力，多年来在极为艰难的条件下，孜孜不倦地致力于数学研究，废寝忘食，每天工作十几个小时，常常通宵达旦.无论是在"文革"中受到不公正对待，还是遭受疾病折磨时，他都没有停止过自己的追求.他的生活则是简单到了不能再简单的地步.

从20世纪70年代后期到20世纪80年代中期，他已是闻名全国的学者、全国人大代表.在参加一些重要会议时，他仍停不下手头的研究.为了不影响别人休息，他常常深夜到有灯光的走廊或厕所去看书，使许多与会者既惊讶又钦佩.在住院治疗期间，他也不间断研究工作.医生给他扎针，他不让往右手扎，他说他还要用右手写字.同志们去探望，劝他放下工作、安心养病.他总是摇摇头，说他离不开数学.到了生命的后期，他已不能握笔，不能清晰地发声，但仍用僵硬的手势和含混的语言，和他的学生探讨数学问题.这需要何等的毅力！他的成就是刻苦攻读与钻研的结晶，是用心和血铸成的.

正是这种精神使他登上了一座座数学的高峰.在他用筛法证明"1+2"之前，数论专家曾普遍认为，要想沿用已有的方法(包括筛法)来证明"1+2"是不可能的.而陈景润居然对筛法敲骨吸髓，作了重大改进，使其效力发挥得淋漓尽致，从而震撼了国际数学界.这不能不使全世界的同行惊羡不已，难怪许多来华访问的外国著名数学家，都要求亲眼见一见这位中国的数学奇才.去年德国一位资深数论专家访问数学所，特地带来哥德巴赫当年致欧拉信的复印件和英译

文，装人镜框赠送给数学所，并说："如果哥德巴赫在世，他一定会访问中国，访问北京."

陈景润学风非常严谨，对就是对，错就是错，绝不含糊.他的谦虚谨慎，更为科学界称道.他从来不说自己的工作有多重要，从来没有去争什么奖项.对他工作的高度评价都是国内外专家做出的，他所获得的奖励都是组织上替他申请的.工作自己做，评价由别人，这是他的哲学.反映了他对学术成果评价的严肃态度.有人问他，你认为你最重要的工作是什么？他说，可能是"1+2"吧，但也不一定.他的心思已经瞄准了下一个目标.

今天我们纪念陈景润，具有很强的现实意义.如果说陈景润的学术成就只有很少人能够达到，那么对于他的敬业精神则是我们每个人都应该学习的.陈景润视事业如生命的献身精神，他追求真理、勇攀高峰、勤于探索、精益求精的创新精神，他甘于寂寞、安贫乐道、脚踏实地、艰苦奋斗的拼搏精神，他的科学道德、严谨学风以及谦虚谨慎的精神，是我们宝贵的精神财富.不仅科技人员要学习陈景润的精神，各行各业的人员都应该学习这种敬业精神.对于年轻人来说，这一点尤为重要.陈景润虽然走了，但是在他身上集中体现的我们中华民族的优良传统和作风必将继往开来，发扬光大.

陈景润院士永垂青史.

1997年岁末

5 "1+1"之外的陈景润[①]

——林融生　陈强

提起陈景润，几乎无人不晓.可近年来被帕金森综合征困扰的陈景润，一再谢绝记者采访，使得许多人对他的印象仍然停留在当年的"6平方"和"1+1"上.

那么，陈景润近况如何？他真的像外界盛传的那样，只知做学问而不谙人情世故吗？

初秋时节，我们满载乡情进京，叩开了这位福建籍数学家的家门.

迎候的是陈景润夫人由昆.

换鞋步入明亮的客厅，陈景润如约在沙发上等候我们.他正和不满10岁的胖儿子陈由伟一块儿看连环画呢！

① 原载《福建日报》，1991年10月12日.

“请坐！请坐！”陈景润高兴地朝我们打招呼，只是显得有点拘谨．他依然留着常见的小平头，只是有了些许老人斑和丝丝白发，仍然是那熟悉的福州乡音，只是吐音有些含混不清．

随之而来的是握手、寒暄、交谈，普通话、福州话、英语交替使用，你来我往，四周环绕着亲切、谦和的气氛．学者的严谨、贤者的豁达、智者的敏锐同时在他身上显现出来．

交谈过程中，陈景润不时吃力地闭起双眼，用手紧紧捂住额头按摩，待喝了夫人递上的茶水后，才缓缓睁开眼来．由昆说：景润这症状，源于 7 年前在街上被自行车撞倒后诱发的帕金森综合征．

可想而知，病魔给陈景润的工作和生活带来了多大的苦楚和困难！

好在陈景润有个懂医的夫人．由昆是北京 309 医院放射科主任医师．每天下班回家，她都要为丈夫做上半小时的理疗，并督促他做模仿骑自行车、划船之类的体育锻炼，如今，陈景润的病情已得以有效控制，比别的同类病患者恢复得好．

“妈妈经常买些爸爸喜欢吃的东西，像绿豆糕、苹果啰！爸爸爱吃红萝卜，妈妈怕他咬不动，就特地煮得很烂很烂．”虎头虎脑的陈由伟亲热地凑到我们耳边说．

陈景润用脑过度，每天需要补充高蛋白．由昆白天忙于上班，就叮嘱生活秘书每天早上为陈景润准备牛奶、鸡蛋，中、晚餐煮他喜欢吃的稀饭（陈景润还保持福建人的习惯），但必须有肉类和菜类．“我们每月的工资基本上都花在吃上了”，由昆说罢，又为陈景润倒满茶水，双手捧到他的唇边．当我们夸奖她贤惠时，这位夫人笑了笑说：“每个妻子都会这样做的．”

陈景润中年得子．儿子和他都属鸡，两人相差 48 岁．“小鸡”和“老鸡”的性格差异太大了．父亲少时是个公认的“书呆子”，儿子却活泼淘气．据由昆介绍，小由伟已是中关村第三小学四年级的学生，成绩良好．这孩子聪明而粗心．比如数学吧，不该丢分的他丢了，可大多数同学做不来的附加题，他倒会做．景润曾试图教他数学，可儿子难以接受数学家的高深讲解，只好另请家庭教师了．

由伟见大家在谈论他，便跑回卧室拿出一大叠彩照．这是他们全家前不久上长白山度假时拍摄的．由伟特地从中找出几张他的“杰作”叫我们看，拍得还真有点“味”呢！

值得一提的是，这个小朋友口才特棒．他常常将在外界的所见所闻加上自己的联想，“胡编乱造”一番说给父亲听，逗得陈景润咧嘴大笑．

我们忙里偷闲，看清了整个房间的格局：四房一厅，面积在 100 平方米以上．墙上贴墙纸，地上铺地毯；彩电、冰箱、洗衣机、电话、煤气炉、排油烟机等现代化设备，同样进入了这个数学家的小天地．

由昆告诉我们，类似的套房在中关村只有20多套，都是分给年老资深的科学家，58岁的陈景润算是其中最年轻的住户了．他从当年的“6平方”搬进专家楼，还是邓小平同志特批的呢！

的确，国家对陈景润这个“国宝”关怀备至：让他在家里自行安排工作时间；特地拨给一笔专项护理费；请了一位生活秘书照顾日常生活；指定医生定期上门检查身体．此外，一些友人、企业也不时为他提供帮助．而对这一切，陈景润觉得受之有愧，他说：“我做得很不够．”

虽然陈景润比由昆大17岁，但他们结合11个年头，很少闹别扭．如果说夫妻间有什么不愉快的话，其中之一就是陈景润“太固执”，不顾病体“开夜车”．

从这种意义上说，身患顽症的陈景润依旧是当年的陈景润．他晚上很少在一、两点钟前关灯．这个老规矩，连他的爱妻也破不了．

“妈妈经常半夜起来，看爸爸休息了没有．看到爸爸书房灯还亮着，就叫：‘景润、景润，快去睡，明天再写吧！’”小由伟乘妈妈到厨房拎开水的瞬间，赶忙把一些内情透露给我们：“有一回，爸爸没听妈妈的话，继续在写他的数学公式，结果妈妈火了，把我都吵醒了！”

病魔破坏了陈景润的运动系统，但他的数学头脑却奇迹般地完好无损．有一次，家里电话号码簿丢了，由昆急得团团转．没想到，陈景润居然把家里常用的电话号码全记住了．问一个，随口就能说出一个．从此，陈景润成了家里的活电话簿了．

陈景润仍然倾心于老课题——哥德巴赫猜想．他当年关于“1+2”的论证，目前在国际上仍处于领先地位．“愈逼近极限，难度愈大，虽然全世界许多数学家都在努力摘取这项桂冠，但用传统的数学方法证明‘1+1’已行不通，关键要找到一种全新的方法．这就好比，用肉眼无法观测外星球，用电子望远镜才可能办到．可至今尚未有人找到类似电子望远镜的新手段……”陈景润尽量用通俗的语言介绍这个人们陌生的领域．

独自攀登数学“珠穆朗玛峰”，对体弱的陈景润来说，显然有些力不从心了．他必须寻找合作伙伴，尽快把自己的思路化为铅字公之于世．近年来，他所培养的4名博士生成绩斐然，在中科院数学研究所众人皆知．他单独与他人合作在国内外权威刊物发表了40多篇论文，还出版了两本有关解析数论的专著．

陈景润过于老实厚道，有时也让夫人难以接受．他被自行车撞到这等地步，对方单位要处分闯祸的小伙子，他却三番五次替人家求情，说那是“无意的”；住院没几天，就急着出院，他担心的是小伙子家里负不起医疗费哪！

一位在“文革”中毒打过他的同事准备出国留学．此人请陈景润为他写推荐信，陈居然爽快地答应了．由昆对此颇有微词：“人家过去虐待过你，你还对人家好？”陈景润憨笑着说：“过去的事过去就算了，人家的前途还是要关照的．”

谈起这些"傻"事,夫人不免要瞪他一眼.但对陈景润参与公益慈善活动,夫人则热心支持.陈景润捐献给老家福州郊区胪雷村建礼堂的200元钱,及寄给经济拮据的同窗好友的款子,都是由昆亲自到邮局汇出的.

时间已近22点,不便过分打扰陈景润,我们起身告辞.陈景润颤巍巍地站起来,坚持要和家人一同送我们到楼道口.他双手分别紧握我们的手,希望通过本报向关心他的父老乡亲们问好.我们衷心祝愿这位数学巨子健康长寿、家庭幸福、多出成果.相信广大读者与我们有着共同的心愿.

6 他在喜玛拉雅山巅行走①

——沈世豪

雪峰,冰川,晶莹剔透的神话世界.

1972年,经过九九八十一难的陈景润终于登上喜马拉雅山山巅了.他用独特的智慧和超人的才华,改进了古老的筛法,科学、完整地证明了哥德巴赫猜想中的(1+2).1966年,他曾证明过,其时,洋洋洒洒的200多页论文,繁琐且不乏冗杂之处,《科学通报》发表的,仅是一个摘要式的报告,而现在,一篇流光溢彩、珠圆玉润的惊天动地之作,就揣在陈景润的怀里.

他无限喜悦,恰似兀立这世界罕见的绝顶,览尽绮丽风光.远天如画.骄傲的白云,极为温顺而优雅地簇拥山前.黄河,长江,还有中华民族的脊梁长城呢?它们化为了奇峰绝壁中遗落的传奇?还是以不屈的英姿,托起了这几乎是亘古不凋的丰碑?

同时,他也感到莫名的忧虑.林彪自我爆炸之后,中国政坛发生了强烈的震撼.不愧是一代伟人的毛泽东,以力挽狂澜之势,"解放"了175位将军,并于1973年4月,开始启用邓小平,虽然,极左思潮并没有得到根本的纠正,"四人帮"仍是甚嚣尘上,但滚滚寒流中,已经可以预感到不可遏制的春天的气息."老九不能走",毛泽东一句诙谐的话语,使处于逆境中的知识分子强烈地领略到阳光的和煦和明媚.陈景润并不完全了解中国当时的政治气候,他从周围人们的神色和对他的态度中,已隐隐感觉到,局势已经相对宽松一些了.毕竟是受过严重冲击,并且声言再也不搞业务的人,心中的余悸并未完全消失.他私下里对要好的朋友透露:"我做了一件东西,不敢拿出来."

没有不透风的墙,陈景润的秘密终于暴露了.当时,派驻中国科学院的军代表负责人是一个将军,久经战阵的他也得知了消息,沉着地告诉部下,尽量动员

---

① 原载自沈世豪,著.陈景润.厦门大学出版社,1997年.

陈景润拿出来，八年过去了，“文革”大乱，相当于打了一场抗日战争，科学领域已鲜见奇葩异草，正直的人们，同样渴望那能引来百花盛开的一枝独秀.

陈景润是谨慎的.他把这一“稀世珍宝”交给自己最信任的北京大学教授闵嗣鹤先生.闵先生在北大曾开过《数论专门化》的研究生课程，培养了曾攻下哥德巴赫猜想(1+4)的潘承洞等奋发有为的一代中年人，更重要的，闵先生一贯为人厚道、正派，是个德高望重的数学界前辈.

命运同样钟情陈景润，当时，闵嗣鹤先生的确是审定这一论文的最理想人选.不过，当时闵先生已经得了病，他心脏不好，体力衰弱，他把陈景润的论文放在枕头下，靠在床上，看一段，休息一会.老学者是极端认真的，每一个步骤，他都亲自复核和演算.犹如登山探险，沿着陈景润的脚印和插上的路标，他抱着病躯，喘着气，一步一步地往前走.风雨兼程，实在坚持不住了，坐在冰冷的石头上歇一会，咬着牙，又往前走.可敬可佩的闵先生，用生命之火的最后一缕光焰，点亮了陈景润的前程和中国科学的明天.

经历三个月，闵先生已是精疲力竭，他含着满意的笑容，向陈景润说道：“为了这篇论文，我至少少活了三年.”

陈景润的眼圈红了，嘴里不住地说：“闵老师辛苦，谢谢闵老师.”

数学所的王元，也独立审阅了陈景润的这篇论文.王元在“文革”中同样受到冲击，无端被诬为一个所谓反革命小集团的成员之一.他和陈景润同辈，在冲击哥德巴赫猜想过程中，同样有过辉煌的战绩，他证明过(3+4)、(2+3)、(1+4)，为了慎重起见，他请陈景润给他讲了三天，并进行了细致的演算，证明了陈景润的结论和过程都是正确的，在“审查意见”上写下了“未发现证明有错误”的结论，支持尽快发表陈景润的论文.

事实被不幸言中，闵嗣鹤教授在审核完陈景润的论文不久，因病而不幸去世.陈景润闻讯悲痛万分，他痛楚地对同事说：“闵先生是好人，今后，谁来审我的论文呢?”

《中国科学》杂志于1973年正式发表了陈景润的论文《大偶数表为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和》.这就是哥德巴赫猜想(1+2)，该文和陈景润1966年6月发表在《科学通报》的论文题目是一样的，但内容焕然一新，文章简洁、清晰，证明过程处处闪烁着令人惊叹的异彩.

世界数学界轰动了.处于政治旋涡中的中国数学界，尚未从浓重的压抑中完全解放出来，但不少有识之士已经看到了陈景润这篇论文的真正意义：它是无价之宝！是一颗从中国大地升起的华光四射的新星.

密切关注陈景润攻克哥德巴赫猜想(1+2)的外国科学家，看到这篇论文以后，真正信服了.世界著名的数学家哈勃斯丹从香港大学得到陈景润论文的复印件，如获至宝，他立即将陈景润的(1+2)写入他与里歇特合著的专著中.他们

为了等待陈景润对(1+2)的完整证明,把已经排印好的该书的出版日期推延了数年之久.在该书的第十一章即最后一章,以"陈氏定理"为标题.文章一开始,就深情地写道:

> 我们本章的目的是为了证明陈景润下面的惊人定理,我们是在前十章已经付印时才注意到这一结果的;从筛法的任何方面来说,它都是光辉的顶点.

陈景润喋血跋涉的精神,感动所有深知其艰辛的人们.华罗庚在"文革"中久经"四人帮"一伙的迫害,处于逆境之中.他得知陈景润的情况,这位提携了陈景润,并培养了不少出类拔萃学生的数学大师,一生严谨,轻易不评价他的学生,也压抑不住内心的激动,说道:"我的学生的工作中,最使我感动的是(1+2)."美国著名的数学家阿·威尔(A. Weil)在读了陈景润的一系列论文,尤其是关于哥德巴赫猜想(1+2)论文以后,充满激情地评价:

> 陈景润的每一项工作,都好像是在喜马拉雅山山巅上行走.

震惊海外的社会效应,在当时相对封闭的中国,许多普通老百姓是不清楚的.陈景润的知名度,主要源于徐迟的那篇著名报告文学《哥德巴赫猜想》,陈景润为中国人赢得了无比的自豪和骄傲.在《中国科学》上刊登了他的那篇著名论文后,他第一个想到的,并不是接踵而至的荣誉和鲜花,而是培养了他的老师和给予他帮助和支持的同事、朋友.他恭恭敬敬地把论文寄给远在厦门大学母校的老师们,并在篇首题上表示感激的话语和名字.或许,是经历了太多的患难和逆境,陈景润把由此而来的名利、荣誉、待遇看得很淡.他仍是穿着已经褪色的蓝大褂,看到同事,仍是闪在一旁,率先问好,或表示谢意.一场大战过后,捷报飞扬,并传及海外,在陈景润的目光中,一切仿佛都是那么平常,那么顺其自然.他依然节俭得让人感到过分.唯一奢侈的是,不忘记在竹壳热水瓶中放下几把药店中买来的最便宜的参须.

1973 年是不寻常的.表面上的特殊平静,往往预示出人意外的高潮.黄钟大吕,在有着五千年文明历史的中国,并不至于会那么平淡无奇地消融在飘逝的岁月里.尽管,"文革"大劫此时并未结束,中国正处于一种政治上的非常时期,但光明和真理依旧倔强地展现出那不可战胜的伟力.以毛泽东同志为首的中国共产党人如擎天大柱,撑起科学的蓝天.

陈景润是个传奇式的人物,他是新中国培养的第一代大学生,由哥德巴赫猜想引发的传奇,以常人无法预料的情节,揭开了更为波澜壮阔丰富多彩的一

页.或许,只有生长在中国的陈景润,才有幸享受和领略如此的幸运.

7 陈景润尊师的故事①

——张飞舟

张飞舟,厦门人民广播电台记者.

4月的厦门,火红的木棉花开得那样美,那样艳,春天给人们带来了无限的喜悦……

在厦门大学的校园里,师生之间相互传递着一个消息:厦大骄子——陈景润要回校参加60周年的校庆活动啦!

他确实回来了.这位24年前毕业于厦门大学的数学家,带着对母校的思念,带着对曾经培育他的师长们的深情厚谊回来了.

5日下午5时35分,当175次列车在厦门车站徐徐停稳后,只见身穿半新蓝色中山装、戴着白边近视眼镜、理着平头的陈景润,从11号硬卧车厢走下来.他向欢迎的人们说的第一句话是:"我非常高兴回到我的母校来."他像久别家园的游子回到母亲身边一样,显得格外快乐和激动.他说,在厦门大学学习,是我一生中最难忘和最最幸福的时期.每当我回忆起在厦大当学生时的美好情景,我永远不会忘记教过我的老师.我非常尊敬这些热心教育事业,给我以谆谆教导的老师们,是他们给予我许多的指导和帮助.从离开厦大到现在,我每时每刻都怀念着我亲爱的母校,怀念着教过我的老师……"

被人们誉为"懂得人的价值"的著名经济学家、厦门大学的老校长王亚南,曾经对陈景润给予了无微不至的关心和爱护.陈景润重返母校,格外怀念这位已故的老校长.校庆活动安排得满满的,有一天早晨,陈景润四点多钟就起了床,匆匆用过早餐,便乘汽艇赶往鼓浪屿.天刚蒙蒙亮,他就来到王亚南校长的家里.一进门,他紧紧握住年已七旬的王师母的手,无限深情地说:"我非常非常地想念王校长,非常感激王校长对我的培养和教育."王师母拉着他的手慈爱地说:"我们在报上看到了你的照片,听到你的消息,感到特别亲切.假如他今天还活着,一定也是很高兴的."陈景润来到王校长的遗像前,与王师母一起回顾那令人难忘的往事:王校长当年生动活泼的报告,拄着拐杖、打着雨伞走访学生宿舍的身影,大清早和陈嘉庚老先生察看礼堂工地的情景.20多年前的事了,陈景润今天讲起来还是那样熟悉,就像发生在昨天一样.他讲着讲着,眼里噙满了泪水.1969年11月13日王校长含冤去世的时候,他正在"专政队"里,后来是从一位校友那里知道了这一噩耗,这位冷静的数学家再也抑制不住内心的悲痛,

① 原载《中国青年》,1981年第15期.

潸然泪下，痛哭了一场.王师母曾给他寄过一张王校长的遗照，可惜他没收到.陈景润说："我心里急得要死，好几次到那信海中去翻找，结果都没找到."他恳求王师母再送给他一张以作永久纪念，王师母满足了他的要求.临别时，陈景润奉献给王师母一套国画图片.

校庆大会那天上午，陈景润和大家一起前往会场.当人群匆匆走过数学馆的时候，忽然间，陈景润在另一大群人中发现了李文清教授."是他!"陈景润冲过人群，三步并作两步直向李教授奔去，紧紧握住李教授的手，激动得说不出话来，半分钟左右，才说："先生，我一定来看您!"两天之后，陈景润果然出现在李教授家中.李教授曾经是陈景润向"哥德巴赫猜想"进军的启蒙老师，陈景润非常尊敬和感激他.陈景润说："我到北京后，一直想着老师的培养和教育.现在搞研究工作，总觉得以前老师的指导和培养是非常重要的.基础是老师帮我打下的."他还把最近发表的数学论文送给李文清教授审阅，并在论文的扉页上工工整整地写下："非常感谢我师的长期指导和培养——你的学生陈景润."

方德植教授早年毕业于浙江大学，1943 年到厦大任教，1952 年担任数学系主任，亲自教授"高等微积分"等三门课程.他严谨治学的态度，一直受到陈景润的敬仰.陈景润这次回母校，沿途有很多单位邀请他做学术报告，由于时间紧，他都一一婉言谢绝，唯独在浙江大学作了短暂的停留.有人不解地问起这件事，陈景润回答说："因为那是我老师读书的地方，是培养我老师的学校，我怎能不去看看呢?"有谁能想到，这位著名的数学家，对老师的母校也如此尊重!

陈景润回到厦大，又来到方德植教授家拜访.他认真端详着方先生的慈容，慢悠悠地回忆说："那时，我见先生头上只有一点白发，不像现在这么多哟……""我看到先生身体这么好，还是很健康，我心里真高兴呀!"师生两人哈哈大笑起来，笑得是那样快活.方教授望着这位已获得突出成就而对老师又如此恭敬的学生，心里暖烘烘的.他不由得又想起这位学生的一件往事：那是 1977 年，方德植教授到北京编写教材.陈景润听说后，立即打电话给方教授，但未联系上.陈景润在时间上是非常吝啬的，可是用来接待老师，他却格外大方.从中关村到方教授的住处，路上要花一两个小时，他先后五次前去探望.第一趟去时，他早上八点多钟就到了，不巧方教授外出，他一直等到十二点，中午随便吃了点东西，又继续等到下午两点，仍未见到.因为下午有事，他只好遗憾地回去了.尽管在北京他这样热情地接待了老师，陈景润心里仍觉得不够周到.当方教授回到厦大不久，就接到陈景润寄来的一封道歉信.信中这样写道："从我师到北京这一段时间内，生由于各方面的工作很多……生在招待我师方面很不周到，望我师原谅."为了让年迈的老师看得清楚，陈景润把稿纸上的两格当作一格用，字写得一笔一画、端端正正，"生"字写得特别小，以表示对老师的敬意.

一个辛勤园丁的快乐，莫过于看到自己亲手培植的幼苗开花结果，一位毕

生执教的老师的慰藉，莫过于看到自己的学生在事业上取得突出成就．这位既有成就又如此谦虚的学生带给老师的，又何止是慰藉呢！

8　陈景润同青少年谈怎样学好数学①

——邵森　林玉树

邵森、林玉树，《光明日报》通讯员、记者．

前不久，我们到中国科学院数学研究所，访问了著名数学家陈景润．他十分热情地把我们拉到他的办公室，指着放在桌上新收到的一大堆来信说："看，最近全国各地给我的来信更多了，其中大部分是青少年朋友们写的，他们在信中都热烈希望我谈谈怎样学好数学的问题，不知道你们对这个问题有没有兴趣？"

当陈景润听说我们这次来正是要采访这方面的问题以后，便滔滔不绝地谈起了数学在工农业生产中的意义和学习数学的正确方法．

陈景润说，要学好数学，首先要明白数学的意义．在自然界中存在着大量的数和图形，比如一个人、二个人、三个人……其中的一、二、三这就是数．又比如，我们在生活中见到的圆形、三角形、正方形这就是图形．数学与人类生活密切相关．人类在同自然界的斗争中，在生产实践中，不断地总结经验，逐步形成了数学这门学问．现在，在小学里，算术是重要的课程之一；在中学，数、理、化也是课程中最主要的部分．如果数学学不好，那么物理、化学也不可能学好．在理工科大学中，数、理、化更是重要的基础课程．总之，不论在大学，还是中小学，把数学作为很重要的课程是很有道理的，很符合实际的．当前，由于数学与四个现代化关系非常密切，所以，我们要特别下功夫把数学学好．数学搞得好不好，对农业、工业、国防和科技现代化有着很大的影响．在工农业生产中我们都希望能多快好省地完成任务，但是在现有条件下，如何合理安排生产过程，使产量最高，质量最好，使消耗费用最小，而又能在最短时间内完成任务，这就需要数学的理论指导和数学的计算，所以数学对社会主义建设事业具有重要的意义．这些情况说明，要实现四个现代化，数学必须大踏步地赶超．怎样才能实现赶超呢？首先必须依靠党的领导和坚持社会主义道路．同时还要培养出千百万又红又专的青年一代科学家，形成一支宏大的科学工作者队伍．希望寄托在青少年身上．

谈到这里，陈景润说："有的青少年朋友一时学不好数学，就觉得自己脑袋笨．真是如此吗？不是的！"我们中华民族是十分勤劳、勇敢、聪明的民族．我们一点也不比外国人笨！自古以来，我国人民对数学发展曾做出光辉的贡献．谈到这里，他突然问道："你们听说过这样一个题目吗？现有一百元款，要买一百

① 原载《光明日报》，1978 年 5 月 22 日．

只鸡，已知大公鸡每只五元，母鸡每只三元，小鸡每三只值一元，问一百只鸡中，大公鸡、母鸡、小鸡各有多少?”

我们回答不上来，在静静地等待他继续说下去.

他接着说:“这叫做百鸡术，是我国古代人民提出的.很出名呢！还有圆周率($\pi=3.141\ 592\ 6\cdots$)、孙子定理和商高定理，这些成就的取得都远比西方早.只是近百年来，由于反动的封建统治，以及帝国主义的侵略，我们才落后了.解放以后，在党的领导下，我国数学工作又有了较大的发展，我们正在努力赶超世界先进水平.但是，前几年由于‘四人帮’的干扰破坏，本来已经缩短了的距离又拉大了.粉碎‘四人帮’后，数学工作又出现了万马奔腾、踊跃向前的新局面.我们一定要有民族自豪感，要坚定地树立起赶超世界先进水平的信心.绝对不能因为碰到一些暂时的困难，就认为自己脑袋笨，就丧失攻关的勇气.”

陈景润之所以取得重要成就，完全是由于长期努力、刻苦钻研的结果.他告诉青少年们:要学好数学，攀登科学高峰，没有什么捷径走.唯一可行的办法是勤奋！千里之行始于足下，涓涓细流汇成江海.不下死力气、不做硬功夫，要学好数学是不可能的，要攀登高峰更是办不到的！当然，除勤奋之处，还得注意学习方法，争取做到事半功倍.

怎样运用正确的学习方法呢？陈景润一会儿坐着细心地向我们讲述道理，一会儿又站到黑板前，为我们举例说明.听着他的话，就好像跟着他在数学的花园中漫步一样.他说:

“第一，要学好数学，首先要牢固地掌握基本概念.正确理解数学的基本概念之所以重要，是因为它是掌握数学基础知识的前提.犹如建筑房子一样，基础打得牢靠，造出来的房子才牢固.打基础的最好办法是反复地学习基本概念.既不要以为基本概念很抽象，难理解，而轻易地把它放过去，也不要以为它很容易懂，而不肯去深入理解.万事开头难.入了门就有了主动权.应当尽一切力量，争取早日入门.千万不要轻视简单的东西，一定要在一门新课、一个新篇章的开头多下功夫.比如，在几何学中，角的概念是基本的.老师说，不能用直尺和圆规经过有限次的步骤三等分一个任意角，而用别的工具是可以做到三等分的，有的同学却不注意.过了一些日子，他告诉老师，他三等分了一个任意角.问他用什么办法？原来他除了用直尺和圆规以外，还用其他的工具.这是没有意义的工作，结果白费了时间.基本概念掌握不牢，真是害死人呐！

“第二，数学研究和其他科学研究一样，要实事求是，循序渐进，按部就班地前进.只有一步一个脚印，学得扎扎实实，才可能逐步提高.以解方程为例，如果一个同学连一元一次方程 $x+5=0$ 都不会解，他怎样能解二元一次方程组呢？因后者经消元之后就是一元一次方程，对此，他一定会感到束手无策，只好尽弃前功了.当然，在熟练掌握基本概念的前提下，最好能再选做一些难度高一些的

习题，以利于训练思维和逻辑推导的能力.

“第三，要注意培养良好的习惯和作风.学习中一定要做到专心致志，上课听老师讲解要全神贯注；下课复习、做题、阅读参考书籍也要精力集中，争分夺秒.同时，要注意用新学到的知识去巩固旧知识，加深理解，这样一环套一环，必定获益无穷.比方，在上中学时，注意用代数的方法去解算术题，在上大学时，注意用大学所学的知识去解中学学过的知识，做起来非常方便，而且印象深刻.中学生背两角和的正弦、余弦公式，感到很挠头，证明也不简单.如果上大学以后，用复数的概念来证明一下，就会轻而易举地掌握它了.

“第四，要多做习题，要独立思考，自己动手.在做出一道较难的习题以后，还要回想一下，这道习题的难点和关键点在什么地方？有没有其他简单的解法？例如：$9\,999\times999$，如果使用一般的计算方法，非常麻烦，并且可能算错.但是如果改写成为 $9\,999\times(1\,000-1)$，那么这样算起来就很简单了，并且不容易出错.做习题时，不要死套公式，要注意灵活应用.例如，解方程式$(x-4)^2=25$，如果死套公式，就是：$x^2-8x+16=25$，运用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 求根的办法，经过较繁的计算，求得 $x_1=9$，$x_2=-1$.而简单的办法是方程两边开平方：$x-4=\pm5$，$x_1=9$，$x_2=-1$，一步得出结果，并且不容易错.无论是计算题或证明题，都要力争不出错，如果出了错，要自己想方设法找出原因来，总结教训，不再重犯.

“第五，要练好基本功.学习一个定理，首先要搞清楚这个定理的已知条件是什么，定理中所要证明的结论是什么，每一步推理都要论据充分，十分严谨，决不能马马虎虎.以角度的量度为例，常见的有 60 分制，即周角的$\frac{1}{360}$称为 1°，另一种是弧度制.这两种单位各有长处和短处，在不同情况下应当适当地选择相应的单位，这样计算起来就简单了.陈景润曾经问过一些同学，cos 90 等于多少？sin 90 等于多少？回答是 $\cos 90=0$，$\sin 90=1$.显然，这是错误的.为什么呢？只要基本功学得好，一看就明白了.”

陈景润同志一再要我们转告青少年朋友们，学数学千万不可好高骛远.有的人基础知识还没学好，就去钻研费马问题；还有的人向他报告“1 + 1”问题已经证明成功，实际上却是错的.这种学习方法，无异于奢望骑自行车去月球旅行，是达不到目的的.我们希望这些不肯用气力，企图轻易取得成绩的同学，能从这次谈话中得到启示.

9 我所了解的陈景润①

——张新学

张新学.著名人像摄影师.

3月19日晚7点,陈景润的夫人由昆给我打电话,告诉我陈景润因病医治无效,不幸逝世的噩耗.悲恸之余,我又一次回忆起去年采访陈先生的情景.

9.1 为陈景润摄影

1995年11月4日下午,在北京中关村医院7号病房,我拜访了曾以"1+2"在哥德巴赫猜想研究方面取得了迄今为止世界上最好成果的著名数学家陈景润先生.

深秋时节,室外已经有了几分寒意.陈景润身着休闲服,在妻子由昆和一位姓季的老人陪伴下,静静地在病房中休息着.

自1984年陈景润被确诊患有帕金森综合征以来,他经常往返于各大医院之间.现在,陈景润生活不能自理,无法独立行走,双手手指已经弯曲,肌肉部分萎缩,语言表达相当困难,但他的思维还是相当敏捷的.

当中科院的柏万良向陈景润介绍说,张先生是专门拍摄名人肖像的摄影家,我们特意请来为您照相时,他那有时很费劲才能张开的双眼睁了开来.我看到,虽然多年来病魔摧残着他的身体,但那双黑边镜框后面的眼睛,依然闪烁着智慧的光芒.

在我当天的安排中,采访陈景润后,要到著名古人类学家贾兰坡和老作家叶君健先生家分别送去我为他们拍摄的24寸放大照片.这时,由昆建议让陈景润看看两位老先生的大幅彩照,陈景润看到照片,眼睛睁得大大的,口中喃喃地说着:"贾—兰—坡,我—认—识,好—!"

由于天色较晚,病房的光线暗了下来,使我这个惯于用室内自然光拍摄人物肖像的人无从下手,我只好和由昆约好第二天再来拍摄.我们向陈景润道别,他望着我们,用不能伸直的手紧紧握住我的手,说:"谢—谢—你—,谢—谢—你."目送我们离去.

11月5日上午9点多,我们再次来到病房,陈景润穿着一件大红色的毛衣和由昆及14岁的儿子陈由伟在一起,等待着为他照相.在陈景润和家人的配合下,照片拍得很成功.几天后,我为他送去照片,陈景润抓到手里连声说:"好—好—好!"露出满意的神情;当他看全家的合影时,又是那样的迫不及待,

① 原载《光明日报》,1996年3月25日.

流露着对妻儿深沉的爱.

9.2 陈景润的恋情

由昆是中国人民解放军某医院放射科主任.谈起夫妻感情,可以看出她是那样深深地爱着自己的丈夫陈景润.

那是1978年,由昆在解放军湖北某部工作,领导安排她到解放军309医院学习,正巧,陈景润也在309医院高干病房住院.有一天,由昆值班,陈景润来到值班室,问她,你爱人在哪个单位?由昆说我还没有结婚呢.陈景润又问你有没有男朋友,由昆顺口答应道没有.陈景润没再说什么就走了.

一天,由昆在医院的一处平台上学习英语900句,陈景润走过去说,我们一起学英语吧,这样进步快.由昆不解地说,你学你的,我学我的,干吗要在一起学呢?陈景润说还是一起学好,而且坚持要由昆到他病房学英语.由昆说那可不行,院里有要求,不许打扰你,陈景润讲没关系.后来,在一起的学习中,陈景润向由昆表露了爱慕之清.

由昆非觉吃惊,无法接受这个现实.自己是个年轻医生,而陈景润是中外知名的大科学家,这怎么可能呢?可陈景润是那么执著地爱慕着由昆,由昆只好给自己的家人写信,请他们出主意.她父亲为此写了长达十几页的回信.在信中,父亲告诉她,陈景润是认真的,建议由昆不要拒绝命运多舛的陈景润,不要伤他的心.陈景润性子更急,没等由昆家人回信和由昆明确答复,对由昆说就这么定了,并且到数学所宣布自己有对象了,请组织去考察.

由昆很耐心地对陈景润讲,我们俩不合适,我的脾气不好,你和我在一起会经常吵架的.陈景润说,你和我吵,我不和你吵,吵架生气伤身体,怎能吵架呢?

陈景润和由昆是幸福的,他们结婚时,著名数学家华罗庚先生亲自到场祝贺.正像陈景润所说,他们婚后真的没有吵过架.

当然,身为名人之妻的由昆,有时也有预料不到的烦恼.一次,她在等班车,一位老者问她是哪个所的,由昆说是数学所的.过了几天,那位老者又和她同乘一车,凑过来和由昆说,你知道吗?陈景润疯了,她媳妇要和他离婚!由昆说根本不可能!那老者说,好多人都知道了,不信去问问你爸爸(那老者把由昆当成数学所某人之女).由昆非常气愤,对那老者说,告诉你,我就是陈景润的爱人,我叫由昆.那人不信,说不会的.由昆真气急了,说这还有冒充的吗?义正辞严地指出,你这么大岁数的人,不要胡说八道,陈景润没疯,我也不会和他离婚,我和陈景润感情一直非常好,现在也非常好!

9.3 陈景润的父子情

采访中,我们谈到陈景润的感情生活.由昆深情地说,过去很多宣传陈景润

的文章，把他描写成满脑子数学公式，不懂生活和感情的书呆子，其实，陈景润是个懂得感情、善解人意、有血有肉的人.

他们的宝贝儿子欢欢快出生时，已是十冬腊月，天气很冷.陈景润得知由昆第二天要剖腹产，很为妻子担心，早晨三四点钟就醒了，吵着要去医院，家中请的婆婆说这么早医院不开门，去了也进不去，劝他再睡会儿.可是陈景润再也睡不着了，五点多钟就起了床，简单吃点东西，匆匆赶到医院.

当医生告诉他，由昆为他生了个儿子时，陈景润高兴极了.但他看到妻子被从手术室推出来，脸色苍白时，又不知所措了，爱怜之情涌上心头.陈景润冒着寒风，从医院步行到数学所，报告他喜得贵子的消息，让大家分享自己的喜悦.

儿子的降生为这位著名数学家带来了无限欢乐.他常常抱着欢欢在屋子里转来转去，转累了就叫"由，我受不了了，你抱会儿吧！"他除了抱着孩子玩，每天还去为他买牛奶.一次，竟然没带手套就跑了出去，回来时手都冻僵了，但他的心里却是暖暖的.

陈景润想起妻子生孩子时的痛苦，心里总觉得欠着由昆什么，他跟由昆商量，你生欢欢时那么痛苦，不能让孩子忘记，我看孩子就叫由伟吧.由昆说，不能那样，孩子是我们共同的，还是叫陈由伟吧.

陈景润闲暇时喜欢种花种草，而且种什么活什么.他在自家的阳台上种萝卜，种白菜，连大葱、大蒜也要种一种，每样长得都那么可爱.陈景润还在阳台上种西红柿，竟然也结出硕大的果实.他风趣地说，这给孩子吃一定有营养，孩子会更健康.

9.4 永远辉煌

1984年4月的一天，陈景润从家中骑车到魏公村的新华书店去买书，被一个外地来京的小伙子骑着急驶的自行车撞倒，后脑着地，当即昏了过去.在一个月的治疗中，医院确诊他患了帕金森综合征.

1985年，灾难又一次降临到他头上，陈景润坐公共汽车去买书，被拥挤的人们挤到车身底下，摔昏了过去.他再次住进医院.

1991年4月，陈景润在家中骑健身车锻炼身体，不慎摔倒在地，造成股骨胫骨骨折，从此他只好由人搀扶着走路了.

生活带给了陈景润许多的不幸，但也给予了他耀眼的辉煌.

陈景润以常人难以承受的顽强毅力推进了哥德巴赫猜想的解决.他的著名论文《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》深受世界数学界的重视，他以精心的解析和科学的推算论证了"1+2"，其中的定理 $Px(1,2) \geqslant 0.67Xcx/(\log x)^2$ 被英国数学家哈勃斯丹和联邦德国数学家里歇特誉为"陈氏定理"，是"筛法"的"光辉的顶点".

1992 年，陈景润获得了第一届华罗庚数学奖，这是用来奖励一个数学家终身成就的.

中国科学院数学所党委书记李福安介绍说，日本出版的《一百个有挑战性的数学问题》一书刊登了两个华人的像，一个是我国古代数学家祖冲之的画像，另一个就是陈景润的照片.

1995 年 1 月，首届"何梁何利基金"在人民大会堂颁奖，陈景润等 20 位科技专家获奖.这是一项对科技成就特别卓著、达到国际领先水平的科学家的奖励.

生命后期的陈景润对数学依然神往.在病中，他还培养了三个博士、一个硕士.虽然语言表达受到了限制，但他的思路仍然清晰敏捷，还不时翻看着那厚厚的论文……

10 怀念学长

——访福建省副省长、厦门大学福州校友会理事长潘心城[1]

——遥 青

3 月 19 日对潘心城来说，是个悲痛的日子.这天他正在上海出差，电波辗转传来噩耗：陈景润逝世！悲痛之余，他给陈景润夫人由昆发了一封唁电：

> 惊悉景润学长不幸仙逝，痛不堪言.景润兄一生执著数学研究事业，攻坚不止，赢得殊荣，受到国人和世界友人之敬重.兄长才德兼备的品格为吾侪厦大学子树立了楷模.他的逝世，不但是科学界的一大损失，也使我们失去一位良师益友……

3 月 27 日，潘心城在他的办公室里对记者谈起陈景润时，依然面带戚容："60 年代我在厦大念书时，校园里就盛传本校出了个数学界奇才，但真正接触陈景润，却是在他生病之后.他非常顽强，自患帕金森综合征，手脚不听使唤，走路颠颠倒倒的，却不要人搀扶.我几次到医院看他，他在病床上不是看书，就是为研究生修改论文."

作为校友，潘心城和陈景润缔结了深深的友谊，一起吃饭时，患了病的陈景润双手发抖，饭送不到口中，潘心城就为他剥虾，喂他吃菜.

"陈景润为人重感情，待人诚恳，随和，他的口头禅就是：谢谢，谢谢."1991 年，陈景润在阔别十年之后第一次回福建，首先就是到母校福建师大附中参加 110 周年校庆.后来，厦大福州校友会聘请他当名誉理事长，他欣然同意，并抱病参加了校友会活动.前两年潘心城上北京出差时去了陈景润家，陈景润非常

---

[1] 原载《福建日报》，1996 年 3 月 31 日.

热情,潘心城说起自己去过他老家福州胪雷村时,陈景润喜不自禁……

潘心城说,自己最大的遗憾,是这次在北京开人代会期间,由于会务繁忙,没有去拜访陈景润.说着,他拨通了陈景润夫人由昆的电话:“由大姐,过一段带孩子到福建走动走动,散散心……”

11 陈景润留给我们的财富①

——宁可

3月19日,陈景润与世长辞了.这令许多爱戴他的人深感痛惜.

两年前的3月,我与另一名记者曾在中关村医院的病房里采访了陈景润,写下了题为《陈景润:一个久违的名字》的长篇报道,发表在一家报纸的头版,在中关村科学城和一些高校中引起了不小的轰动.当时的主要想法是提醒人们注意一个事实:最近十年来关于陈景润的报道少了,人们关注科学和科学家的热情有些减退,而对物质享受的迷恋和对追求金钱的崇尚日高.我们试图通过重提陈景润这个“久违了的名字”重新唤起人们对知识的渴求和对科学的热爱.现在看来,这种呼吁在两年前是有必要的,在今天仍然是有必要的.

陈景润的一生,是摒弃物质享受而呕心沥血地在艰辛的科学道路上跋涉的一生.他的过早逝世,实在是因为他多年积劳成疾、为事业透支了生命的结果.他是这个世界上距离哥德巴赫猜想这颗璀璨明珠最近的人,他走了,没能最终摘取这颗明珠,这实在令人扼腕痛惜,但他以奋斗的一生为我们留下了一笔丰厚的精神财富,启迪我们对人生的意义和人生的追求进行审视和思考.

陈景润是一个爱国的科学家.20世纪70年代他在英国讲学时,一位大学校长曾盛情挽留他,说要为他提供世界上最好的研究条件和生活待遇.可是这位当年在动乱年代被斥责为“白专典型”和“没有政治灵魂”的人,竟毫不犹豫地回答:“感谢你的盛情,可我得回中国去,我是全国人大代表,我应该回去.”他带着一个中国人的骄傲回到了祖国,新华社为此专门发出快讯,向全国人民报告“陈景润回来了”.作为一个科学家,爱祖国应该是至高无上的,“科学是没有国界的,可是科学家是有祖国的”,这是历史上许多伟大的科学家的共识.陈景润无疑是一个伟大的科学家,他把自己的命运和祖国的命运始终连接在一起.这以后许多年,只要陈景润愿意,移居国外对他来说是一件极为容易的事情.可是他没有走,直至回归脚下的厚土.

陈景润是一个善良的科学家.“文革”中有个人凶残地打过他,还烧毁了他

① 原载《光明日报》,1996年4月4日.

耗费十几年心血计算出的几麻袋数学手稿.悲愤交加的陈景润绝望地从四层楼上跳下来,万幸没有发生生命危险,那人竟挖苦说不愧是研究数学的,连跳楼都能算好角度.对这样一个人,他却不计前嫌,后来还为此人出国留学写了推荐信.他那颗善良的心大概以为,在动乱的年代里一个人的疯狂是可以原谅的,而对在新时期想要追求科学的人是一定要帮助的.还有,他被人骑车撞伤,却生怕肇事者受委屈,硬把责任归于自己.这种温良谦恭、克己忍让、对他人充满爱心的行为折射出中华传统文化中的高尚人格追求.提倡善良、爱心在今天是有实际意义的.科学研究过程本身是一个竞争的过程,在研究哥德巴赫猜想的竞争中,陈景润是冲在前面的,但在学术上的竞争并不妨碍他对他人充满人道主义的爱心.同样提倡经济竞争并不妨碍我们通过努力建立一种人与人之间和谐的关系和全社会的精神文明.

陈景润是一个有普通人情感的科学家.他热爱生活,热爱自己的家庭、妻子和孩子.两年前我们采访他时得知,他爱人由昆在一家医院工作,上班很忙,只有下了班才能带着儿子陈由伟和精心配制的饭菜,坐公共汽车赶到医院看望他.这时候是陈景润在病房里最高兴的时候.陈景润替儿子操心的事很多,担心儿子做作业时粗枝大叶,担心儿子考不好会上不了重点中学,据说,这些心事竟影响到了他的治疗效果.记得当我们问他对儿子将来的前途有什么打算时,他用含混不清但让人明显地感到充满慈爱的话说,希望他能搞数学,但由他选择.舐犊之情溢于言表.他与在医院长期照顾他的老季师傅建立了深厚的感情,他对经常去医院探望的数学所老书记李尚杰充满敬意,他与医护人员密切配合、和睦相处.陈景润在现实中是一个普普通通的人,他有常人的烦恼、常人的情感.他以自己的行动告诉我们,科学家并不像在一些人中传说的那样是不食人间烟火的"怪物".我们看到,当前,在青少年中立志当一名科学家的人数比十多年前"科学的春天"到来之时减少了,孩子们的偶像成了那些有"有感情"、"会生活"的明星或大款.陈景润告诉我们,也告诉许多孩子的家长,科学家是一批最具有高尚情感、最懂得生活意义的人,青少年应把做这样的人作为一种追求,因为科教兴国需要这样的新一代.

陈景润离开了我们.在他的身后,留下了对科学发展的杰出贡献,留下了作为一名中国人的光荣与自豪.以他攻克的世界著名难题"1+2"而命名的"陈氏定理"将永载数学史册.中科院数学所的一位负责同志曾说:"陈景润1966年就求证出的'1+2',从现在看来,在世界范围内有谁想超越他,今后20年内可能还看不出眉目."

陈景润作为一名爱国的、善良的、有普通人感情的科学家,他的一生给我们的启迪是多方面的.20世纪70年代末,徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》把陈景润推到了世人面前,震撼了全国人民的心灵,陈景润成为科学与献身的代名

词，激励了整整一代人奋发向上、刻苦攀登科学高峰．在 20 世纪 90 年代的今天，我们希望，他能再次激励人们，尤其是青少年为追求科学、追求真理而勇于献身．

陈景润在丙子春分前夕走了，春分这个节气带来的是春光明媚．十多年前，动乱的严冬过去之后，陈景润随着“科学的春天”的到来走到我们中间，他的出现代表了一种希望：科学、真理和善良必将战胜迷信、谬误和野蛮．

陈景润虽然走了，但这种希望却永留人间．

12 陈景润走了①

——史玮 宋建华

昨天，我们把一束洁白的玫瑰捧到陈景润的遗像前，63 朵白玫瑰，用以缅怀他 63 年全力以赴的生命．

照片安放在陈家的客厅，小小的客厅已经被布置成灵堂，21 日清晨，前来慰问和悼念的人络绎不绝，有老领导，有陈景润多年的中科院数学所的同事，有刚刚从福建老家赶来的他的亲人，还有许多敬仰他的晚辈．窗外春雨绵绵，遗像中的陈景润微笑着面对大家，此刻，他可以安息了．

患帕金森综合征长期住院的陈景润，今年年初因肺炎并发症病情加重，虽经全力抢救，终因呼吸循环衰竭，医治无效，于 1996 年 3 月 19 日 13 时 10 分在北京医院逝世，享年 63 岁．

> 在陈景润生命的最后日子里，感受了党和组织给予的最大的关注和关心，医院和医生竭尽最大的努力，一次次地将他从死神的身边挽回．

12.1 在病榻上走完生命的最后一程

陈景润病情恶化始于今年 1 月 17 日．

那天，陈景润的老朋友、原中科院数学所党委书记李尚杰去中关村医院探望，“记得 1 月 17 日下午，景润教授还让我们扶他起来，说是想到外边走走．看他精神不太好，就劝他不要出去．”那天，李尚杰和一直护理陈景润的老季，一左一右扶着他在病房里只走了两圈，“也就四五十步吧，景润就支持不住了，吃力

① 原载《北京青年报》，1996 年 3 月 22 日．

地说走不动了，赶紧把他扶上床躺下休息.”李尚杰记得当时陈景润的手脚冰凉，后来才知道，事实上，陈景润当时已经开始出现不适.当天晚上，李尚杰就接到了陈景润夫人由昆从医院打来的电话：“景润发高烧了.”

病情发展得很快，1 月 27 日清晨 6 点 20 分，陈景润的呼吸和心跳突然停止.“大夫，大夫”，守护在一旁的由昆一边采取紧急措施，一边大声叫来主管医生.中关村医院内科主任兼心血管科主任李惠民立即进行人工呼吸，大约 8 分钟后，陈景润才渐渐恢复了心跳.

当日上午，北京医院帕金森综合征治疗中心许贤豪教授、呼吸科副主任王晓平医生以及 309 医院的院长等立即在中关村医院紧急会诊.1 月 27 日下午，在有关部门的关照下，陈景润被紧急转往北京医院.

傍晚时分，北京市卫生局医政处姚处长亲自调来急救车，陈景润在前一辆，以备不测的医护人员和救护设备紧随其后.车行至半路，意外还是发生了，陈景润的喉咙又一次被痰堵住，情况万分危急，身边没有吸痰器，眼看陈景润的脸色发青，姚处长迅速掏出随身的吸痰管，一头插入陈景润嘴里，一头伸给自己，他用力把痰吸出来，陈景润已变得黑紫的脸色才渐渐现出红润.

急救车终于到达北京医院的时候，北京医院领导和有关科室主任正在焦急地等候，而此时，从上午就赶来的一直忙前跑后的中组部、统战部以及科学院、数学所的领导才算稍稍放下心来.

2 月 1 日，陈景润顺利脱机(呼吸机)拔管，以后数日病情一度稳定.

2 月 5 日，他再次发热，胸片显示双肺炎症，改用新的抗菌素.

2 月 8 日，体温仍不降，胸片显示肺部感染未控制，北京医院再次组织专家会诊.与此同时，医护人员从患者胃管中抽出咖啡色液体，考虑为上消化道出血，暂禁食，并进行静脉高营养.

2 月 26 日，陈景润外周静脉条件不好，改为锁骨下静脉插管.陈景润体温仍在 38℃以上.

3 月 18 日 11 时，陈景润血压突然测不到，一度为零，并出现心衰、休克.经麻醉科插管、呼吸科上呼吸机、抗休克抢救治疗后，血压恢复.

3 月 19 日上午，陈景润两次出现心率下降，经抢救后重新维持在 150 次/分左右.12 时 35 分心率突降为零，心电监测示波为平线，立即于心外按压，多次三联静推，后出现室扑、室颤，先后 6 次除颤，均未恢复心跳，于 13 时 10 分离开了人世.

大年初三，他曾经断断续续地唱了两支歌：《我是一个兵》和《小草》，他对生命的信念依旧乐观而坚定.这一天，他在亲人们的心海中，留下了暖暖亲情的最后记忆.

12.2 陈由伟说:我不会辜负父亲

刚刚过去的春节,是陈景润一家三口最后一个团圆年.被抢救过来的陈景润住在北京医院,身体时好时坏很不稳定地维持着.除夕,由昆和他们14岁的儿子陈由伟一直在医院和陈景润呆在一起,天黑才回家.

大年初三,数学所的领导一行人前去医院探望,病房里陈景润一家三口都在.那天,陈景润的心情很好,甚至断断续续地唱了两支歌——《我是一个兵》和《小草》.

李尚杰记得:"那天景润教授说话很清晰,看得出,他对自己的治疗很乐观,尽管仍然发烧.我们大家鼓励他,劝他好好养病,景润还一再表示感谢,一再说谢谢."

尽管陈景润重病在身已经十余年,可当他病逝的消息传出,大家还是感到意外突然.在已成永诀的亲人遗像前,由昆续上一炷香,一次又一次泪眼朦胧.在景润生命垂危的最后时刻,好几次,她把床榻上昏迷的陈景润唤醒,尽管他的身体上插满了管子,不能言语,可是从他的眼神里,由昆能明白他已不能表述的言语.

14岁的由伟懂事地站在父亲的遗像前,他说他老是想着去中关村医院看望爸爸时的情形,那时,陈景润的病情还没恶化,"我和妈妈扶着他站到楼梯口的镜子面前,妈妈问咱家谁最高,爸爸还开玩笑,说当然是我."由伟记得在病房里,他和妈妈围在病床边,由昆给陈景润读书,由伟在一旁抚摸着父亲的头.

陈由伟含着眼泪给记者讲了他小时候的一件事情:"爸爸给我讲过一道题,那是他一生中唯一给我讲的一道题.后来,爸爸就病得越来越重了.那道题是'$1+2+3+\cdots+9$',我当时还小,不懂事,爸爸告诉我,题的答案是45,他还说,对每一道题,都得认真思考.小时候我很淘气,妈妈为我的功课着急,爸爸就说,欢欢(是陈由伟的乳名)还小,等他上到初二就会好了.今年,我上初二,可爸爸不在了……"由伟说不下去了.14岁的陈由伟看上去比实际年龄成熟许多,他很懂事地招呼着前来慰问的叔叔阿姨,送我们出门的时候,由伟认真地说:"我不会辜负父亲,一定."

1978年是科学的春天,陈景润和他的"哥德巴赫猜想"甚至改写了一代青年的人生方程式.

12.3 他的贡献不仅仅是哥德巴赫猜想

人们究竟是因为哥德巴赫猜想知道了陈景润还是因为他知道了哥德巴赫

猜想，这并不重要，事实上，他的生命早就已经与他毕生努力的数学成为一体.

1978年，中国历史刚刚翻开新的一页，历经磨难的科学百废待兴.陈景润的出现仿佛是黯淡了许久的天空升起了一颗耀眼的巨星.

人们记得，在1978年徐迟那篇著名的报告文学《哥德巴赫猜想》中，有这样的一段："陈景润把全部心智和理性统通奉献给这道难题的解题上了，他为此付出了很高的代价.他的两眼深深凹陷了.他的面颊带上了肺结核的红晕，喉头炎严重，他咳嗽不停.腹胀、腹痛，难以忍受.有时已人事不知了，却还记挂着数字和符号……"

中科院数学所党委书记李福安博士说，景润曾经是那个年代青少年心中传奇式的楷模，今天，数学所里的研究生中很多人就是那时长大的孩子.

陈景润曾先后获得全国科学大会奖、国家自然科学一等奖（与王元、潘承洞合作）、何梁何利基金奖、华罗庚数学奖等重大奖励.他的学术成就为国内外所公认.1974年国际数学家大会介绍朋比尼获菲尔兹奖的工作时，特别提到"陈氏定理"，作为与之密切关联的工作之一.陈景润于1978年和1982年两次收到国际数学家大会作45分钟报告的邀请，在"1+2"的伟大成就之后，他在哥德巴赫数的例外集问题的工作（与刘健民合作）仍是目前最好的.

凝望着陈景润安详的遗照，李福安深有感触："他不算是一个天才，他的成就是实实在在用自己的生命换来的."陈景润靠的是超人的勤奋和顽强的毅力，多年来孜孜不倦地致力于数学研究，"每天他的工作时间都在12个小时以上，他的成就是用生命换来的."李福安望着遗像中的老同事，眼圈又一次红了.

远在大洋彼岸的刘健民是陈景润带出的最后一个博士生.知道老师病逝的消息，刘健民在电话里泣不成声，久久不能平静.就在去年，他的论文寄回国内，病中的陈景润坚持亲自审阅，在病房里，陈景润硬是用手撑开眼睛，就着灯光一行一行仔细地研读，字里行间，渗入陈景润的心血，渗入他对数学的挚爱.

1995年12月，新年来临之际，陈景润在病床上告诉他的秘书，他要计划下年的工作，他请秘书抽空去情报所搜集些新资料，"(1+1)目前国际上研究现状，另外把有关费马定理的讨论也找来"，他想等身体好一些的时候看看这些资料.

在数学所业务办公室，朱世学谈起对陈景润的印象，未开口竟沉默了许久.看得出，他那份心情的深重是遮拦不住的.朱世学曾在1979年陪同陈景润前往美国新泽西州的普林斯顿高等研究院担任客座教授进行数论研究，在那里他和陈景润朝夕相处度过了半年的时间."陈老最感动我的是他对科学研究的那种勤勉精神，而这种精神他是以整个生命作代价的."说话时，朱世学的目光一直远远地望着窗外."那时，陈老一般早上四五点钟就要起床，而桌前的台灯经常通宵不熄.对青年学生，陈老总能抽出时间予以指导和关心.记得有一次，十几

名中国留学生打电话约陈老联欢，陈老竟抽出了整整一天的时间，把同学邀请到家里，还亲自为学生们煮了银耳粥.他还勉励青年学生一定要珍惜良好的学习环境，为祖国的科研工作贡献力量."

我们的玫瑰夹在众多的献花丛中，簇拥着陈景润留给人们的安详而坦荡的微笑.63朵白玫瑰寄托了我们的悼念，这里面也加入了很多人的心情.

清晨7点30分，记者叩开一家花店，当卖花的小姑娘听说这花是送给陈景润的，她一枝一枝地挑选修剪，一大捧洁白的花朵郑重地交到记者手里时，小姑娘低缓地说了下面的话："也带去我的心情吧，陈景润是数学家，他属于我们国家……"

13 陈景润有个满意的家①

——刘星云

刘星云，《消费时报》记者.

立秋后的一个星期天，我如约敲开了陈景润家的门.不巧由于临时变更，他与夫人去给一个好友祝寿去了.下午再登门，他仍未归.晚上又去，才总算见到了这位大名鼎鼎的哥德巴赫猜想迷.

时光流逝，如今的陈景润已是五十有七了.虽然仍是当年的小平头，但两鬓已出现了斑白.这位中国科学院数理学部委员，多年患帕金森综合征，语言和视力都有障碍，再加上他一口浓重的福建腔，采访只得在他的家人配合下进行.

陈夫人由昆女士是位医生.她说陈景润是个最不听话的病人，晚上很少在二三点钟以前睡觉，怎么劝都不行，甚至把他的书藏起来，还是无效.他用眼过度，有时到了一下子看不到东西的地步.

虽然如此，陈景润仍在关注哥德巴赫猜想.当年他对哥德巴赫猜想的研究成果，现在仍然处在世界领先地位.目前他主要致力于它的外围研究，为进一步突破创造条件.另外还在进行初等数论和最小初数的研究.这些年他先后带出了三位博士研究生.

陈景润还是当年的陈景润，他的规矩没有改变，即使他所挚爱的夫人也无能为力.他表示，现在环境、家庭条件都这么好，没有理由不去拚命地搞研究和做学问了.

他最为满意的就是家庭.他一方面满意妻子体贴、贤惠、能干，儿子可爱、聪明、活泼.另一方面他满意家里的设施给生活和工作带来的极大的方便.家里有一扭火就着的电子煤气灶，有一扭开关就来热水的煤气热水器，还有抽油烟机，

① 原载《消费时报》，1991年8月31日.

他知足.

陈景润经常出国,但他家里的家用电器基本都是国产的.他觉得我国家电工业发展快,很喜人,国产货性能不差,维修也方便.现在他感到自己的选择很对.家中的一台雪花牌电冰箱和一台白菊牌洗衣机,都已用出了感情,好几年了,仍安然无恙.

陈景润中年得子,视为掌上明珠.儿子陈由伟9岁了,上小学三年级.父亲称他是顶聪明的淘气包.父亲儿时是个公认的书呆子,儿子却极好玩好动,又很好强自信,自称自己的语文、数学、自然、美术、足球都是强项,成绩在中上等之上,还有一着拿手戏就是说笑话,常把老爸逗得合不拢嘴.

陈景润觉得晚些要孩子是件好事.孩子一出生就赶上了改革开放,从小接触新事物.现在能开发孩子智力的东西真是五花八门,多种多样,只要是对孩子身心发育有好处的,他都在所不惜.

小由伟很爱父亲.他说:"过去有些报纸杂志把爸爸说成是不知人情世故的怪人,这不符合事实.爸爸是个懂感情、懂生活的人.家里的阳台被他搞成了植物园.他栽种的西红柿,冬天都是果实累累的.爸爸对我最关心啦,辅导我做功课,跟我一起玩.我也经常陪他到医院去蹬健身自行车.他很喜欢这项运动,以后有条件了,我们家准备买一台放在家中,给他健身用."

陈景润对一切都是那样满足,吃的要求不高,穿的随随便便,在这个温馨的家中,每晚只要有一杯福建花茶相伴,他就会忘记病痛,遨游在浩瀚的数学海洋之中.

14 科学的辉煌与悲壮[①]

——郑宪

郑宪,《解放日报》记者.

陈景润一定是抱憾终身的.

在生命的最后12年里,这位数学泰斗呕心沥血的冲刺却几无长进.

从(1+2)到(1+1),哥德巴赫猜想引无数英雄竞折腰.

陈景润在1966年向世界宣布的(1+2)数值结果,被公认为是对哥德巴赫猜想研究的重大贡献,是筛法理论的光辉顶点.

顶点,是一条通道的终结,是一种方法的寿终正寝.

(1+1),这颗哥德巴赫猜想皇冠上的明珠,陈景润离他只有一步之遥,但他知道,这个世纪中的他和他所在的世纪也许已经不能企及了.

---

① 原载《解放日报》,1996年4月4日.

陈景润死不瞑目.

半年前,也在哥德巴赫猜想研究中取得卓然成就的中国科学院院士王元,到医院看望正和病魔作最后抗争的陈景润.此时的陈景润痛苦得眼睛都无法睁开,手中还握一本数学书籍.王元慨然道:你就放弃它(哥德巴赫猜想)吧!你已取得的成就,至少本世纪无人能望其项背!

陈景润摇头,缓缓而坚决地摇头:不!

带着不屈不灭的永恒追求,陈景润永远地走了.

66岁的王元不胜感慨:

> 有人说,陈景润不是天才,我不同意.我知道当时是1954年,当时陈景润只有21岁,他写了一篇文章,寄给华罗庚,对华的名著《堆垒素数论》的一个结论提出质疑,并做了改进.我们看了这篇文章,认为陈景润是对的.这么小的年纪,有如此胆识,不是天才是什么?!
>
> 自然科学的皇后是数学,数学的皇冠是数论,哥德巴赫猜想,则是皇冠上的明珠.哥德巴赫猜想是1742年提出来的,至今已有250多年.近80年来,吸引了世界上许多伟大的数学家来攻克这道难题.而陈景润的(1+2)从1966年到现在,至今保持着世界纪录和领先地位.日本出了本书:《100个具有挑战性的数学问题》,有两个中国人榜上有名,一个是1 500年前的祖冲之,一个就是20世纪的陈景润.
>
> 陈景润(1+2)的伟大,还在于成果是产生于极其恶劣的物质环境之中,在6平方米的锅炉房里,演绎出几麻袋的数学手稿,在科学的世界前沿为中华民族争得了一席之地.
>
> 这里,我说一件外界可能不知道的事:陈景润的恩师华罗庚,在他最后的10年,曾潜心攻研(1+1),也没有成功.

1996年1月,陈景润的病情急转直下,牵动了无数人的心.

“景润不善交际,要说他有朋友,我就是屈指可数的一个.”著名数学家、中科院院士林群如是说:

> 20世纪80年代初,我和陈景润一起住中科院数学所集体宿舍.那时陈景润就是个多病的病号.他和另外几个人住的是病号房.院里规定,病号房必须晚上10点熄灯.但当时20多岁的陈景

润总在10点过后独自悄悄走出病号房，一手拿纸和笔，一手提瓶热水，到楼内厕所隔壁的洗脸间，旁若无人地席地而坐，埋头计算题目，通宵达旦是经常的事．有一次，他突然消失了7天7夜！在我印象中，他一天只睡三四个小时，长年累月怎么吃得消．那一回，我问他："景润，你睡那点觉，还那么精神，可我常失眠，就怕缺觉，睡得比你多，精神没你足，这是怎么回事？"陈景润想了想，很认真地回答我："失眠说明不缺觉，应该起来工作．"

20世纪80年代的陈景润，已是大红大紫，环境变了，可他还是"执迷不悟"．那年一起去厦门出差，住的是宾馆，晚上11点，陈景润就要睡觉了．我很奇怪，景润也开始保养身体了？没想到，后半夜两点，他摇醒我，问："我现在工作影响你吗？"不问也罢，这一摇，我又失眠了．

陈景润骨子里是个一览众山、心气极高的人．1957年，我问他："你人生的目标是什么？"他回答："打倒维诺格拉多夫（前苏联的世界级数学权威）．"

一般人见到一条途径就往上爬，爬到一定的高度就途穷路尽了．但陈景润在攻关时，同时选择10条路，这就需要至少10倍于别人的投入．有道是：一份汗水一份收获，科学没有捷径．(1+1)更没有捷径．照他自己的话说，要做出(1+1)，就需在(1+2)的基础上改进100步．关山无数重，站也站不稳的陈景润，他又能走几步？

1996年1月27日清晨近6点，陈景润病情突然恶化．

妻子由昆在家里接到医院电话，旋风般冲进病房，但，陈景润已因大量痰阻，心跳骤停！

医生立即施以人工呼吸抢救．紧张抢救8分钟后，陈景润的心跳终告"复苏"．

极短的时间里，中组部有关领导来了，卫生部有关领导来了，著名数学家杨乐也来了．此时，陈景润嘴不能说，眼不能睁，两位数学巨人，相对不能言．

杨乐在电话中这样问记者："你是不是也认为生活中的陈景润不正常？科学家都是正常的．当他们在攻关的最后阶段，都十分地沉浸在研究的对象上．气痴者技精，这就是正常．"

1984年3月，陈景润从书店买书出来，被一辆自行车撞倒，不省人事，待他醒来，反倒急切地问骑车人是否伤着？数月后，那天是中科院建院35周年纪念日，陈景润应邀出席．当时，党和国家领导人姚依林、方毅举杯向科学家们祝酒致敬．当细心的方毅走到陈景润跟前，发现陈景润呆板的"面具脸"时，惊问："你

身体怎样?"再举目四寻:"数学所负责人谁来了?"遂指示赶紧去医院做检查.检查结果是:帕金森综合征.

1991年夏,数学所领导经慎重考虑,同意他到长白山和镜泊湖"旅游"休养.此前几年,经过中医、西医及针灸治疗,陈景润的病情得以较大缓解,能自己穿袜、穿鞋、穿大衣了.1988年,他可以每天走1里多地,之后,又可以自己步行上数学所办公室里坐一坐.旁人欣喜,对他说:"陈教授,你真不错呀,康复有望!"陈景润听了舒心一笑.这次受邀去长白山和镜泊湖,陈景润竟没一丝犹豫,反而十分高兴.

美好的大自然,美好的生活,陈景润真心向往啊!

1996年3月8日一大早,68岁的农民季好学走进陈景润的病房.

"景润,老季回来了!"

病情又告恶化的陈景润躺在床上猛地睁开眼:是老季! 伸出因病而呈鸡爪状的手,拉住老季,持久不放.

由昆问:"老季回来,你高兴吗?"

陈景润充满感情地说:"高兴,高兴."

老季是安徽无为县人.1993年底,有人为他在北京介绍了一份工作:照顾病重的陈景润.莫看老季没文化,但早在20年前就知道陈景润.那时乡下也在谈陈景润,说那个陈景润的哥德巴赫猜想了不得,把全世界的外国人都比下去了.他当时心里就万分地敬佩这个比下所有外国人的科学家.要他照顾陈景润,他不讲条件不计报酬,同意.他说这是缘份.

此前老季从没服侍过病人,又是乡下人,但从一开始就把事情干得十分干净妥帖.每天,他为陈景润精心安排好作息和餐饮,喂3顿饭,喂4次水,吃1次水果,搀扶病人在病房内散一次步.就说喂饭,吃的全是捣碎打烂的食物,要慢慢喂.一顿饭少则1小时,多则2小时.喂饭最怕陈景润气管噎住呛住,确实很危险.可两年来,老季喂饭喂出了"奇迹":一次也不噎不呛.洗澡,冬天一星期洗两次,夏天日日洗.病房的卫生间里找不出一点脏.医院的医生护士都禁不住赞道:"这病房怎么的? 就是没一点点医院的气味,像干干净净的家似的."陈景润听了,就咧开嘴笑,说:"老季好."

一个大名鼎鼎的数学家,一个普普通通的农民,他们的心灵竟然相通.今年2月初,因护理陈景润而几年未归乡里的老季去安徽探亲,家中有他87岁的老母亲.归家近1个月,老季却日日惦着陈景润.3月2日他来回走30多里路,去镇上打长途电话到北京,问:"要不要我回来?"北京这边迫不及待:"老季,陈教授想你,好几次说,老季快回来,快回来,快回来."3个"快回来",说得老季要淌泪,马上买了长途车票赶来北京……

老季说:"陈教授很重感情."

陈景润岂止是对老季重感情.

华罗庚是陈景润的恩师.陈景润 21 岁时,就精深地钻研了华罗庚的《堆垒素数论》,并写了一篇文章寄到北京.华罗庚慧眼识英才,将陈景润从南方海滨城市厦门调来首都,终于使陈景润一步步走向成功与辉煌.1985 年,华罗庚不幸去世,而此时,陈景润也正病得难以站立.开追悼会那天,有人劝他,心到,人就不要到了.陈景润坚决要去.一日为师,终身为父,能不去吗?!

他去了,是别人帮他穿衣、穿袜、穿鞋,由别人背他下楼去的.车到追悼会场,又有人劝,你就坐在车上,你不能站呀.他说不行.由别人搀着,走进追悼会场.追悼会整整 40 分钟,他就硬撑着站了 40 分钟.40 分钟里,他一直在哭……

3 月 10 日后,陈景润病情"失控",说话更困难了.之后,摇头也困难了,但他的思维在生命的最后时刻,依然清晰.清晰的明证是对亲人的话依然能听懂,能辨别.由昆对他说:"我问你事,你同意,就伸一个手指头;不同意,伸两个手指."他听懂了,照做.

生命的最后时刻,他忍受最大的痛苦.痰液在喉,问他要不要用吸痰器吸,往日说要.而今天,他再不让吸.他的表示:伸出了两个手指.

他是否知道,这便是对自己生命的拒绝.

3 月 19 日下午 1 点 10 分,陈景润与世长辞.

15　陈景润情系高中母校①

——福建师范大学附属中学

陈景润同志对高中母校情笃意深,有其特殊缘由.正是在这里,他在沈元老师的数学课上,第一次听到哥德巴赫的著名"猜想";正是从这里,他开始起步,迈向后来为之奋斗一生的数学王国的求索之路.

陈景润 1948 年 2 月考进福州英华中学高一上(春季班),一直读到高三上,打下了坚实的数理基础.1950 年夏季,他提前毕业,考进了厦门大学数理系.

福州英华中学(今福建师大附中)是享有盛誉的一所名牌学校,它有良好的教学设施、很强的教师阵容、浓厚的科学与民主的风气,校友中出了大批著名的专家学者和许多革命志士.莘莘学子在这样一个学习环境中,有机会得到良好的教育与发展.学校十分重视聘请知名学者和优秀大学生、留学生来校任教.沈

① 原载《福建师大附中通讯·115 周年校庆专刊》.

元教授是留英博士、清华大学航空工程系主任，1948 年为奔父丧回榕，服丧后由于解放战争三大战役战事正酣，南北交通受阻而暂时停留福州. 协和大学邀请他，他没去；英华中学是他的中学母校，他乐意接受礼聘，为中学生上课. 沈老师正好教到陈景润所在的班级，成了陈后来问鼎“哥德巴赫猜想”的启蒙恩师，这是影响陈景润一生的巧遇，也是和沈老师的难得缘份. 他十分敬重这位恩师，不论在北京、在福州、在美国，师生俩在一起总是那样亲密和愉快，给我们留下许多让人十分赞赏的珍贵照片. 在高中教过他数学的先后还有何老师和陈老师，也都是出名的严师、良师. 他同陈金华老师更熟悉，常主动请教问题，有时还在傍晚放学时，跟着陈老师从高中部一路走到相距二三百米的初中部，话题总离不开数学. 陈老师看他对数学很有兴趣，便指导他多看参考书，开拓他的数学视野. 这样，陈景润除了从学校图书馆借阅许多国内外大学用书外，还从陈老师那里借阅了《集合论初论》、[日]《微分学问题详解》等，主动进行超前学习. 1960 年夏季，他回福州养病，两次来校拜访陈老师，请陈老师帮助借阅外文杂志，以不中断他的数学研究. 1981 年初，陈老师第一次到中关村看望他时，他热情地请陈老师一道吃饭，这对陈景润来说是很罕有的事情. 他不能忘怀母校诲人不倦的好老师，不能忘怀母校藏书丰富的图书馆，他更为母校解放后的新发展高兴. 1977 年遇见在京工作的附中校友时，他不无自豪地说：“我也是附中校友，那时还叫英华.”

1978 年 1 月徐迟长篇报告文学《哥德巴赫猜想》的发表，震撼了国人的心灵，陈景润成为青年学子向科学进军、为四化献身的一面旗帜. 应报刊约稿，我们撰写了《陈景润同志在高中时期》一文，送他本人审阅同意后，刊登在《人民教育》1978 年第 4,5 期合刊上；《福建教育》,《中国新闻》,香港《大公报》、《文汇报》等先后转载原文或改写稿. 我校校园里掀起了宣传、学习陈景润的热潮. 1981 年国庆节期间，我校举行建校 100 周年庆典. 在师生校友的翘首期待中，中国科学院数理学部的两位学部委员——传奇式的英雄人物陈景润和沈元老师（北京航空学院院长、中国航空学会理事长），联袂回榕参加母校校庆活动. 10 月 2 日陈景润等知名校友兴致勃勃地参观了校园、教学设施和校庆展览室. 同行的许多著名专家学者，大家不一定熟悉，而陈景润的名字则无人不晓，并且在一行人中，不用介绍，都会从仪表上一眼认出他.“陈景润、陈景润！”热烈的掌声随处而起，而他总是谦和地微笑着，向大家打招呼致意. 他送给母校的珍贵礼物是封面上端庄地写上贺词和落款的《中国科学》1973 年第 2 期，第一篇赫然在目的是他名震世界数坛的那一篇著名论文(1 + 2). 他在参观展览室时最惊喜的一件事，是看到 30 多年前读高中时借阅《微积分学》、哈佛大学讲义《高等代数引论》、《郝克士大代数学》、《密尔根盖尔物理学》等书的图书馆借书卡. 在一阵啧啧赞

许声中，又发现其中一张借书卡上也有“沈元”借阅的记载笔迹，师生俩同温当年情景，不禁开怀欢笑起来．

10月3日上午举行庆祝大会．省委常务书记项南同志前来参加，同沈元、陈景润等亲切交谈，并在大会讲话中大大赞扬了陈景润的治学精神和杰出贡献．陈景润的大会发言，特别引起轰动．他满怀激情地说：“回忆过去自己在这里念书的一段生活，是我一生中最快乐的一段时间．虽然我们离开母校很久了，虽然我们和家乡距离很远，可是心里总是想着我们的母校，想着母校的老师．”“这次回来一看，非常高兴，我们亲眼看到母校的大变化、大发展，想象不到变得这么好……没有共产党，就没有新中国，也没有母校的今天，我们非常感谢国家对我们学校的重视．”他深情地望着在主席台上就座的90岁高龄的王穆和等老教师，兴奋地说：“我又见到当时教过我的老师，还有我的老师的老师的老师，现在还在，现在还在，真是高兴．”他接着说：“母校历史悠久，人才辈出，校友中就出了六个学部委员，还有很多著名的专家学者．被誉为‘钢铁战线铁人’的全国著名断裂力学专家陈篪人也是我们的校友，我几次同他见面交谈．他自己知道得的是恶性癌症，全身都是放射性治疗的紫一块、青一块，可是直到快死以前还是在那儿开夜车拼命干．他的精神和事迹非常感人，我们大家都要向他学习．”“母校又是具有革命传统的学校，出了很多优秀的革命者，这是非常光荣的．”最后他说：“我祝愿母校发扬优良传统，在党的领导下，不断提高教育质量，培养出来的学生在政治上、业务上、身体上和各方面都要非常好，把母校办得更好，真正成为全国第一流的先进学校．”他根本没有用讲稿，全凭自己的一片真情，倾吐出这一席感人话语的；不足20分钟的精彩发言，被主、分会场五六千名校友、师生的阵阵掌声打断了不下10次．

翌日(4日)上午，他又同三位知名校友在大礼堂为师生做了专场报告．他强调，四化建设非常需要人才，现在附中学习条件这么好，同学们要加倍努力，立志成才．还说，有的青年人问我有什么成功秘诀，其实也没有什么奥妙，最重要的是要热爱科学，打好基础，要勤奋、刻苦、严谨……他的讲话通俗生动、备受欢迎．他还应省、市科协和数学会的邀请，分别向科技界、数学界做了学术报告；应市教委、团委的邀请，同三好学生、数学爱好者代表会面；还同哥哥、妹妹等亲属团聚，圆满完成了一星期的在榕活动，由陈金华老师陪伴回了北京，这是陈老师第三次到他中关村的家了．

转瞬10年．1991年3月间，杨玛罗校长赴京出席全国物理学会，借此机会参加了在京老校友的聚会，商讨110周年校庆筹备事宜．这时，陈景润已患帕金森综合征多年，竟也冒着严寒来到西直门的福州会馆与会，并表示这年10月愿意再回福州参加校庆，使人深为感动．

本来在 1981 年百年校庆时，数学所的领导为了保护他的健康，就曾劝说他写个贺信就好，避免旅途和活动的劳累.这回，陈景润病情已相当严重，情深意切要作此行，真有些为难.经协调，商定请他的夫人由昆大夫和长期关心他的党支部李书记陪同，在国庆前夕顺利抵达福州.

10 月 1 日，陈景润回到久别的郊区老家胪雷村，受到乡亲们非常盛情的款待，傍晚返回师大专家楼已是十分疲劳.由昆大夫细心为他按摩理疗，让他得到很好的休息和恢复.

10 月 2 日，学校隆重举行 110 周年校庆暨侯德榜塑像揭幕典礼.这天上午，陈景润按时来到附中，不让别人搀扶，只要他的夫人随旁适当照顾，笑容满面地挥着右手，从容地步入学校大门.在杨校长的引导下，穿过了二三十米长的夹道欢迎队伍.九时半，他在主席台前排就座.他说话有困难，用模糊不清的声音对着话筒说："我很高兴、很高兴，今天又回来了！"掌声响起，他连声说："谢谢、谢谢，大家好、大家好！"掌声再起.接着由他的夫人宣读了他的书面发言.他说："我会永远铭记老师的培养教育，希望老师们多多保重，为教育事业做出更大贡献."又说："我衷心希望同学们牢记'以天下为己任'的校训，为报效祖国而努力攀登科学高峰.只有祖国强盛起来，我们中国人才能真正顶天立地.还希望同学们能尊师爱校，我无论走到哪里，都会为我的母校而自豪、也希望同学们能够德智体全面发展，不要像我这样未老先衰…….我坚信同学们一定会'青出于蓝而胜于蓝'.看到母校学生接连在国际奥林匹克物理竞赛、信息学竞赛中捧回金牌银牌，为国家争光，为母校争光，真了不起，我实在高兴."这是他生前在母校集会上的最一次讲话.而他留给母校的最后一份手迹，则是他在京提前写给此次校庆的题词："赠福州师范大学附属中学 110 周年校庆/挥洒辛勤汗，育人满天下/陈景润 1991.9.1 于北京."

上午 11 时，在科学楼草坪举行侯德榜塑像揭幕典礼.大家想先送陈景润回住处休息，但他不顾疲劳，坚持要参加.他说，侯德榜是我们的老前辈，我们要尊敬.他来到现场，坐在靠椅上参加了揭幕典礼的全过程，还在别人的帮助下高兴地站起来，在塑像前同大家合影，表现了他的顽强毅力和高尚品格.

这天傍晚，陈景润和学部委员王仁、高由禧等知名校友代表，应福建省委书记陈光毅同志的邀请来到西湖宾馆.当陈光毅、陈明义等省领导步入宾馆会客厅时，陈景润站起来握住陈光毅伸过来的手，陈光毅高兴地说："你还认得我吗？"陈景润也高兴地说："你比过去更年轻了."陈光毅亲切地扶陈景润坐下，并关切地询问了他的健康情况.在场的国际问题研究所研究员薛谋洪校友说："福建中医学院表示，如果陈景润同志愿意留在福建治病，将尽最大努力."（中医学院党委书记朱旭同志是师大附中校友会会长）由昆同志说："就怕给你们添麻烦了."陈光毅爽快地回答："陈景润同志是国宝，关心他的身体也是我们应尽的责

任呀!"接着,他环视四座,笑容可掬地说:"福建师大附中校庆,诸位专程赶来,不但为学校增添光彩,而且为福建增添光彩.目前附中校友当选学部委员的已有七位,今天在座的就有三位,真是英才满天下呀.福建要振兴,一定要尊重人才,充分发挥人才的作用,欢迎大家多来走走,为振兴福建出力."事后,在省委、省政府的全力支持下,陈景润两度在中医学院国医堂特设病房住院治疗,病情得到缓解,两次离榕回京时的康复状况都较好,我们为他感到宽慰.

如今,疾病终于在3月19日夺去了他的生命,噩耗传来,广大师生校友十分悲痛.杨校长在全校升国旗仪式上作了《沉痛悼念陈景润校友》的讲话;学校及时编印了《怀念、学习陈景润校友》的专刊,发到全体师生手上.28日,杨校长同校友会秘书长一起专程赶赴北京,到陈景润家中吊唁,向他的夫人表达诚挚的慰问.29日上午前往八宝山公墓为他最后送别.陈景润同志和我们永别了,但他的光辉事迹和崇高精神永驻人间;连同他对母校的深情和期望,永远铭记在我校史册上.

薛来弼执笔,1996,6

16 陈景润在高中时期[①]

——福建师范大学附属中学

陈景润1948年春季升入我校前身福建英华中学念高中,1950年夏季,以高三同等学力报考大学,进了厦门大学数理系.

作家徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》发表后,许多同志关心地询问起陈景润在英华中学时的情况——他在高中时期的学习生活有些什么特点呢?

16.1 沉默寡言、生活简朴

提起陈景润,过去的老师、同学都有这样的印象,他沉默寡言,跟同学接触很少.那时学校里有各种活动,除政治活动外,他很少参加.他有他自己的生活习惯,上完课不是上图书馆,就是背起书包回家.他不多讲话,讲起话来笑嘻嘻的,是一个和善的老实人.

他生活简朴,经常穿一身粗布旧衣衫.书包文具十分粗陋,连一支钢笔都没有,他只有铅笔——铅笔头都要用到很短很短.他那副近视眼镜断了一条腿,长期拿一根线绑着.这同许多同学相比,未免显得"寒酸".但他对此并不在意.看

① 原载《人民教育》,1978年第4-5期.

来他是从小就不注意生活的人，以至于像《哥德巴赫猜想》一文中所说的那样，有时几乎是一副"窝囊"的样子.

老师、同学一般不怎么了解他，但也没有歧视他，因为他自有引人注目之处.他有一个清晰的头脑，可在处理生活琐事上却不太清楚，怎样理解这种现象呢？原来是他全副精力集中在学习上.

16.2 专心致志、刻苦钻研

陈景润在中学时期就是一个一心扑在学习上的人.他那种专心致志、刻苦钻研的学习精神，才是这位未来数学家身上的真正特点.那时师生中把用功读书的学生叫做"booker"，陈景润就是班上一个有名的"booker"，一天到晚连下课时间都在读书.他既然成了一个"读书迷"，那就难以过多地责怪他在生活上不修边幅了.

他学习很肯钻研，尤其在数理方面.上数学课，他总是全神贯注，听得入神的时候，连嘴巴也张得大大的.高中阶段教过他数学的，除《哥德巴赫猜想》一文中讲到的那位沈老师外，还有何老师和陈老师.他们对学生的要求很高.何老师是一个公认的"严师"，每节课都布置了大量的作业，有时一次多至几十道习题，让学生选做，而陈景润总是全部完成.他在学习上是从来不吝惜时间和精力的.

同学们还十分佩服他背书的本领.他读书不满足于读懂，而且要把读懂的东西背得滚瓜烂熟，把数理化的许多概念、公式、定理、定律一一装在自己的脑袋里，随时可以应用.有一回，化学教师要学生把一本书背出来，同学们感到很困难，但他却说："这一点很容易，多花些功夫就可以记下来，怕什么？"果然没多久，他就把全书背诵记牢了.

他不善于交往，但这不妨碍他的勤学好问.为了探求知识宝藏，他常主动接近老师请教问题，借参考书看.有时下课后老师外出或者到初中部去，他就特意跟上老师一块走，一路上问功课，谈学习.这时候，他不再沉默寡言了.

16.3 主动学习、志在登攀

陈景润在班上是一个"booker"，这点大家都知道.但从表面上看，他的成绩并不突出，比他冒尖的同学还大有人在.所以后来当他成为著名的数学家时，大家又高兴，又惊讶，真有"士别三日，当刮目相看"之感.

其实，陈景润的成就，并非一日之功.早在中学时期，他就为后来攀登科学高峰一步一个脚印地打下了坚实基础.他不是单纯跟在老师后面跑，看来他对分数也不大在意.他不仅认真学习规定的功课，而且大量自学课外参考书，向高一级知识领域顽强进军.有时一本很厚的参考书，没有多久就看完了，而且看得很认真仔细.他在学习上，精神高度集中，表现了可贵的主动精神，真正成了自

己学习的主人.

这儿的图书馆留下了历史的见证.这所老学校存书比较丰富,有几万册图书,陈景润把它当做一个知识的宝库,经常到这里来.二三十年过去了,学校的图书散失了不少,但在图书馆里今天仍然保存着许多有陈景润借阅过的书籍,其中有:大学丛书《微积分学》、大学丛书[美]《达夫物理学》、[美]哈佛大学讲义《高等代数引论》,以及《郝克士大代数学》、《密尔根盖尔物理学》和《实用力学》等.借书卡片表明,像《微积分学》一书,他还先后借过两次,可见他是下了功夫钻研的.

在英华最后教他数学的是陈老师.陈景润不仅向他学习初等数学,而且经常向他请教高等数学方面的问题,并向他借阅有关书籍,如[日]《微分学问题详解》、《集合论初论》等.直到后来1960年陈景润从科学院数学研究所回榕休养治病时,还来拜访这位老师,要陈老师帮他在福州借阅外文数学杂志.他这种病休不休、刻苦治学的精神,给中学时期的老师留下了深刻的印象.

16.4 两点启示

陈景润读高中时的老师和同学,目前在此地找到的不多,而且岁月已久,大家对许多事情也淡忘了,所以本文所反映的情况很不充分.但有两点启示是足以教育今日青少年学生们的.

第一,天才在于勤奋.陈景润在数论研究上的杰出成就,表明了他才智的卓越非凡.但他绝非天生的聪慧.他在中学时期并不显得特别有才华.他之所以能够为社会主义祖国的科学事业做出巨大贡献,显然是由于他长期以来呕心沥血、顽强努力的结果.他在中学时期就是一个"读书迷".科学有险阻,功夫谈何易.陈景润的事迹告诉我们,需要有这样一种对科学爱之入迷的精神,需要有这样一种锲而不舍的惊人毅力,否则在科学事业上是难有巨大成就的.

第二,中小学是基础.有志为革命事业攀登科学高峰的青少年,一定要像陈景润那样在中小学阶段就下苦功打下坚实的知识基础.陈景润在中学时期,认真学好中学课程,牢牢掌握基础知识,而且发挥主动精神,力所能及地提前学习高等数学物理,这就为他往后的深造创造了有利的条件,就如他的"背书"本领,他在消化理解的基础上,把大量知识都牢固地装进自己的头脑,这样在后来深造的过程中,使他能够左右逢源,得到极大的好处.中学对一个人的成长有重要影响.陈景润同志早已成为世界闻名的一个数学家,但他仍念念不忘自己的中学母校.他每次回榕总要来探望自己过去的老师.前不久,他在北京见到在那里工作的一位附中校友时高兴地说:"我也是附中的校友,那时还叫英华①."

① 福州英华中学1927年以前是八年制英华书院,《哥德巴赫猜想》一文系沿用老名字.

17 怀念景润

——由昆

1996 年 3 月 19 日这一天对我们一家来说是极其悲痛的日子.与我相伴 16 年的丈夫——陈景润,带着对事业、对生活、特别是对妻儿的无限眷恋,毫不情愿地离我们远去了.从那时起到现在,景润走了快一年了,可我和我们的爱子陈由伟一直无法相信和接受这个事实.景润的音容笑貌时时活现在我们的心中……

16 年的恩恩爱爱,16 年的风风雨雨,使我深深地感到景润作为学者、丈夫、父亲都是最称职、最优秀的.他为了科学事业呕心沥血地在艰辛的科学道路上苦苦跋涉,从不计较个人得失.1984 年景润不幸患了帕金森综合征,他首先想的不是自己的生命安危,而是怕不能继续工作,整日焦躁不安.他为了能在有限的生命中做出更多的工作,更加拼命了.他不顾病痛的折磨,每天坚持十几小时的工作,在住院治疗期间也不例外.生病十几年来他从未间断工作,直至临终前两个月在身体极度衰弱的情况下仍在审批学生的论文.景润是累死的,他是用自己的生命换取了名垂青史的成就和祖国的荣誉,为我们留下了宝贵的精神财富.

景润是一个很重感情、热爱生活的人.从他的言行中,我读到了他对妻儿的爱.我上班距离家较远,每天坐班车上下班,阴雨天常常忘记带伞.只要丈夫在家,我就不用担心淋雨,因为景润一定会提醒家人到车站接我.有一次景润不在家,只有不满 6 岁的儿子一人在家,天下起了大雨,当我走下班车的时候,看见儿子腋下夹着我的毛衣,手里打着伞,嗦嗦发抖地站在雨中.我心疼极了,忙问儿子谁让你来的?他说爸爸不在家,每次下雨爸爸都是叫人接您的.我语塞了,双眼充满了泪,多好的丈夫,多好的儿子呀!

1996 年 12 月 18 日是我们的爱子陈由伟的 15 岁生日,往年这一天都是爸爸、妈妈一起为儿子欢庆生日,景润在外地也不会忘记,他会打来电话祝儿子生日快乐,可是今天儿子 15 岁生日,景润却不在了,我怕儿子过于难过,还像往年一样买来生日蛋糕.儿子的脸上没有了往日那种欢天喜地的笑容,而是默默地把蛋糕切下一块,双手捧上恭恭敬敬地送到父亲的灵前,三鞠躬后郑重地对父亲说:“爸爸,您放心吧,儿子今天满 15 岁了,已经长大,我不会辜负您的期望,一定努力学习,以最好的成绩告慰您……”是的,我们的儿子已经长大,景润那种正直、善良的品格正在儿子身上得以延续……

景润,安息吧!您的妻子、儿子会永远怀念您.

1997 年元旦

18 陈景润与他的军人妻子①

——刘萍 兰草 孟祥法

初夏一个有风的下午.

北京西郊解放军309医院宣传办公室.

当我面对她那双充满忧伤的眼睛时,事先想好的话都堵在了喉头,我竟一时不知该说什么好了.

一袭洁白的医用白大褂,一条已过时的卡军裤,她就这样忧郁沉静地坐在我们面前,周围散发着一种端庄大方的美感.

当我握着她的手,我的心在轻轻颤动.这双女人的手,在过去的16年岁月里,曾支撑起了一个幸福的家庭,为她所钟爱的数学家丈夫营造了一个温馨的爱巢,经受了秋天的泥泞,冬天的雨雪……

由昆的名字是和陈景润连在一起的.

18.1 引 子

1996年3月19日,陈景润在与疾病奋争了10多年后,终于离开了他所热爱的事业和亲人,中国数学界的一颗巨星陨落了.

20世纪70年代末,著名报告文学作家徐迟的一篇《哥德巴赫猜想》把陈景润推到了世人的面前.大多数人并不了解哥德巴赫猜想究竟是怎样的一个谜,陈景润的研究成果对社会生活能起多大的作用,但这不妨碍公众接受陈景润,因为他在研究过程中所表现出的执著与顽强的精神震撼了无数中国人的心灵.陈景润的名字成了科学与献身的代名词,激励了整整一代人.

当陈景润故去之后的今天,人们的脑海中又浮现出他的形象.然而20世纪90年代的年轻人,并不了解陈景润的名字在当时有多大的意义,在他们心目中,科学家的形象已经苍白了,科学家的精神也已淡漠了,他们所知道的陈景润只是从为数不多的描写中获得的一鳞半爪的印象.

现实生活中陈景润到底是一个怎样的人呢?作为一个丈夫、父亲、学者,他也有常人的情感、常人的烦恼吗?他的家庭生活是否也像常人一样?

带着疑问,我们找到了在309医院工作的陈景润的妻子由昆.

我们本想请由昆先谈她自己的情况,以便了解一个更完整的陈景润先生,但由昆开门见山的一个番话使我们颇感意外:“如果你们是想写先生,我可以

① 原载《解放军生活》,1996年第8期.

谈.如果你们想写我由昆怎样,那就免了吧.作一个军人也好,妻子也好,我所做的一切都是应该的."

在与由昆近两个小时的交谈中,她谈的全部是她的先生.在她深情的话语中,在她婆娑的泪眼中,我们真切地感受到了一个活生生的有血有肉、充满情趣的科学家的形象,感受到了一个高尚而可敬的灵魂.

18.2 懂感情热爱生活

"陈先生是一个很重感情热爱生活的人."在妻子的眼中,陈景润并不是像外人想象的那种书呆子.由昆说:"有些人总觉得我们这个家庭怪怪的,但当一些朋友来过我家后,就会惊讶地说:没想到你们家很有意思,很活跃呀!"

陈景润之所以不能放松自己,是因为他没有时间.当一个人太专注于其所研究的领域时,便会忘记了周围的一切,这是可能的,但这种情况不会一直存在.

在工作之余,他很有生活情趣.

陈先生喜欢大自然,他喜欢真实美好的事物.

在他和由昆刚结婚时,没有孩子的拖累,两人便经常到植物园踏青、去香山赏秋,大自然的陶冶也升华了两人的感情.那时,两人还像很多夫妻一样过着两地分居的生活.每次由昆来北京,陈景润再忙也要抽出一天时间陪她逛街,他很认真地说:"别人的丈夫都会陪爱人逛商场,我也应该尽到这份心."

一年后,有了小孩,陈先生的研究工作很紧张,出去的机会少了.于是,他便将大自然引回到家中.他自己栽种了各种花草、青菜.阳台、窗台的空间都被占满了.

他做任何事情,都以对待数学研究的精神,认真而严谨,这是他为人处世的风格.所以他种什么都长得非常好.他种的一株西红柿,结了果,有拳头般大,鲜艳诱人.他高兴地摘下来,对由昆说:"这个给小欢欢吃."由昆笑道:"孩子还小,你自己吃吧!""我没关系,孩子需要营养."陈景润坚持一定要留给孩子,一片舐犊之情溢于言表.

还有一次,陈景润把吃剩的苹果核埋到一个花盆里,由昆觉得很好笑:"这绝对不会长出苹果树苗来的.""会的,会的."陈先生很认真地说.他经常将剩茶和豆渣倒入花盆里,隔了一段时间后,一颗幼苗破土而出,陈先生看到后,高兴得像个孩子一样叫了起来:"由啊,由啊,你快来看,长出来了! 长出来了!"以后,他一直很精心地侍弄这株幼苗,它竟然长到一尺多高.在这位科学家的眼中,这些绿色的植物,使他感受到了生机盎然的大自然和生命的活力.

对于陈景润来说,早年艰辛的生活,使他饱受了过多的苦难,因此他格外珍惜和热爱他的家庭.时时刻刻都体现出一个丈夫的深情和父亲的慈爱.

在由昆生孩子时，因剖腹产，需要家属签字，陈先生很紧张地看着签字单，一定要医生保证"由昆不能出事"，否则他不签字．当医生问他："万一有事，是保大人还是保孩子？"陈先生毫不犹豫地说道："当然是保大人！"他签字时并没有像一般家属只写"同意"二字，而是写了很长一句话："要保证我爱人由昆手术后能正常生活工作．"躺在病床上的由昆得知后，为丈夫的一片爱心感动得流下了幸福的泪水．

由昆生孩子正是天寒地冻的12月份．第二天上午做剖腹产手术，陈先生很为妻子担心，一宿没睡好觉，凌晨三四点就醒了，他起来叫家中请的湖北婆婆给他做点早饭，他要去医院看由昆．婆婆说："医院没有这么早开门，你去了也是白去．你再睡一会，天亮了再去．"但陈先生再也睡不着了，五点多钟，简单吃点东西，他就在黑漆漆的夜色中顶着寒风赶到了医院．医院的门没有开，他就在黎明时的寒风中等了几个钟头．

上午10点多钟，医生过来告诉他："孩子已出生了，是个儿子．"得知妻儿都平安，一颗悬着的心落地了，他笑得合不拢嘴．

在这个家庭里，妻子性格开朗活泼、心直口快，而丈夫沉静内向、温和耐心，正好两人性格互补，非常和谐．

很多人都说："陈景润这辈子没白活，事业有成，最终还找了一个好妻子．"

由昆1969年入伍．1977年从武汉军区156医院到北京309医院进修．非常巧的是，当时陈先生正患肺结核住在309医院．由此演绎出了陈由的婚恋．

当时，徐迟的报告文学刚刊出，很多姑娘纷纷给陈先生写信，表示了爱慕之情，并愿意服侍他一辈子．但陈先生是一个非常认真有主见的人．他不轻易接受这种感情，他相信自己的眼睛．他终于寻找到了意中人——穿军装的由昆．

由昆进修了一年，就回到了武汉．先生便靠鸿雁传书传递着自己热烈的感情，1980年，有情人终成眷属．结婚后，两人还依然过着两地分居的生活．后来在邓小平同志直接关心下，由昆从湖北调入北京，来到309医院工作．

10多年来，由昆给了先生无微不至的关怀和照顾，使多年来生活在恶劣环境中的陈先生享受到了天伦之乐．由昆为他营造了一个温馨的家的港湾，使他能够在这里放松和歇息．

从1991年开始，陈先生就一直住院．由昆无论刮风下雨，都要在下班以后去医院看望和照顾先生．她的心思都放在了先生身上，也就无暇照顾儿子，她常常对儿子说："欢欢，爸爸有病，妈妈现在要去照顾爸爸，妈妈管不了你了，欢欢自己要管好自己．"儿子总是很懂事地说："妈妈你放心去照顾爸爸．"

从家里去医院，必须经过一条又黑又长的巷子．冬天的夜晚寒风凛冽，卷起尘土扬得满脸都是灰．由昆胆子小，每次走到这里，她都甩开步子使劲地跑起来，"啪啪"的脚步声在夜幕里听得更刺耳．当她赶到医院时，已是上气不接下气

了.陈先生见到妻子来了,立刻像孩子般高兴地笑起来,他心疼地紧紧握住由昆的两只冰冷的手,有些过意不去地说:“由啊,真是辛苦你了.以后晚上你不要总来了,我不放心.”由昆马上很放松地说:“没关系,你老婆人高马大,没人敢欺负.”

18.3 父子情深

儿子欢欢和陈先生都属鸡,但差了整整 48 岁.老来得子,给陈先生的生活带来了巨大的欢乐.

和孩子在一起,常常使他童心大发.一次,他和儿子一起把窗台上的一个花盆搬下来,然后用儿子的小桶小铲把盆里的土都挖出来,和上水,玩泥巴.见由昆下班回来惊异的样子,一老一少笑得前仰后合.

陈先生脾气极好,对孩子对妻子从来不发火不生气.他常常对由昆说:“对待小孩子要耐心.”有一天,小欢欢说:“爸爸,我要撤尿.”陈先生说:“好好,爸爸带你上厕所.”但儿子却抱住爸爸的腿,嘴里叫道:“爸爸爸爸,爸爸好,好爸爸.”说着,竟然把尿尿在爸爸的腿上,顺着裤管流进鞋子里.由昆知道后,嗔怪说:“这孩子太不像话了,你还不揍他两巴掌?!”而陈先生竟然一点也不恼,抱着孩子笑起来.小事上,陈先生并不在意,但他对孩子早期智力的启蒙和人品的教育却非常重视.

小欢欢出生时白白胖胖,煞是可爱.陈先生抱着儿子,憧憬着说:“我要把小欢欢培养成一个对社会有用的人.”如同众多父母一样,他对儿子也寄予了很大希望.

孩子只有 10 个月的时候,陈先生把一支铅笔放到儿子的小手里,儿子果然攥着笔上下左右地挥舞,陈先生竟开玩笑地说:“我儿子会写字了,他在写字呢!”把由昆和小保姆逗得直乐.

欢欢很聪颖,只有一二岁的时候,陈先生就教他说英语,家里的很多东西,只要爸爸一问:“小欢欢,这个英语怎么说?”他就会用稚嫩的声音说出来.由昆买回来的水果,儿子要吃,陈先生便一边拿一边问:“这里一共有三个苹果,拿出一个给小欢欢吃,还有几个?”

小欢欢二三岁的时候,比较喜欢画画.一天,他没有去上幼儿园,而是用笔把家里他够得着的墙面都画得五颜六色.由昆下班回来后,气得大声训斥儿子,而陈先生却在一旁劝道:“你不要骂他,他不是在捣蛋,他是在动脑筋,在画画.”

先生很爱孩子这一点,十分尊重孩子的个性发展.他和由昆平时把儿子的画都收集起来,在家里办了一个小画展,朋友们看后,都很惊讶地说:“没想到陈先生对孩子这么关心!”

欢欢从小就很懂礼貌,也很懂事.爸爸总是告诉他:“要懂礼貌,要尊重老

师，尊重爷爷奶奶.”小欢欢只要看到邻居哪位老人拎着东西，他就会主动上前去帮忙，把爷爷奶奶送回家.周围邻里都很喜欢他，夸陈先生教子有方.

欢欢上小学二三年级时，爸爸问他：“1+2+3+…一直加到9等于多少?”欢欢做不出来，爸爸便仔细地给他讲.爸爸是那么地认真，手把手地教他，眼中充满了热切的渴望，这件事给欢欢留下深刻的印象，但他当时并没有理解父亲的良苦用心.

陈先生刚生病时，儿子才上幼儿园.由昆很遗憾地说：“如果先生身体好，孩子的教育会更好.”那段时期，陈先生一直在家办公.欢欢上小学时，到了男孩子贪玩的年龄.陈先生便和由昆商量：“把欢欢的小课桌搬到爸爸的书房里，看到爸爸在认真看书，小欢欢也会用功读书的.”当然，小欢欢进了爸爸的书房最终没有坚持多久，又被由昆搬出来了，因为他太调皮，还理解不了父亲的苦心.

陈先生虽然望子成龙，但他从不强迫孩子服从他的意愿，而是顺其自然.儿子在音乐方面有天赋，南洋培训学校选中欢欢吹小号，当时先生在福建，欢欢特地打电话征求爸爸意见，先生问：“吹小号是不是就是吹喇叭?”由昆告诉他：“这是两种不同的乐器.”先生说：“只要欢欢喜欢，我没意见.”

父子两人的感情很深，欢欢长得集中了爸爸妈妈的优点，他身材像妈妈，高大魁梧，现在才14岁，已有1米77；而五官清秀，又是一个地地道道的南方小男孩的模样.爸爸身体不好，他常常用他那粗壮有力的手给爸爸按摩，然后问爸爸：“舒服吗?”先生便闭着眼，拖着长音说：“舒服极了.”

现在爸爸去了，一到星期天，儿子想爸爸就流眼泪.爸爸在他心目中，是一个伟大的父亲，一个慈祥的父亲，一个善良的父亲.

18.4 以当军属为荣

当年很多女孩子写信给陈景润，表示自己的爱慕之情.而陈景润却选择了穿军装的由昆.我不禁问道：“陈先生是不是很喜欢军人?”由昆的眼中闪出自豪的光彩：“陈先生对部队有很深的感情，一般我们出去，无论是去看朋友，还是出席会议，他都让我穿军装，他为有一个当军人的妻子而感到骄傲.有时他还问我：你们部队有要我算的吗?”说到这里，由昆笑了.

一个潜心于数学王国的科学家，竟然对部队有着割舍不断的情感，这份真情颇令我们感动.由此，我们也明白了在陈先生的遗体告别仪式上，由昆为什么穿上了那身军装来为丈夫送行.

陈先生为什么对军人有着深厚的感情呢？由昆告诉我们：陈先生从厦门大学毕业时，正逢抗美援朝，他萌发了要去当兵的愿望.但当时他所在的数学系只有4名毕业生，是宝贵的人才，他被分配到北京，没有圆上他的当兵梦.但他当兵的愿望却被弟弟陈景光实现了，他感到一些安慰.

陈先生从弟弟那里学了很多部队的歌曲.他最喜欢唱的是《我是一个兵》.他非常喜欢听总政歌舞团演员董文华演唱的《十五的月亮》.董文华听说后,一天晚上便邀请陈景润夫妇到中国歌剧院听音乐会,本来演出中没有《十五的月亮》这首歌,董文华特意和导演商量,为陈景润先生加唱一首《十五的月亮》.听罢一曲,陈先生热情地鼓掌,非常高兴.

陈先生是一个对待工作充满热情,而又严谨认真的人.他做事情很有计划性,他每天该做什么事都事先计划好,如果白天没完成,晚上一定要补回来.因此,他对妻子的工作也是非常支持.

1984年,陈先生因身体不好住院,当时任总后勤部长的洪学智将军很关心这件事,他特意找由昆说:可以给你放长假,你好好照顾陈景润就行了.当由昆把洪部长的关怀转告先生时,先生的头竟摇得像拨浪鼓:"我不同意,你不能放弃工作.我已是病人,影响了自己的工作,不能让你再因我而放弃了工作."由昆被丈夫的一片真情所打动,她想:先生能放弃他的健康不顾,而让我坚持工作,我不能辜负了先生的一片心意.于是,十几年来,由昆一直坚持正常上班,她从来没有因为自己是陈景润的夫人而影响过工作.由昆平时总是利用晚上和周末的时间去看望照顾先生.如果由昆偶尔利用上班时间去看他,先生便会不高兴,叫她赶快回去.

陈先生对工作事业的执著,即使是在他得了帕金森综合征住进了北京医院,也依然不减.他请护士给他找一张办公桌,护士反问他:"您是来治病的,还是来工作的?您这样可不行."于是,为了不给医生护士添麻烦,他掌握了医院的工作规律,每当医生护士来查房时,他就躺下;当医生护士走后,他又起来继续工作.先生病了这些年,但他的工作一直没有停止.

18.5 一个善良真诚的科学家

陈先生在他瘦弱的外表下,跳动着一颗仁爱、善良的心."文革"期间,陈先生被扣上了"寄生虫"、"走白专道路"的帽子,他用心血研究出的东西被别人烧掉了.这是他的生命,他的一切,生命被毁了,还有什么存在的意义呢?他绝望了,想离开这个丑恶的世界,于是,他从楼上跳了下去.当时,他倒在地上,血从裤管中流出来,竟然还有人在踢他,说:"装死呢."当陈景润被送往医院后,那人还说:"真不愧是搞数学的,连跳楼都算好角度."而正是这个人,在十年后,为自己出国的事找到了陈先生,一口一个陈教师、陈教授,请他给自己写推荐信.陈先生并没多说什么,在推荐信上签了字.事后,由昆从别人口中才得知此人就是当年整过先生的人,她不由得惊诧不已:"怎么会有这样的事?"继而她嗔怪先生:"这个人以前那样对你,你还帮他?"陈先生很冷静地说:"你不要计较那么多,都是过去的事情了,忘掉它算了."由昆接着问道:"你还记得谁打过你吗?"

"我记不得了."先生说.由昆不再问了,她心里明白,先生记忆力非常好,他不是记不得了,而是不愿再提了.他能用自己博大的胸襟去容纳社会中某些丑恶现象,他所展示的人格力量和精神是巨大的.一个承受了这么多苦难和屈辱的人,依然能够保持这样一颗善良、宽容、执著的心,这不是一般人所能做到的啊!

一次,由昆遇到了数学所的一个老人,他把由昆当成了数学所所长的女儿,神神秘秘地对她说:"告诉你一个消息,陈景润被他老婆逼疯了,他老婆特别厉害,听说两人正闹离婚呢!"由昆听了压住心中的火气,冷冷地对他说:"我就是陈景润的爱人,我怎么没听说呢!"老人尴尬万分,说:"我也是听别人传的."由昆回去气得不想吃饭,陈先生却很豁达地说:"让他们去说好了,只要我们过得好就行."这时,由昆哽噎地说不下去,这些往事又一次地唤起她对丈夫的深切思念,她似乎在努力克制着自己的感情,然而泪水依然顺着她有些浮肿的面庞淌下,屋子里的空气似乎凝固住了.陈先生高尚的人格力量也深深地感动了我们这些年轻的心.

这使我想起在陈先生的遗体告别仪式上,有一幅书写在大纸上的挽联:

> 知交四十载,睿智忠勤,是非分辨,果然真诚人、真爱国,为中华扬眉吐气;
>
> 力克万千辛,坚韧朴实,纪律严遵,信手脱世态、脱凡俗,愿来人继志攀登.

这正是陈景润精神的真实写照.

陈景润的精神是永远的,它不仅仅属于一代人.

19 陈景润返母校厦门大学①

——赖任南

赖任南,福建日报记者.

1981年4月,陈景润要回母校参加60周年校庆的消息,很快传遍厦门,许多人都以好奇的心情想一睹这位摘取数学皇冠上明珠的科学家的风采.他还没有到,他住的招待所门口就等了一大批人.列车在厦门车站月台停下,迎接他的学校领导和一批新闻记者就在软卧车厢到处找,没有找到.陈景润却在硬卧车厢上出现了.问他为什么不按规定坐软卧?他说,国家还困难,软卧花钱多.和他同车的一位校友说,他还要坐硬席呢,坐硬卧还是劝了半天的成绩.多么可贵

① 原载《福建日报》,1981年4月10日.

的精神！陈景润仍留着小平头，穿一身旧的蓝中山装，袖口有些破了，就是这位普普通通的当年厦大毕业生，为国争了光，为中华民族争了气，他的事迹已成为激励千千万万人刻苦学习、勇攀高峰的巨大精神力量.

陈景润是白专典型，还是又红又专的榜样？至今人们的看法还不一致.20多年前陈景润的老师、厦大数学系主任方德植教授对记者说，说陈景润白专，是不了解情况.许多自称为掌握了马列主义的人，一有风吹草动，就左右摇摆，陈景润从未摇摆过，大事面前从来没有糊涂过.他热爱祖国，热爱社会主义，怎么能说白专？1977年冬方德植教授出差到北京，专程去看陈景润.见到自己的老师，陈景润十分高兴，但当天下午是每周半天的政治学习时间.陈景润向老师抱歉地说明了原因，陪着走了一段路就去参加政治学习了.方教授说："能说陈景润不重视政治学习吗？"陈景润是十分珍惜时间的，但他对自己有三个规定：政治学习一定参加，党课一定去听，重要的社论一定看.他在厦大数学系师生座谈会上说："我们搞数学，但要注意政治方向，如果你搞了半天还反党反社会主义，怎么行？"陈景润说的关心政治，他有自己的逻辑方式和具体内容，他反对空喊政治口号、形式主义，他认为搞科学的人关心政治，就应该具体体现在搞科学的行动中.他说："外国先进的东西我们当然要学习，但不是外国的月亮也比中国圆.我不相信中国人脑子就比外国人笨.美国有名的数学家中许多就是美籍华人，美国科学界的好几位院士都是美籍华人.只要肯努力，外国人能做到的，我们也能做到."多么有民族志气！多么有民族精神！正是这种志气，激励着他去攀登数学的珠穆朗玛峰.长期以来，陈景润给人的印象是沉默寡言，但在厦大数学系座谈会上，他一次发言就谈了一个半小时，他用许多生动的比喻，谈笑风生，引得满堂大笑.会上，他介绍了几次运动中他的情况.大鸣大放大辩论中，有人动员他批判他的两个老师，他认为两位先生治学认真，平时讲的都是真话，所以他一声不吭."文化大革命"中，科学院批判华罗庚教授，陈景润被押着上台揭发，走到半路他上厕所，溜了，广播里大叫陈景润跑了，派人到宿舍、医院找，他却躲在操场看书.后来又要他揭发批判当时在科学院工作的张劲夫同志所谓反党反毛主席的言论，他说："我没听到."1976年所谓批邓反击右倾翻案风，要他批邓，他只字不写，江青曾多次派人动员他写效忠信，还封官许愿，他说不会写，一个冒称记者的人说不会写我代你写，他托病躲了起来，他说，"如果是反革命，不用你说，我一定把他抓来批斗，拼命也可以，但不能把好人当坏人打."这一连串的事实能说是偶然碰巧吗？不正是他对待红专的具体表现？他不顾身体，不顾家庭，不为名不为利，为国争光，为民族争光，攀登科学最高峰，能说是只专不红吗？！

陈景润回到当年他的老师身边，立即变得活跃，显出童稚的天真，青年的活泼.许多人见了都说与原来脑子里的陈景润形象完全不同，他和老师亲密无间，

话说没完，与平时的沉默寡言判若两人．陈景润对老师十分尊敬，从做学生至今，他在老师面前，凡老师的话没有说完，他绝不插话．这次参加厦大 60 周年校庆，上主席台时，他坚持要等到比他年纪大的人全部上了主席台才肯上，拖、拉都没用．数学系开师生座谈会，他一定要等教过他的三个老师都发言了才肯发言，他谈话条理清晰，逻辑性强，滔滔不绝．陈景润这么健谈，使在座的人都吃惊．谁都知道，陈景润的时间是十分宝贵的．有的人找他，敲门敲一个小时他还不开．但 1977 年他听说当年的老师方德植教授到了北京，他利用晚上时间去看了方教授五次，每次都谈得很久．他说："尊敬老师，不是虚伪，是起码的礼貌．我见到在公共汽车上老教授站，青年学生坐，真不像话．中华民族有好传统，我希望大家都来讲究文明、学雷锋．"他尊敬老师，每发表一篇论文，总要寄一份给老师并写上"请老师指正"．去年 8 月他结婚．特地托人带了一包喜糖给他的老师．陈景润和他的老师真是尊师爱生的典范．陈景润很听老师的话，刚入厦大，有次陈景润作业的字写得潦草，老师批评了他，第二次的练习，字写得工工整整，直到现在陈景润给老师写信的字，仍像当年那样工整．

陈景润回到母校，看到校园的巨大变化，回忆过去，高兴地对同学们说："你们可能不知道，以前条件可没这么好．我第一次从福州乘汽车到厦门，将近坐了一个星期才到达．汽车插树枝伪装，关灯晚上走，怕挨炸．晚上没有电灯，用的是煤油灯．路也不平，坑坑洼洼．现在电灯这么亮，房子这么好，环境这么美，可要好好学习啊！青年人要有远大的理想！"回忆过去，必然使陈景润同志缅怀、感念起王亚南校长．他在校庆大会发言中，十分沉痛地说："我们敬爱的王亚南校长在十年浩劫中离开了我们，这是我国教育界的一大损失．"是啊！陈景润遇伯乐，王亚南懂得人的价值，在陈景润教中学遇到困难的时候，正是王亚南把他要回厦大，并让他到数学系图书馆管理图书，便于他看书，为他攻克科学堡垒创造好的条件．陈景润没有辜负老校长的期望，不久在厦大连续写出《他利问题》和《三角和的一个不等式》两篇论文，把华罗庚的有关研究推进了一步，初露了他出类拔萃才华的光芒．

连日来，陈景润和厦大师生座谈，做学术报告，在谈到读书、做学问的体会时，他说，每个学生都要有自己的明确的学习目的，坚定不移的信心．一定要练好基本功，母校老师对基本功抓得很紧，这很好，使我们受用无穷．学习必然要继承前人的科学成果．陈景润谈到，有个人拿了十几斤重的一堆稿子给他，说是"1+1"，但一看基本公式都不会用，想得多么简单！陈景润说，有个作家说我为了错找的二角钱，竟花七角钱的车费去取，这是把别人的事套在我头上．我们搞数学可不能这么随便．他深有体会地说，有人认为搞数学的人不要学语文．不对，不学语文，逻辑不强，论文也表达不清．对语文，不仅要学，还要学点文言文，有的数学书就是用文言文写的．学外文就更重要了．要多学几门外文，多几把钥

匙，现在许多人看不懂俄文．他介绍说，其实俄文版书很便宜，英文版一旦翻译成俄文出版就便宜十多倍．他说："能看懂俄文多合算．"真是三句话不离本行，又谈到他精确的数学计算范围去了．陈景润仍坚持每天早上四点起来看书吗？对，这次计划来母校参加三天校庆，他带着一大堆书，每天坚持完成预定的看书时间．

好啊！祝陈景润同志早日摘取"1+1"的皇冠明珠！

20 陈景润影响一代人[①]

——游雪晴

游雪晴，《科技日报》记者．

33岁的张立群是在美国听到陈景润去世的消息的．这位大学一毕业就在中科院数学所学习、工作至今的年轻人谈到陈景润时极为动情："陈景润老师的去世，对我国数学界乃至世界数学界都是一个巨大损失．对于我这样的年轻人来说，心情是无法用语言来描述的，我们进入数学王国，或多或少都受到了陈景润的影响．我的同龄人中，几乎无人不知陈景润，那个时代，陈景润就是科学的化身．"的确——

20.1 他影响了整整一代人

徐迟那篇感情色彩颇浓的报告文学《哥德巴赫猜想》，使得陈景润在1978年那个"科学的春天"里，犹如一面旗帜，召唤着一批批立志献身科学的青年学生，踏上了向科学进军的征途．1982年考入北大数学系的崔桂珍，毕业后留校任教，现已在数学所完成了博士后的研究工作．他自己的切身体会代表了一大批与他有类似经历的人："应该说，我是喜爱数学的人，从上小学起，数学就学得非常好，考大学时，理所应当地报考了数学专业，认为像陈景润那样去研究、攻克数学难题，是世上最神圣、最伟大的一项事业，从未考虑过谋生、择业等问题．在我上学的那个年代，人们都是这么想的．"

比崔桂珍小几岁的史博士也有同感："徐迟的报告文学发表的时候，我刚小学毕业，但当时流行的观念'学好数理化，走遍天下都不怕'已在脑中有极深的印象了，在那种社会氛围下，也就义无反顾地选择了数学．那是一个功利性不很强的社会，如果是今天，我也许就不作这种选择了．"

1979年进入山东大学数学系的张立群，恐怕是受这个影响最直接的了．"在我上下几届的同学中，有相当多的人是受了陈景润的影响而报考数学系的，

① 原载《科技日报》，1996年3月31日．

有些人甚至说不上喜爱数学，只是把它当成一种人生理想去奋斗，可以讲，当时一大批相当优秀的人才就这样聚集在数学王国里了.现在返回去看看，这也不是正常的，毕竟数学是一门基础学科，不可能有现实的应用效益，那么多有才华的人都来研究数学也是一种浪费，我的许多同学后来都改了行.”

的确，陈景润影响了一代青年学生的择业取向，甚至人生道路，但不论他们是哪个年龄段的，后来又从事了什么专业，在谈及陈景润对他们的影响时，都一致认为——

20.2 他为事业献身的精神最宝贵

读过《哥德巴赫猜想》的人，一定记得陈景润那间昏暗的6平方米小屋，那些在床板上演算出的几麻袋草稿……陈景润对数学的痴迷和投入不是一般人能想象到的.陈景润多年的同事和朋友罗声雄先生回忆说：“陈景润的刻苦，不是常人能做到的，或者说，不是常人能忍受的.”

“在五六十年代，他几乎是每天打一壶开水，买几个馒头和一点小菜，回到他的小屋，一干就是一天.在他的房间，一张床，一个小课桌，一把木椅，剩下的则是他写下的一堆一堆草稿纸.他像一个辛勤的淘金者，通过这些稿纸，寻求数学成果.他的全部生活就是研究数学.记得20世纪60年代初，中国批判‘苏修’，家喻户晓，一次，他偶尔听到有人骂赫鲁晓夫，便慌忙跑到所党委报告‘有人攻击苏联老大哥’，以表示对党的忠心，可见他对数学迷到什么程度.”

也许有人会觉得陈景润过的不是正常人的生活，然而正是他对数学如醉如痴的迷恋，忍受了常人难以忍受的痛苦，用尽全部心血，才成就了令世人瞩目的业绩.对一项事业，一个理想，只有这样不计名利，忘我投入，才能最终有所发现.在当前这种物欲横流，急功近利的社会环境下，陈景润的这种执著和献身精神是十分难能可贵的，这也是他留给我们最宝贵的精神财富.

陈景润的去世使不少人又一次关注了数学——这一最古老的学科.应该说数学，尤其是纯数学，是一切学科的基础，但在现实生活中，并没有实际的应用效益，然而它仍反映了人类认识自然、掌握自然规律的水平，是人类知识体系中重要的组成部分，虽然像20世纪80年代初那样，人人都研究数学是不正常的，但也不能无人去搞，毕竟从长远来看，一切可转化为效益的技术和应用科学的发展都要仰仗基础科学.

谈到数学，广而言之到所有基础学科现状，不景气是有目共睹的.甚至目前上大学报考数学系的学生中，有相当一部分是奔着学数学好出国而来的.但记者在采访中，也见到了一批像陈景润一样将数学当成一项神圣的事业，为之献身的人，其中也不乏青年.张立群就说：“研究数学作为职业来讲不是好的，但它是一门艺术，我喜爱它，其中的乐趣是不能用金钱来衡量的.”崔桂珍也讲：“每

个人的理想和价值观不一样，我愿意这样做学问，这也许就是陈景润这些老师给我们的影响吧！”

陈景润在数学上的成就是巨大的，而他对一代人，一个时代的影响则更是深远的.

陈景润年谱与论著目录

第十三章

1 陈景润年谱

1933 年 5 月	出生于福建省闽侯县胪雷村.
1940～1944 年	在福建三一小学读书.
1944 年	在三民镇中心小学(现三明市实验小学)读书.
1945 年 2 月	小学毕业,升入三元县立初级中学(三明市一中)后转入福州三一中学.
1948 年 2 月	进入英华书院(今福建师大附中).
1950 年 9 月	以同等学力考入厦大数理系.
1953 年 9 月	毕业分配至北京四中任教.
1954 年 10 月	在家养病.
1955 年 2 月	由当时厦门大学的校长王亚南先生举荐,回母校厦大数学系任助教.
1956 年	《他利问题》发表,改进了华罗庚先生在《堆垒素数论》中的结果.
1957 年 9 月	由于华罗庚教授的重视,被调到中国科学院数学研究所任研究实习员.
1960～1962 年	转入中科院大连化学物理所工作.
1962 年	升任助理研究员.

1966 年	证明了每个充分大的偶数都可表示为一个素数和一个素因子个数不超过 2 的整数之和.
1966 年 5 月	《科学通报》第 17 卷第 9 期,宣布陈景润《哥德巴赫猜想》(1+2)的结果.
1973 年	论文《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》在《中国科学》发表,在国际数学界引起轰动,其结果被命名为"陈氏定理".
1975 年 1 月	当选为第四届全国人大代表,后任五、六届全国人大代表.
1977 年	破格晋升为研究员.
1978 年	受国际数学家大会作 45 分钟报告的邀请.
1979 年 1~6 月	赴美国普林斯顿高级研究院工作.
1979 年 9 月	在巴黎法国高等科学研究所和英诺丁汉大学访问学习.
1980 年 8 月 25 日	与由昆结婚.
1980 年 11 月	当选学部委员(中科院院士).
1981 年 4 月	参加厦大 60 周年校庆.
1981 年 12 月	其子陈由伟出生.
1982 年	获国家科委自然科学一等奖,并再次受国际数学家大会作 45 分钟报告邀请.
1984 年	确诊患帕金森综合征.
1988 年	评定为一级研究员.
1991 年 7 月	受吉林延边敖东集团之邀前往长白山.
1991 年 9 月	参加英华中学 110 周年校庆.
1992 年 2 月	荣获首届华罗庚数学奖,先后受聘贵州民族学院、河南大学、厦门大学、青岛大学、华中工学院、福建师范大学等校的兼职教授,并担任《数学季刊》主编.
1995 年 1 月	获 1994 年度何梁何利基金奖(数学奖).
1996 年 3 月 19 日	因病逝世.

2 陈景润论著目录

[1] 华林问题中 $G(k)$的估值.数学学报,1958(8),253-257.

[2] Waring's problem for g(5).Sci.Rec., 1959(3),327-330.

[3] 华林问题中 $g(\varphi)$的估值.数学学报,1959(9),264-270.

[4] 关于 Jesmanowicz 的猜测.四川大学学报,1962,18-25.

[5] 给定区域内的整点问题.数学学报,1962(12),408-420; Sci. Sin., 1963

(12),151-161.

[6] Corrigendum to Yin Wen-lin's paper "The lattice-points in a circle". Sci. Sin., 1962(11),1725.

[7] 圆点整点问题.数学学报,1963(13),293-313;Sci. Sin., 1963(12),633-649.

[8] Lmprovement of asymptotic formulas for the number of Lattice-points in a region of three dimensions (Ⅱ). Sci. Sin., 1963(12),751-764.

[9] 关于三维除数问题.数学学报,1964(14),549-559;Sci. Sin., 1965(14),20-29.

[10] 华林问题 $g(5)=37$.数学学报,1964(14),715-734;Sci,Sin., 1964(13),1547-1568.

[11] 某种三角和的估值.数学学报,1964(14),765-768.

[12] An improvement of asymptotic formulae for $\sum_{n\leq x} d_3(n)$ where $d_3(n)$ denotes the number of solutions of $n=pqr$. Sci. Sin., 1964(13), 1185-1188.

[13] 关于 $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.数学学报,1965(15),159-173;Sci. Sin., 1965(14),522-538.

[14] 关于谢盛刚的"表大偶数为素数与至多三个素数的乘积之和"一文的一些意见.数学进展,1965(8),335-336.

[15] On large odd number as sum of three almost equal primes.Sci. Sin., 1965(14),1113-1117.

[16] On the least prime in an arithmetical progression.Sci. Sin., 1965(14),1868-1871.

[17] 表大偶数为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和.科学通报,1966(17),385-386.

[18] 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和.中国科学,1973(16),111-128; Sci. Sin., 1973(16),157-176.

[19] 华林问题 $g(4)$的估值.数学学报.1974(17),131-142.

[20] 关于区间中的殆素数的分布问题.中国科学,1976(19),7-20;Sci. Sin., 1975(18),611-627.

[21] 关于算术级数中的最小素数和 L 函数零点的二个定理.中国科学,1977(20),383-414; Sci. Sin., 1977(20),529-562.

[22] On Professor Hua's estimate of exponential sums. Sci. Sin., 1977(20),711-719.

[23] 1+2 系数估计的进一步改进——大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和(Ⅱ).中国科学,1978(21),477-494;Sci. Sin., 1978(21),

421-430.
[24] On the Goldbach's problem and the sieve methods. Sci. Sin., 1978(21),701-739.
[25] On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (Ⅱ). Sci. Sin., 1979(22),859-889.
[26] 关于区间中的殆素数的分布问题(Ⅱ).中国科学,1979(22),12-32;Sci. Sin., 22(1979),253-275.
[27] (与潘承洞合作)哥德马赫数的例外集合.中国科学, 1980(23),219-232;山东大学学报,1979,1-27;Sci. Sin., 1980(23),416-430.
[28] On sone problems in prime number theory. Seminaire de Theorie des Nombres, Paris 1979-1980,167-170.
[29] Goldbach 数的例外集合(Ⅱ).中国科学,1983(23),327-342;Sci. Sin., 1983(26),714-731.
[30] (与黎鉴愚合作)关于自然数前 n 项幂的和.厦门大学学报,1984(23),No. 2,134-147.
[31] 某种三角和的估计及其应用.中国科学,1984(27),1096-1103;Sci. Sin., 1985(28),449-458.
[32] (与黎鉴愚合作)关于等幂和问题.科学通报,1985(30),316-317.
[33] (与黎鉴愚合作)关于幂和问题的进一步研究.科学通报,1985(30),1281-1285;1986(31),361-362.
[34] 关于 L - 函数的零点分布.中国科学,1986(29),673-689;Sci. Sin., 1986(29),897-913.
[35] 关于 L - 函数的三个定理(Ⅰ),(Ⅱ).曲阜师范大学学报,1986,No.2,1-8;No. 3,1-14.
[36] (与黎鉴愚合作) On the sum of powers of natural num-bers.数学季刊,1987(2),1-18.
[37] (与刘健民合作)算术级数中的最小素数和与 L - 函数零点有关的定理(Ⅲ).科学通报,1988(33),794;1988(33),1932-1833.
[38] (与王天泽合作)奇数情形 Goldbach 问题研究.科学通报,1989(34),1521-1522.
[39] (与刘健民合作)算术级数中的最小素数与 L - 函数零点有关的定理(Ⅲ),(Ⅳ).中国科学,1989(32),337-351;Sci. Sin., 1989(32),654-673;Sci. Sin., 1989(32),792-807.
[40] (与王天泽合作)关于哥德巴赫问题.数学学报,1989(32),702-718.
[41] (与王天泽合作)关于 L - 函数例外零点的一个定理.数学学报,1989(32),

841-858.
[42] (与刘健民合作)关于 L - 函数在直线 $\sigma=1$ 附近的零点分布.中国科学技术大学研究生院学报,1989,1-21.
[43] (与刘健民合作)Goldbach 数的例外集合(Ⅲ),(Ⅳ).数学季刊,1989(4),1-15;5(1990),1-10.
[44] (与王天泽合作)关于 Dirichlet L - 函数的零点分布,四川大学学报,1990,145-155.
[45] (与王天泽合作)关于算术级数中素数分布的一个定理.中国科学,1989(32),1121-1132;Sci. Sin., 33(1990),397-408.
[46] (与王天泽合作) Estimation of the second main term in odd Goldbach problem. Acta Math. Sci. 1991(11),241-250.
[47] (与刘健民合作)On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (Ⅴ). International symposium in memory of Hua Loo Keng, Science Press, 1991, Springer-Verlag, Vol. 1, 19-42.
[48] (与王天泽合作)关于 Goldbach 问题的一点注记.数学学报,1991(34),143-144.
[49] (与王天泽合作)广义 Riemann 猜想下的奇数 Goldbach 问题.中国科学,1993(36),343-351;Sci. Sin., 1993(36),628-691.
[50] (与王天泽合作)素变数线性三角和的估计.数学学报,1994(37),25-31.
[51] (与王天泽合作)关于奇数 Goldbach 问题(Ⅱ).数学学报,1996(39),169-174.
[52] 初等数论Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ.科学出版社,1978,1982,1989.
[53] 组合数学.河南教育出版社,1984.
[54] (与邵品琮合作)哥德巴赫猜想.辽宁教育出版社,1987.
[55] 组合数学简介.天津教育出版社,1989.

没有人告诉你是对还是错[①]

⊙附录

刘培杰

总导语：英国费伯出版社和美国布卢姆斯伯里出版社曾经悬赏 100 万美元，奖给在两年内解开哥德巴赫猜想数学之谜的人．这两家出版社其实醉翁之意不在酒，真实意图是为希腊作家阿·佐克西亚季斯的小说《波得罗斯大叔和哥德巴赫猜想》做宣传，领奖的最后期限定为 2002 年 3 月 15 日．俗语说：重赏之下，必有勇夫．百万美金像一块巨石，在中国老百姓的心中激起千重浪，于是中国大地再掀"证明"热潮．

哥德巴赫是德国－俄国数学家，1690 年 3 月 18 日生于普鲁士柯尼斯堡，1764 年 12 月 1 日卒于莫斯科．早年学习法学，后来在大学里攻读医学和数学．1725 年移居俄国，任彼得堡科学院会议秘书兼数学教授．1727 年到莫斯科当上沙皇彼得二世(Tsavevich Peter Ⅱ)的家庭教师．1742 年起任外交部公使，1742 年 6 月 7 日他在致瑞士数学家欧拉的信中提出猜想：任何一偶数 $n(n\geqslant 4)$是两个素数之和．

目前中国在哥德巴赫猜想研究上居于世界领先地位，以致 1996 年德国数学家 Volke 到中国科学院数学所访问时说："中国数学家对哥德巴赫猜想的贡献那么大，如果哥德巴赫还活着，我猜想他一定会首先选择到中国来访问．"同时他把哥德巴赫当年给欧拉的那封信的复件送给了中国数学研究所，以表示他对中国数学家的敬意．

① 谨以此文献给所有数学业余爱好者．

中国第一个想拿走100万美元的是任大鸿先生.任大鸿先生是成都某设计院的职工,年近中年,额头宽大,从中国传统相面术来看是一位聪明绝顶之人;当他从媒体中得知费伯出版公司的悬赏之后,兴奋不已,马上把自己关在屋子里几天未出来,最后终于搞出了一份所谓"证明",并向媒体发布了这一消息.

他对自己的证明颇为自信,这与他中学的求学经历有关,据称他中学时数学特棒,是数学课代表,很少有数学题能难住他.

此后任大鸿就开始等待数学界的答复并准备"领取"100万美元的巨奖,但这并不容易,因为那两家出版公司规定,必须在两年内得到权威数学机构的认可,并于第3年在权威杂志上发表,对此不知任先生怎样想.

在哈尔滨也有多起证明事件.第一起证明人赵东宁是一位女士,她在黑龙江省卫生学校教中医临床课.赵中学毕业于哈尔滨一中,师从当时很有名望的教师冯宝琦先生.冯先生早年毕业于南京大学,系上海富家子弟.因家庭出身毕业被分配至东北,先是在一中工作,后调至师专数学系."八九风波"前赴美投奔中学同学,原国民党抗日将领张自忠将军孙子,至今定居美国,冯先生是黑龙江省数学奥林匹克运动首倡者之一,对自己的学生极尽提拔之能事.

冯宝琦先生对他的这位学生十分欣赏,赵女士确实给人以聪明、执著、脱俗之感,她对哥德巴赫猜想和素数个数公式很痴迷,从1977年至1985年已证明了8年,并为此耽误了自己的终身大事,她异常勤奋,做了大量计算,只可惜数学基础仅限于集合论,所以多年苦心求证,写了多稿均未果,笔者曾提供给她若干数论专著,如华罗庚先生的《堆垒素数论》,但她无法读懂,所以只能抛开已有的数学概念与符号另起炉灶,必然是错误多多.笔者参加了当年的鉴定工作并指出了她所"发现"的素数个数公式之误.曹珍富、陆子采、吕庆祝先生都指出了其"哥德巴赫猜想"的"证明"之误.但她与笔者后来所遇到的那些"爱好者"不同.她的超拔于物质生活之外的精神风貌与对自己热爱事业的执著精神今天也是少有,实在令笔者敬佩.后来她也到了美国,做家庭服务员,并继续"证明"不停.

在职业数学家"宣称"证明了哥德巴赫猜想的人中最著名的一位应该算是原东北师范大学的教务长张德馨博士,张老1905年3月生于山东省费县,是东北解放后第一个回到祖国的留洋博士,他1937年在德国柏林大学获博士学位,当时解放区报纸在头版发表通栏"欢迎您,张博士",后任东北大学教务长,是我国数论界的老前辈(虽然Legendre在70多岁时,才证明了Fermat大定理,当$n = \Gamma$时是正确的),并著有《整数论》(1958年)这样的专著.他在陈景润成名后,按捺不住,也给出了一个基于大量验证的"证明",但数值验证决不能等同于证明,因为验证只能对有限数值,而自然数是无穷的,对哥德巴赫猜想来说验证早有人在进行.皮平(N. Pipping)曾核对了100 000以内所有偶数;申懋功核对了

33 000 000以内的所有偶数；勒依时、富勒斯、哈蒙特与洛易（Light. Forres. Hammond and Roc）核对到 100 000 000；而尹定更核对到 500 000 000. 张德馨的"论文"发表在自己主管的《东北师大学报》（自然科学版）上，其理论依据居然是当时一句政治口号"实践是检验真理的唯一标准"，但数学界对"政治数学"和老资格并不买账，终成笑谈.

第四位证明者叫秦正党，家住北京北洼路北京无线电厂宿舍楼 2－4－203 室的秦正党老人，1949 年毕业于上海交通大学航空工程系，后一直服务于空军，据他自己讲："他根本没有接触数学这门行当，特别是对传统数论而言，迄今我简直就是个数论盲".

但他认为：数论盲也有数论盲的"优势"，一张白纸，没有负担，可以沿着自己的思路摸索探寻.

秦先生同其他爱好者一样，都是从 1978 年开始从事"哥德巴赫猜想证明"的.

在开始的两年，他摸索出来所谓的"双余零筛法"，这使他看到了一线希望，从而坚定了证明的决心.

但是在接下来的 8 年里，他开始在余数分布规律的圈子中转悠，没有取得任何进展，但他挫之愈奋，几度灰心，几度奋蹄.

后来他又摸索到了用数学归纳法证明哥德巴赫猜想的新路子，这使他又"前进"了一步，1993 年他又发表了"余数区间"这个"新概念"，使他觉得哥氏猜想已尽在掌握之中，于是秦先生于 1996 年将他的证明用中英文整理出来，由光明日报出版社出版. 这是一部 42 万字，500 多页的巨著，这部书的出版得益于秦先生的校友.

秦先生 1945 年毕业于重庆南开中学，在那一届校友中，有当今著名数学家——美国加利福尼亚州立北岭大学数学教授、哲学博士林同坡（可惜他是代数学专家对解析数论并没有太多的发言权），林同坡先生为他的专著做了序.

另外张继庆同学长期支持他搞研究、宋卓敏、伍承德在经济上大力帮助他，为之提供出版经费，孙开远为他校对英文稿，他的一位叫马达璋的同学还为此刻了一方"水滴石穿"的印章，以示庆祝，这些新中国成立前的南开中学毕业生，其理想之高远，友谊之深厚，真令人感慨万千.

遗憾的是这是一场西西弗斯的悲剧，注定要失败，水已滴但石不仅没穿，而且根本没滴到那块石上，当然秦老先生并不介意，他在作者自白中写了一首诗：

> 我就是，
> 一支燃烧着的蜡烛；
> 当然希望：
> 在哥德巴赫猜想问题上，

发出一点点微弱的亮光.
我早就准备着:
吞下
"瞎子点灯,
白费蜡."
这个十分难咽的苦果.
可以成灰,
但不流泪,
更不后悔!

从以上几个"证明"事件中,第一我们可以看到中国古代那种期待生活中出现落魄公子娶了公主、穷汉捡到狗头金的侥幸心理,已深深植根于我们整个民族内心深处,不论是市井百姓,还是专家学者,这恐怕也是"伪证明"得以大行其道的根源之一.因为你所运用的方法别人也同样会,那为什么别人没有做出来呢?所以此时我们提倡人们自问,我有什么过人之处吗?在解决这个问题的过程中我的长处是什么?这样会在将自己的成果拿出来时"慎重"些.而所谓"业余爱好者"的证明因其所花代价太小,所以无法得到真正有价值的东西,但正因如此小代价大收获的诱惑,证明"屡禁不止".前些年有一位老同志退休后来到北京,跟潘承彪教授(我国哥德巴赫猜想权威之一)说他要搞哥德巴赫猜想,潘承彪劝他最好还是做点别的事,他却说"别的事不太好做",在陈景润教授去世后几天,这种"证明"热浪又开始掀起.于是《光明日报》在同一天发表了两篇文章,力劝"爱好者"们及时回头.一篇是中科院数学所业务处写的,文章说"著名数学家陈景润院士去世以后,我们数学所收到比以前多得多的来信来稿,声称解决了哥德巴赫猜想.过去我们也曾收到成千上万类似的稿件,但没有一篇是对的,而且绝大多数错误不超出中学数学的常识范围."陈景润在1988年出版的《初等数论》的前言中说:一些同志企图用初等数论的方法来解决哥德巴赫猜想及费马大定理等难题,我认为目前几十年内是不可能的,所以希望青年同志们不要误人歧途,浪费自己的宝贵时间和精力.

诗人的浪漫与"俗人"的疯狂

导语:一部好的文学作品既能给人以鼓舞,又能将人引入歧途

记得1996年陈景润教授逝世后,我们曾到北京中国科学院数学研究所组稿,希望能尽快出版一本《陈景润传》,接待我们的是当时数学所人事处处长杨莎莎女士,当我们说明来意后,杨处长介绍说:当年在徐迟先生《哥德巴赫猜想》

这篇报告文学发表后，在中国引发了一场全民数论热，杨女士说那个年代数学研究所招收的研究生都是最优秀的，报考人数有几千人，今天的许多中青年数学家都是受了这篇报告文学的影响才进入了数学的殿堂．笔者至今还能清晰地记得当年(1978年)看到这篇报告文学时激动的心情，并由此对数论产生了浓厚的兴趣．在那个整个民族精神振奋，个性解放，崇尚自我奋斗的年代，这篇文章无疑是具有震撼力的，但同时由于徐老的浪漫也使得文章产生了很大的副作用，北大教授金克木在《读书》杂志2000年3月号发表的一篇名为《数学花木兰：李约瑟难题》的文章中指出：

徐迟是诗人，爱好音乐，他是用对待艺术的态度对待科学的，没留意科学是一种特殊的艺术，甚至可以说是反艺术的艺术．因此他的那篇介绍陈景润的报告文学写得漂亮，起了很好很大的作用．但是描述的是数学家，不是数学．他一再引用很少人能懂的数学公式，却没有解释，对一般人必须说明的基本要领，也许因此引发了不少人，甚至有数学界的人，慌忙去证明那个"猜想"，使数学研究所的人耗费许多时间去做本无必要的应对．

在徐迟的报告文学中，似乎给人造成了这样一种错觉，似乎陈景润是由一个不知名的小人物一跃而成了大数学家，并且仅靠他自己天才的想法，但实际上完全不是这样．

其实陈景润当时(1966年)发表(1+2)之前已是一位功力深厚的解析数论专家了，他那时已经在著名数学杂志上发表了关于华林问题，Jesmanowicz猜想，圆内整点问题、黎曼猜想、三维除数问题等著名论文17篇．并且在他的关于(1+2)的著名论文中，使用了大量著名数学家的结果与方法，如布伦(V. Brun)、拉德马赫尔(H. Redemacher)、埃斯特曼(T. Estermann)、布赫夕塔布(A. A. Buchstab)、孔恩(P. Kuhn)、赛尔伯格(A. Selberg)、林尼克(Yu. V. Linik)、瑞尼(A. Renyi)、巴尔巴恩(M. B. Barban)、庞比尼(E. Bombieri)等一大批人，可以说陈景润的高度绝不是自身的高度，而是站在前人肩上之后的高度．如今近30年过去了，陈景润已于1996年3月19日撇开他钟爱的数学，撇下他的妻儿骑鹤而去；《哥德巴赫猜想》一文的作者徐迟也撂下他那枝"划过了几十年逝波"的笔，追随陈景润撒手人寰．

1992年《人民日报》发表《光明日报》记者温红彦的文章题为《是正确认识哥德巴赫猜想的时候了》，他写道：

自从1977年报告文学《哥德巴赫猜想》问世后，神州大地不知有多少人向往着摘取那颗灿烂的"明珠"，十几年来，全国各地自称证明出哥德巴赫猜想的人数以千计，关于这种报道也时常见诸市井小报甚至一些大报名刊，但最后证实这些全是谬误，十几年来，光是中国科学院数学所就收到约100麻袋这样的论文，但没有一篇论文正确．

江苏南京的一位数学爱好者在给中科院数学研究所的信中这样写道:"过去我根本不敢碰哥德巴赫猜想,这几年倒来了兴趣,无事可做,搞点有钻头的东西,锻炼脑子也是好的,现在我把我的研究结论寄来,目的当然不是祈望成家,只请你们在备忘录上记一笔,将来有那么一天,出来一个'大权威',他得出的结论与我的相似,你们可以证明一下,这个结论他不是第一个."

对业余人士的第二种心理分析是他们内心渴望有种崇高感,但正像苛求完美既是造就大师与专家的必要心理条件但同时又是抑郁症等心理疾病存在的基础一样,渴望崇高也是一把双刃剑.它不仅能使有非凡能力的人成为伟人,也能使平凡的人变成丧失理智的偏执狂.这有些像中国的教育走入了心理寄托与转移的误区一样,千百万自己很不甘心默默无闻走完人生大半的家长们把全部希望都寄托在自己的子女身上,即所谓的望子成龙的心理.有太多太多的人平凡又平凡地湮灭在人海中,于是乎悲叹自己竟比不上夏夜的萤火虫在黑夜中尚有一丝自己的光亮.于是他们便开始挖空心思表现自己,或将名字刻到长城的石头上追求永恒,或当追星族,借明星之光照亮自己,而稍稍有点头脑的人便琢磨,如何将自己同世界上公认伟大的、崇高的事联系起来.于是文坛上有了写了几千万字无一变成铅字的被讥为浪费中国字的"文学青年";有了吟诗百首无一首一人听得懂、看得明白的"朦胧派诗人";但最难对付的要算"业余数学爱好者"了.他们像练气功走火入魔一样,笃信自己是数学天才,天降解决某个重大猜想之大任于斯.于是整天衣冠不整,神经兮兮,置本职工作于不顾,视妻儿老小如路人,一心一意,昼夜兼程为求得一个所谓"证明",夜不安寝,食不甘味.

第三种心理是出人头地——这也是人类共有的心理.

数学家虽然绝大多数在为人上是谦虚的,也可以说是与世无争的,但从某种意义上讲又是最争强好胜的.他们总是觉得应该和各个时代的最伟大的数学家竞争,所以他们大搞世界级难题.啃最硬的果,并且对此充满自信.据陈景润的同乡好友、中科院院士林群回忆说:"陈景润其实是一位极其好胜的人,他最大的心愿就是打倒当时世界上哥德巴赫猜想方面的最大权威——前苏联的维诺格拉朵夫(Vinogradov Ivan Matveevič)."记得有人在采访美国数学家罗宾逊(Robinson)教授时,当问及"在数学中,是否有某些领域比其他领域更容易使人成名"时,罗宾逊教授说:"在数论中,有许多经典的猜想——哥德巴赫猜想、费马猜想等等,任何对此作出贡献的人将立刻成名,因为这些问题非常有名。"很早以前有一位名叫梅里尔(Merrill)的数学家在一本《数学漫谈》的书中剖析了人类的这种情结.他写到:"凡属人类,天生有一种崇高的特性,也就是好胜的心理,这种心理,使人探险攀高、赴汤蹈火而不辞……"波兰最著名的数学家巴拿赫(Banach Stefan)也常常用这样一句话不断勉励自己,他说"最重要的是掌握技艺的巨大光荣感——众所周知.数学家的技术有着像诗人作诗一样的秘

诀……"在数学这个行当中,不存在国内领先,亚洲第一,每个定理都必须是世界第一,否则你的论文将不会发表,因为绝没有第二的位置,正所谓"赢家通吃".

而初等数论的爱好者大多都有这种心理,他们认为惟其需要魄力和技巧的艰苦工作,才有诱惑的分量.有些人以为数学家之所以不能证明哥德巴赫猜想,乃是工作太难的缘故,存了这个念头,当然想要自己去解决问题,以便打倒一切数学家,出人头地.总之,一切麻烦都因学识不够,竟不知这对他来说是不可能之事,真是可惜.现在无法证明高峰绝壁不可攀登,探险家仍然继续尝试,将来终有登临之日,但要凭借初等数学以至大学本科或硕士研究生的功底要想证明哥德巴赫猜想,无疑是想骑自行车到月球上旅行,这时人类的自省力便是遏制这种蠢行的唯一力量.

最后人类还有一个共同的心理弱点——贪财.这些猜想一经证明便可获巨奖.1998年前也就是1908年德国达姆斯塔特(Darmstadt)一位学过数学的大富翁沃尔夫斯凯尔(Paul Wolfskehl)为感谢在他即将自杀之时,费马猜想救了他一命(他原计划在午夜12点执行自杀,但因看一篇德国数学家库默尔(Kummer)写的关于费马猜想的论文错过了时间)决定悬赏10万元马克,奖给第一个证明费马猜想的人,重赏之下,必有勇夫,时间从1908年6月27日哥廷根皇家科学协会发表公告,截止到2007年9月13日止.当时盛况空前,"证明"像雪片一样飞到德国哥廷根大学,但没有一个是对的.当年负责审稿工作的施利克汀(F. Schlichting)博士告诉20世纪70年代的人们奖金贬值后仍值1万多马克.他写了一本《费马大定理十三讲》(13 Lectures on Fermat's last Theorem),写信给保罗·映本博瓦姆(Paulo Ribenboim)说:来稿总数没法统计,第一年1907~1908登记3 621份,他说在社会地位方面,寄论文者常常是受过一种专业教育,但事业上失败的人,他们企图以证明 Fermat's last theorem 找回成功,他将一些稿件交给了诊断严重精神分裂症的医生.

俗语道"太阳底下无新事",其实历史上的任何闹剧都没有什么新意,手法相似,只不过狂妄程度有所不同,证明的"难题"各不相同罢了.

历史使人明鉴,历史有惊人的相似之处,在中国这片大地上出现过许多类似哥德巴赫猜想被"爱好者"证明的事件.我们可以给读者展示一个小小的缩影,即中国历史上的三分角家及方圆家的悲喜剧.这对那些狂热的爱好者及不负责的报刊记者都是值得借鉴的.(见本文集史海钩沉栏)

这些业余人士的存在对社会无益,对本人则有害,辽宁教育出版社曾出版的一本书《如此人间》中作者思果(是一位老先生)曾这样说:

> 至于治学成功，我劝世上所有的少女千万不可嫁好学的人．美国发明家爱迪生新婚之日路过他的试验所，他说要下车去看一看，就不出来了，让他的新娘坐在车子里没有人去理很久很久；史学家顾颉刚的女儿的作文要他看一看，他没有工夫．学问家也不知道有多少这种忽略了家里人的故事，他们一心要研究学问，一切都搁下，没有时间去顾别人．至于外人能利用就尽量利用，——只比在风月场中放荡、吸鸦片、打吗啡、抢银行的好一些，他们其实也是“劫匪”，不过是法律制裁不到而已．

金庸先生也曾谈到他为了写稿子，办《明报》，多次推托不与大儿子谈心交流，最后导致大儿子因一点小事而自杀．

所以我们似乎可以这样劝那些爱好者，为一个真正的证明尚会让人如此误解与不满，那为了一个“伪证明”值得吗？其实对你来说家人与朋友也许更重要．

总想人咬狗

从多起宣称“证明了”哥德巴赫猜想的闹剧中我们可以看到媒体特别是报纸对此起到了推波助澜的作用．究其原因这一方面有很大程度上是源于记者对数学的无知．但这毕竟是可以理解的，因为正如新闻的黄金法则是“狗咬人不是新闻，人咬狗才是新闻”．这种心态是这类业余人士频频出现在报端的根本原因．

谁都无意苛求新闻出版人员有专家般的学识．像周振甫为钱钟书的《管锥编》当责任编辑时所显示出的那种学识水准．但最起码要有一种科学的态度．《纽约时报》的编辑兼记者、科技部主任詹姆斯·格莱克为了写《混沌开创新科学》，采访了大约 200 位科学家，这种精神是值得新闻工作者学习的．相反有一些新闻工作者仅凭道听途说，凭着一点少得可怜的数学知识，再夹杂着一点好大喜功的心理作用．于是一篇篇攻克世界难题的报道被布之报端，混淆了人们的视听，助长了“爱好者”们不想作长期艰苦努力就想一鸣惊人的投机心理，于科学的普及极为不利．

有时著名数学家在这方面也会犯错误，苏步青先生早年曾在一篇文章中提到什尼列尔曼（Shnirelman）证明哥德巴赫猜想弱形式时说，什尼列尔曼是夜大学生，文章发表于工厂厂报．其实什尼列尔曼并非业余人士而是根红苗正的科班出身，毕业于莫斯科大学．1929 年获数学物理博士学位，1933 年被选为苏联科学院通讯院士，并任莫斯科大学教授，虽然 33 岁就去世了，但仍是哥德巴赫

猜想方面的大专家之一.

当然这种报道的失误似乎已成为新闻传媒的常见病,不仅在我国有,就是美国著名的《时代》周刊也出现过这样严重失实的报道.

1984 年 2 月 13 日美国《时代》周刊报道了美国桑迪亚国家实验室的数学家们花了 32 小时,解决了一个历经 3 世纪之久的问题;他们找到了梅森(一位法国僧侣 M. Mersenne)数表中最后一个尚未分解的 69 位数 $2^{251}-1$ 的因子,这个 69 位数是:

132686104398972053177608575506090561429353935989033525802891469459697

它的三个因子是:

178320287214063289511

61676882198695257501367

12070396178249893039969681

我国的《参考消息》同年 2 月 17 日转载了这篇报道,《数学译林》杂志 1984 年 3 期刊登了此消息,此外还有些杂志作了相应的报道(如 1984 年《科学画报》).后来我国天津的三位"业余"数学家天津商学院的吴振奎、沈惠平和华北第三设计院的王金月发现这是一篇严重失实的报道.因为 $2^{251}-1$ 是 76 位数,并且早在 1876 年卢卡斯(Francois-Edouard-Anatole Lucas, 1842—1891 - 10 - 3,法国数学家)就已经找到了它的一个素因数 503. 1910 年克尼佛姆又找到了另一个素因数 54 217.所以真实的情况是报道中的数并不是梅森数 M_{251},即报道中的 132…697 只是梅森数 $2^{251}-1$ 的除去因子 $503\times 54\ 127=27\ 271\ 151$ 外的余因子.

有一种值得注意的倾向是有些"爱好者"已将试图证明猜想改为自己提出猜想,以期与著名猜想那样受到世人瞩目.但数学圈偏偏又是那样势利.只注重那些大家提出的问题,因为它有价值的概率大.而那些小人物往往是人微言轻,不被人重视,这是自然的,因为那些小人物还没有证明自己行,还没有取得说话的资格.前些年一位毕业于福建师大数学系的成功企业家在《中国青年报》上悬赏 100 万人民币求证他自己提出的一个猜想,后来人们发现它与哥德巴赫猜想是等价的.

目前民间许多业余爱好者提出了许多所谓的猜想,有些比较容易否定,有些则暂时无法证明或肯定,因为有一些是与著名的数论猜想具有某种等价性,随之而来的是将极端困难性也传递了过来.较典型的是,海南省的一位老农民梁定祥在劳动之余提出了一个类似哥德巴赫猜想的猜想.

前几年,一篇关于业余人士宣布证明了费马大定理的报道发表在《科学时报》上,是说中国航空工业总公司退休高级工程师蒋春暄宣布他发现了一种新

的数学方法.用他的话来说,这种方法“具有许多优美的性质,对未来的数学将产生重大影响”,而证明费马大定理只不过是其中的一个应用而已.按照他的方法,证明费马大定理的论文只需要几页纸,而且也不用新的数论知识.因此他认为这才应当是当年费马所想到的证明,但与怀尔斯的证明不同的是,对蒋春暄来说,目前的尴尬倒不是无人喝彩,而是根本无人理睬.

自从1991年他在现已停刊的《潜科学》发表了他的证明后,只找到了有限的赞同者,但却从未收到过任何公开的来自学术上的反驳.1994年一位数学家曾将蒋春暄发表在《潜科学》的那篇文章写成评论,寄给了美国的《数学评论》,但遭到了拒绝.直到1998年才在一位美国朋友的帮助下发表在《代数,群,几何》上.在报道这件事时,记者借用了一句流行歌曲的歌词:“谁能告诉我是对还是错.”这也许是所有业余者的共同遭遇,从漠然和不置可否这点上说,数学家是吝啬和绝情的.

究竟是谁冷漠无情

导语:业余爱好者大多有这样的疑问,为什么我们辛辛苦苦搞出来的东西数学家连看也不愿看,他们真是一群冷漠无情的人吗?

首先是数学家对那些业余人士的“资格”不予认可,中国数学会前任理事长,世界哥德巴赫猜想权威王元教授在一篇写给中学生的关于评论数论经典问题的科普文章中,语重心长地对数论爱好者说:

> 最后我还想说几句说过多次而某些人可能不爱听的话.那就是研究经典的数论问题之前,必须要对整个现代数学有相当的了解与修养,对前人的工作要熟悉.在这个基础上认真研究,才可能有效.由于某些报纸的宣传,使一些人误解为解决上述著名数论问题就是研究数论的唯一目的,就是摘下数学皇冠上的明珠,就是为国争光.只要我们能破除迷信,敢于拼搏就可以成功.这就难怪有些人在专攻这些问题之前甚至连大学数学基础课也没有学过,初等数论书没有念过,更不用说对这些问题的历史成果有所了解了.他们往往把一些错误的东西认为是正确的东西,以为把问题“解决”了.这样做不仅没有好处,而是很有害的.这些年来,在这方面不知浪费了多少人的宝贵光阴,实在令人痛心,我衷心希望他们从走过的弯路中,认真总结经验,端正看法,有所反思.

再者数学家对业余人士所采用的工具与思想方法不认可.

王元还说,多年来,有些人凭一时的热情欲攻克哥氏猜想,但他们既不了解这个问题80年来的成就,用的工具又原始,所以浪费了宝贵的时间,又干扰了数学家的工作.

1984年他在国外出版的《哥德巴赫猜想》一书的前言中写道:可以确信,在哥德巴赫猜想的研究中,有待于将来出现一个全新的数学思想.意思实际是说用现有的方法不能解决这个问题.陈景润生前也有同样看法.

这一切又都是数学家本身深知问题难度才如此的.

中国第一批理学博士、曾任南京师大数学系主任的单墫教授专攻数论,曾拜师于王元,功力不可谓不深.但在他为中国青年出版社写的一本小册子《趣味数论》的结尾中写到:本书的作者还必须在此郑重声明,如果哪位数学爱好者坚持要解决这个问题(哥德巴赫猜想和费马猜想)务请他别把解答寄来,因为作者不够资格来判定如此伟大、如此艰难的工作的正确性.

这一声明同样也适用于其他的猜想,许多爱好者关心哥德巴赫猜想和黎曼猜想的研究.所幸的是,前几年中国科学院数学研究所所长杨乐专门在《文汇报》上撰文指出目前国内无人(包括陈景润在内)搞哥德巴赫猜想和黎曼猜想.另外数学所决不受理宣布证明了这几个猜想的论文(大部分论文是各级各类政府官员“推荐”的,在这里数学不承认权力).如不服,可向国外投稿,世界著名数学杂志有200家之多.杨乐先生也指出:

> 由于哥德巴赫猜想非常简洁,稍加解释任何人都能明白它的意思,这使许多业余数学爱好者抱着侥幸的心理,误以为靠一些初等的方法或从哲学的认识角度就可以证明它.他们长年累月地冥思苦索,浪费了大量的时间和精力.他们并不明白哥德巴赫猜想难在何处,也不懂得什么才是严格的数学证明.在现代数学的研究领域,即使是做出很普通的成果,也需要:(1)长期的努力学习,打下良好的基础,达到大学数学系毕业的同等学力;(2)对所研究的领域已有成果、方法和最新文献有较好的掌握;(3)在所研究的课题上下一番工夫.可惜的是,那些自认为解决了哥德巴赫猜想的同志,绝大部分连上面最起码的第一条都不具备.许多同志只是从新闻报刊中了解到哥德巴赫猜想,根本没有认真读过一篇数学文献,甚至连中学数学和微积分都没有学好,显然还不具备数学研究的条件.这些同志无论花多少时间,也绝对不可能解决哥德巴赫猜想,就像用锯子、刨子去造宇宙飞船一样,是不可能成功的,因为缺乏必要的理论基础、工具和手段.希望业余数学爱好者不要再白白耗费时间去做无谓的“探索”.

业余人士也能成功

导语：在《骑自行车不能上月球》①(《哈尔滨日报》2000年3月15日)这篇文章发表后，许多读者打来电话说："刘老师，您是不是说业余人士一定不能成功？"我说未必.

所谓业余人士分两类，一类是开始从事其他副业或学其他学科，后来转为职业数学家.

外国的如世界概率论权威柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)原来是莫斯科大学学历史的，后来在做毕业论文时发现他所研究的俄国土地契约问题居然有好几个答案，满足不了他那追求唯一性的天性，于是改学数学，终于成为世界概率论权威.

另一位是格罗登迪克(Grothendieck)，他1928年生于柏林，后在法国的南部长大，没有受过正规教育，也没有读过多少数学方面的书，只是经常独立地思考一些问题，后受迪多涅(Dieadonné)指导，成为大家，形成了自己的一套完整体系，称为"概型论"(Schema)，引人"K理论"，后人惊叹"仿佛来自虚空".

国内更是如此，20世纪80年代有几位非常引人注目的全国最年青的数学博士导师都是业余开始的，如肖刚——世界著名代数几何专家，开始是学外语的(1977年3月考入江苏师范学院英语专业)；郑伟安——中国著名概率论专家，开始的职业是上海某一街道服务队专做门窗的小木匠；王建磐——现任上海华东师大校长，著名的代数学家，开始是福建某县地方剧团的编剧；时俭益——著名代数学家，原先的工作是华东师大图书馆的古籍部图书馆管理员，但他们最后无一例外都完成了由业余到职业数学家的转变.

也就是说起点可以业余，但终点必须是职业.

第二类是所学专业不是数学，后来从事的工作也与数学无关，这样的人极少成功，但有一位例外，也就是唯一一位获国家自然科学一等奖的非职业数学家陆家羲.陆家羲生于上海一个贫苦市民家庭，父亲是个收入低微的小商贩，母亲没有职业，靠给别人缝洗衣服弥补家计的不足，他是这个家庭的独子，5岁开始上学，先后在上海正德学校、声扬中学和麦伦中学读书，他十分珍惜父母亲辛劳节俭给他提供的读书机会，从小就勤奋好学，成绩优秀.初中毕业后，因父亲去世家境困窘而中断学业，并到公共汽车五金材料行当徒工.工余时，他仍孜孜不倦地读书自学，立志日后要攀登科学高峰.上海解放后，他考入东北电器工业

① 为了劝说"业余人士"不要去证明哥德巴赫猜想，笔者曾在2000年3月15日《哈尔滨日报》上作了一篇记者访谈.

管理局的统计训练班,短期学习后,于1952年5月被分派到哈尔滨电机厂生产科从事统计工作,在此期间他自修了高中课程和俄语,并广泛涉猎天文、地理、文学、哲学、伦理学等多方面的知识.1951年在职考人东北师范大学物理系接受高等教育,1961年毕业分配到包头钢铁学院担任助教,高校调整时该校下马,他被调人包头市教育系统,先后在包头市教育局教研室、包头8中、包头5中、包头24中以及包头9中等校担任物理教师直到逝世.

在哈尔滨电机厂工作期间,一次,他阅读了一本名为《数学方法趣引》的书——这是对他一生有决定意义的一件事,这本书是我国老一辈数学家孙泽瀛编写的数学普及读物,是中国青年出版社出版的,近几年又有再版.书中所介绍的两个问题——"柯克曼女生问题"和"斯坦纳系列问题"强烈地吸引了他,使他产生了跃跃欲试的愿望,此后,对这两个组合设计问题的追求再也没有同他的生活分开.

但业余研究谈何容易,他承担着繁重的教学任务,为了能在认真完成教学任务的同时再在自己心心思念的两个数学问题上投人力量,他投入了自己所有的业余时间(美国有一个叫柯尔的数学家曾用三年内全部星期天解决了一个重大猜想),他不分昼夜,没有节假日,理发的周期越来越长,饮食越来越简单,就连婚姻大事也一直拖到37岁才解决,人们都知道居里夫妇的实验室,即类似马厩,又像马铃薯窖,但他们的艰难程度又怎么能同当时中国知识分子的工作和生活条件相比呢?陆家羲一家4口挤在一间10多平方米的小屋内,这既是卧室,又是厨房和书房,室内仅有一些陈旧的家具和寒酸的衣物,唯一的一张可写字的桌子要给上学的女儿用,他是趴在多处贴补了旧报纸的破土炕上演算着世纪性难题!包头地处边陲,信息闭塞,资料匮乏,为了查阅文献,他除了通过各方面关系与一些高校的图书馆资料室取得联系外,还不时要千里迢迢自费进京,他唯一的业余爱好是欣赏京剧唱段,但是为了提高自己的英语水平,他的京剧唱片换成了英语唱片,他的一切:家庭生活、时间、精力和有限的金钱都完完全全地付给了唯一的目标——攻克难题.

但他的道路十分艰难,在极"左"思潮泛滥和"文革"灾难时期,他时常受到一些人的讥笑,说他是"傻子",有"精神病";他还被指责为追求名利,不务正业;甚至有一段时间被扣上"不问政治、走白专道路"的帽子,送到干校去集训,接受批判,进行劳动改造,研究成果的不被承认,生活上的窘困,政治上的受压抑,统统压到了他那高度近视的,一足微跛的,饱经沧桑的身体上.但是,他以惊人的顽强挺住了,凭着对事业的追求,凭着振兴中华民族的一颗耿耿爱国之心,他含辛茹苦,百折不挠,终于迎来了胜利的喜悦,他成功了,他的论文在美国《组合数学》上连续发表了6篇,得到国内外专家一致好评.

1983年10月武汉召开的中国数学会第四次全国代表大会破例邀请他作为

唯一的中学代表并在会上做报告.

1983 年 10 月 30 日晚,他从武汉跑回包头家中,兴奋异常,向他妻子讲了这几个月来的内心的感受:研究成果所受到的重视,国内外学术界给他的赞誉,他自己进一步攻关的打算.他的妻子于事后回忆说:她第一次见到他笑得这样爽朗,这样欢快,是的,他笑了,但是这已是积劳成疾的他的最后笑声,当夜凌晨,他带着成功的喜悦和未竟事业的遗憾溘然长逝了! 他逝世后,他的女儿在"悼念爸爸"的短文中遗憾地写道:"爸爸,您走得这样匆忙,……您前几年提议要照一张全家福,可一直没抽出时间,如今我们只有把这张全家福印在心上了."

由此可见,起点和终点都可以是业余的,但研究方式必须是专业的,而且必须与专业数学家保持联系.

另一个故事发生在"文革"后期,1969 年 7 月 20 日,美国阿波罗登月计划成功了,全世界各国人民都围坐在电视边怀着兴奋与期待的心情热切注视着人类在月球上漫步,美国总统尼克松发表演说:"全世界都为此欢呼,只有十亿中国人保持沉默",其实在周恩来总理的亲自指挥下,中国科学院北京天文台台长程茂立手下一位青年数学家韩念国,在很短的时间内已完成了对美国阿波罗飞船的轨道计算,使中国能追踪美国这一空前的试验计划,从而能有效地即时观测.

这时,一群从北京到农村安家落户当农民的"老三届"中学生们,经过两年的准备、学习和组织后,于 1969 年 7 月 20 日在北京正式成立中学生现代数学研究小组,以回应尼克松的演讲.他们还决定出版一份刊物《中学生》,作为联系大家思想、学习、研究的媒介与阵地,他们是程汉生、王明、钱涛、张保环、王世林,他们邀请青年数学家韩念国先生作为他们的指导教师.

1969 年,他们全部搬到了农村,王世林、王明、钱涛分别去了山西省山阴、阳高、汾阳,程汉生则落户于京郊怀柔山区,你可以想象在经过了一天繁重的体力劳动后,还有精力去研读数学与物理巨匠们的艰深的著述吗? 恐怕对任何人都是困难的,王明主动要求去干孤独无味的放羊倌而有大量时间读书,程汉生努力争取到中学去教书,脱离繁重体力劳动以便读书.王世林当时身体不好根本无法劳动,只好经常申请回京养病看书学习.钱涛在很长时间边干体力劳动边研读数学,在数学的基本训练期间,他通常是每天清早上工前抄下十道吉米多维奇(Demidovič)数学分析习题,在"汗滴禾下土"的时候冥思苦想,晚上下工回来时都已获得解答,吃完晚饭后,在昏暗的小油灯下验证白天的抽象思想,把习题解答誊写在习题本上.

在 1969 年秋收过后的冬闲,小学者们便迫不及待地匆匆返京聚会,为此程汉生把他仅有的 6 平方米住房改造为科学讨论会议厅,其实,他的改造工程也不太复杂,唯一做的事,是把一面墙涂黑作为黑板.

1963 年陈景润证明了"1 + 2"之后,王明于 1975 年到 1976 年深入学习了这

篇论文,在完全看懂之后,他写了一篇总结论文,把陈的论文提炼为十大数学分析技巧,这为他将来的博士论文做了准备.

后来五人小组的成员们都通过考试成为数学研究生,并先后在国内外获得博士学位,从事着数学、统计及计算机科学方面的科研教学或专业性工作.

请让我来告诉你善待数学

导语:美国前总统里根在 1987 年 12 月 24 日写给美国数学会全体会员的贺信中说:"今天,在我们即将跨入 21 世纪的时候,数学在商业、工业和政府部门中所直接起到的基本作用已经越来越明显了.我们国家的安全和我们在世界市场中的竞争地位,从来都没有像今天这样依赖于我们使用数学技巧的本领.我知道,这恰恰是你们所准备迎接的挑战."在数学中,既要研究自然的规律,又要编织出优美的演绎模式.最成功的创造必然在这两种倾向之间维持着最大张力;最不令人满意的是那些只在某一方面呈支配之势的作品,如风俗画或纯粹的抽象.

一位数学家说学习数学是为了探索宇宙的奥秘……正如文学诱导人们的情感与了解一样,数学则启发人们的想象与推理.

按此理,全社会应该是学数学的人多,但恰恰相反,几年前据哈尔滨工业大学数学系的老师们介绍,在招收基础数学硕士生时经常是报名的比想招的少.

奇怪的是热衷"证明"哥德巴赫猜想的人却越来越多.

可以说今天数学的应用已经渗透到了人类生活的一切领域.

你想保险吗?告诉你保险公司计算保费的精算师是数学家.

你想炒股炒期货吗?告诉你期权定价是数学家定的(为此获诺贝尔经济学奖).

你想当医生吗?告诉你 CT 的原理是数学家提出的.

你想当艺术家吗?告诉你二战期间最大的假画案是数学家裁定的.

你想当文学家吗?告诉你《静静的顿河》的真正作者是数学家用计算机判定的.

你想搞电脑吗?告诉你世界上最大的电脑公司顶尖部门由纯数学家组成.

总之在一切领域当你走到顶尖时都会与数学家相遇.

作为人类社会最重大的运动——战争,更是离不开数学.

事实上,早在二次世界大战期间,不仅有由丹齐格(Dantzig)为首的运筹学家小组发明了解线性规划的单纯算法,使得美军在战略部署中直接受益,还有以霍尔(Marshall Hall)为首的数论与组合数学专家小组则在破译日军电码和赢

得太平洋战争的过程中作出了关键性的贡献.这些都使得美国军方十分热衷于资助应用数学的研究,甚至对某些应用前景还不十分明朗的项目,他们也乐于投资.了解了这一点,如果我们再看到一些数学理论方面的论文下面标有诸如“本文部分地承蒙美国陆军(海军或空军)研究局资助”的字样,就不会觉得奇怪了.

但要注意两个倾向,一是数学绝不低层次地应用.

数学家凯泽说过:

> 数学不是算账和计数的技术,正如建筑学不是造砖伐木的技术,绘画不是调色的技术,地质学不是敲碎岩石的技术,解剖学不是屠宰的技术一样.

二是数学不是马上就有用.

台湾社会学家金耀基教授曾介绍过剑桥的一个非常引人深思的趣事,他说:在剑桥,饭后举杯有时会有这么一说:“愿上帝护佑数学,愿它们永不会被任何人所用.”(《剑桥与哥德堡——欧游语丝》书趣文丛第一辑),另外从事数学研究也是一种生活方式和选择,那就是数学家从证明哥德巴赫猜想中找到了美感,产生了愉悦,摆脱了日常生活的单调与烦闷.即数学家自己找到了一个安度余生的“游戏”.再有一种说法是人们认为的哥德巴赫猜想的求证过程体现了人们对于人类智力极限的不断追求.已故的两次荣获台湾联合报系文学类中篇小说大奖的大陆青年作家王小波,在他的时代三部曲中的《青铜时代》中描写了一个证明费马大定理的故事,其中有一句可圈点的话就是:“证明了费马大定理,就证明了自己是世界上最聪明的人.这种事值得一干.”但如果进一步追问下去,社会为什么会容忍这些人(尽管人数很少)躲在象牙塔中搞这种既不当吃又不当喝的玩意呢?这就不可避免地涉及数学的应用问题,数学家会申辩说研究哥德巴赫猜想会给数论乃至整个数学的发展产生良性刺激.而人类社会的历史又一再强化着这样一个共识,即数学对人类生活有益,至少是无害.于是一项社会契约达成,从全社会财富中取出一小部分(份额的大小随当权者对数学重要性的认识程度而定)资助那些自诩能搞数学的人去研究,成果归全社会共享,但哪一代人能受益不在契约中规定,全靠天命,而且绝大多数是卯吃寅粮,但我们的追问似乎还可以再进一步,即可问能否说说数学特别是数论和我们的现实世界究竟是怎么发生联系的吗?是什么保证了一定会应用上?

对此我们切不可再追问下去了.因为那样就会走到哲学的领域中,使我们无法作答.笔者曾和首都师范大学人文学院副院长、青年哲学家刘啸霆先生讨论过这个问题,他告诉我:对任何事物如果追究到五重问号之后必然是个哲学问题,信乎?

最后让我们这样结束这篇长文：首先，我们全社会都应该宽容这些“业余证明者”，因为他们毕竟心怀自己的理想，而且一直在努力.

第二，我们要耐心劝他们“迷途知返”，过一个更有意义的人生.

第三，要尊重社会分工，让数学家们走自己的路，我们别再瞎掺和了.

第四，或许我们应该用轻松一点的方式去颠覆那些业余者故作深沉的价值观，用搞笑的方式瓦解他们紧绷的斗志，这一点我们真应向美国人民学习，他们调侃一切，在美国纽约第八街地铁车站，有一幅涂鸦：

$x^n + y^n = z^n$ 没有解

对此我已发现一个真正美妙的证明

可惜我现在没时间写出来

因为我要坐的地铁车正开过来

学习景润好榜样

⊙后记

一、有一种优秀叫卓越

哥德巴赫(Goldbach Christian)在我国读者心目中一直是位业余数学家,还有资料记载他是德国驻俄国的公使,其实哥德巴赫是一位牧师的儿子,曾在柯尼斯堡大学学习医学和数学.1710年他像当时许多有条件的人一样周游欧洲来增长阅历.1725年他定居俄国,成为圣彼得堡帝国科学院的数学教授;1728年担任了早逝的彼得二世(彼得大帝的孙子)的宫廷教师.

哥德巴赫之所以在数学上负有盛名,是由于他在1742年给欧拉的一封信中提到的"哥德巴赫猜想".

阿西莫夫评价说:这样简单,显然正确的事实,为什么不能证明呢?这是数学家们所受到的挫折之一.本书所编内容就是数学家们克服这一挫折的艰苦历程.

"现代的国家制度,要保护平庸;尼采的超人社会,要发展个性.在现代国家里,生活一切机械无聊;在超人社会里,生活一切精彩美丽.现代的国家,是整齐的理想;超人的社会,是力量的象征!……"这是研究尼采的哲学家的感言.其实数学家的生存法则更为"残酷",因为这是一个赢者通吃的团体,只有第一没有第二,而且是没有所谓的中国第一,亚洲第一,只有世界第一,想一想比勃巴赫猜想被证明后有多少人茫然若失吧,世界最后只记住了一个"怪才"德布兰吉斯(华人数学家樊堿曾帮助过他).

在长达260余年征服哥德巴赫猜想的征途上,众位豪杰各领风骚,最后止于陈景润.

法国大数学家 H·庞加莱试图在头等的数学与次等的数学之间划清界限.他说:"有些问题是人提出的,有些问题是它本身提出的."哥德巴赫猜想是它本身提出的.这个问题提法的极端简单,结合证明的极端困难使之成为真正的问题.况且这些问题的解决又导致整个数论的发展.

只有这等大问题,才会吸引那些数学大师的目光,激发起他们的征服欲,而因为有了他们曾经或正在路上才会更吸引后来人加入这一行列,也只有在这样一场高手云集的比赛中脱颖而出才会更有成就感.所以我们学习陈景润,首先要学习他目标远大,追求卓越.

曾经的世界数学领袖,德国大数学家希尔伯特曾说:"……为了引诱我们,数学问题应是困难的,但不是完全不可解决的,免得它嘲弄我们的努力.它应是通往潜藏着真理的曲径上的引路人,最后它应该以成功地解答的喜悦作为对我们的奖励."

陈景润是幸运的,他恰好选择了一个举世公认的难题,而又在有生之年大大地推进了它.想想有多少人焚膏继晷,恒兀兀、以穷年为一个大目标耗费了宝贵的一生而终无所获,牛顿为炼丹术耗费了人生最后的四十年,爱因斯坦为统一场论白忙了后半生,美国数学家 Wagstuff 为 Fermat 大定理贡献了长达 94 年的一生,最后只证明了对 $p<12\,500$ 时成立.

印度文明的奇葩,20 世纪最卓越的心灵导师克里希那穆说:庸俗指的是爬山爬到一半,是做事情只做一半,从来没有爬到山顶,从来不要求自己发挥全部的能量,全部的能力,从来不要求卓越.((印度)克里希那穆.谋生之道.廖世德译,九州出版社,2007,245 页.)

从这个意义上说陈景润和诸位数论大师都是追求卓越之人.这一点在中国特别需要提倡.做一件事一定要做到极致,决不中庸,决不见好就收,决不半途而废,死了也要干,不淋漓尽致不痛快,这样的人生观、世界观与中国几千年的传统不相合.

也有人说咱中国人不争不抢,不急不忙,不紧不慢,13,14 世纪时数学在世界上也是数一数二,出了众多古代筹人.但今天不行了,今天中国数学可以说是大而不强.中国数学在国际上的位置,可以从 2006 年 8 月 22 至 30 日在西班牙马德里召开的国际数学家大会(ICM)的有关数据中可以看出,此次大会邀请 20 位数学家做 1 小时报告(但似乎有照顾东道主之嫌),169 位数学家做 45 分钟报告,题目涉及所有的数学领域,陈志明是本次会议唯一一位应邀做 45 分钟报告的中国大陆数学家.2002 年田刚做过 1 小时报告.那就是说第一方阵前 20 名没咱的事,第二方阵的前 169 名中仅有咱们一个位置,而陈景润当年是受到邀请在 ICM 上做报告的,而且是美国数学家代表团 20 世纪 70 年代来华访问后写成

的报告中值得一提的两大成就之一(另一个是冯康先生的有限元法),所以今天应重提学习景润好榜样,他之于中国当代数学就像鲁迅之于当代中国文学一样至今没人超越.以一般现代人的阅读量可能远远超过鲁迅,但都不会再造鲁迅,除非你再经历过他所承受的一切的一切.多数网络写手写得再多,充其量也只是个吞吐垃圾的网虫.就像知识分子,读书再多也只是个书虫,变成一只两脚书柜.如今不再产思想家,如今盛产"文字制造者"和"信息搬运工".

当今的多数数学家们随着社会大环境的变迁,早已不再把数学当成终生追求的事业和纯美的精神享受而是当成了一种普通的与其他工作没什么两样的谋生手段,甚至是为了评职称或迎合自然科学基金要求而不得已去大量炮制没多少含金量,不痛不痒的论文,篇数与SCI检索数均世界领先但就是没有大成果.所以在偶像缺失的今天,我们就是要重树陈景润这个偶像.反偶像,反偶像变得迷失自我,反偶像变得无条件无原则,反偶像变成精神奴隶,反偶像变得否定过去,否定他者,否定一切,这样的结果是我们都不愿看到的.

计划经济时代人们重出身,重门第,讲等级,信息流是由上至下传,学术明星也是由官方钦定.所以建国后没宣传过几个数学家.大张旗鼓宣传的只有华罗庚、张德馨、熊庆来、陈景润、杨乐、张广厚等为数不多的几个.到了市场经济时代开始重结果,重业绩,讲贡献,信息流也开始由下至上传递.但明星却又被影视明星,企业明星,讲法明星所占据,因为他们通俗、娱乐、易懂,所以容易受到追捧,而数学明星则再度缺失.所以在当前的环境下,我们更应重提陈景润这位学术英雄与之抗衡.

二、有一类人物叫英雄

托尔斯泰说:"只要有战争,就有伟大的军事将领;只要有革命,就有伟人."历史这样说:"只要有伟大的军事将领,实际上,就有战争."仿此我们可说:"只要有数学猜想,就有伟大的数学家,同样有伟大的数学家,一定会有大的猜想."

陈景润的目标是远大的,而且是从初中二年级时就确定了的,由于时局动荡而滞留老家的留法博士沈元先生被历史选中要到陈景润所在的中学兼职谋生.而且学工出身的后来成为南京工学院院长的他偏巧是个博览群书的人,那个时候就知道哥德巴赫猜想,当时的中学也幸运的没有受到应试教育的主宰,可以任老师在课堂上,天马行空,高谈阔论,陈景润的宏愿就此产生.

少年雨果曾立下这样的宏愿:"要么成为夏多布里昂,要么一无所成."他后来以一支笔面对第二帝国的皇帝拿破仑三世,洋溢着一种大无畏的英雄气概,其时未必不会想起少年时奉为楷模的夏多布里昂.巴尔扎克在放在卧室里的拿破仑塑像的底座上写下这样的豪言壮语:"他用剑未完成的事业,我用笔完成."

陈景润一生都在圆初中时的梦想,也用了半生的时间作准备,他从没想过

要在一块木板的最薄处钻很多孔，而是选择了一处最厚最硬的地方钻一个孔，他要毕其大功于一役，他不屑用微不足道的小成功来骗自己，他要用一个大的结果"当惊世界殊".

宋代王安石在《游褒禅山记》中有："然力足以至焉，于人为可讥，而在己为有悔.尽吾志也而不能至者，可以无悔矣."用今天的话说就是："若自己的力量足以到达却没有到达，别人有理由讥笑你，自己也应该悔之.但要是尽了最大的努力还不能达到其目的，那就没什么可后悔的了！"这正是陈景润完成"1＋2"后的心情.

虽然哥德巴赫猜想没能终结于陈景润，但是他尽力了，他把一个人一生的所有精力都贡献给了这个猜想，以至产生了一种绑定的效果，无论在世界何处，人们谈论起哥德巴赫猜想就一定会谈到陈景润，他几乎成了哥德巴赫猜想的同义词，用数学语言描述，他们是"共轭的".陈景润的价值在于重新拾回了中国人的自信心.

2005年1月26日，CCTV《面对面》栏目的王志先生来清华园访问杨振宁，王志问：杨先生，您说过您一生最大的贡献也许不是得诺贝尔奖，而是帮助中国人改变了一个看法，不如人的看法.很多年前您就开始这么说.但是我们很想知道，您是面对中国人讲的一种客气话，还是觉得真心的就这样认为.

杨振宁回答：我当然是真心这样觉得，不过我想的比你刚才所讲的还要有更深一层的考虑.你如果有20世纪初年，19年纪末年的文献，你就会了解20世纪初年中国的科学是多么落后.那个时候中国念过初等微积分的人，恐怕不到十个人，所以你可以想象20世纪初年，在那样落后的情形之下，一些中国人，尤其是知识分子，有多么大的自卑感.1757年李政道跟我得到诺贝尔奖，为什么当时全世界的华人都非常高兴呢？我想了一下这个，所以就讲了刚才你所讲的那一句话，是我认为最重要的贡献，是帮助中国人改变了自己觉得不如外国人这个心理.（杨振宁著.翁帆编译.曙光集.生活·读书·新知三联书店，2008，358～359页）

中国传统科学技术的发展在明代已是强弩之末，到了清代也没有什么大的发展，而欧洲的科学技术在这一时期却取得了长足的进步，把中国远远地抛在了后面，但中国并没有紧迫感，反而滋生出了"西学中源"之说，这更多的是出于一种心理自卫机制，但这种脆弱的自大感觉并没有事实支持，数学这一分支我们确实曾被世界远远甩到了后头，从陈景润起刚开始有了单项的领先，随之又是低谷，用丘成桐先生话说："当年作家徐迟用生花妙笔描写陈景润的工作，使他成为全国英雄，做成错误的印象，以为数论的目的在解决一、两个孤立的猜测，时至今日，中国数论学家连世界数论主流的文章都看不懂，不只落后十数年了.但是中国新派出的留学生却很快地学习了西方的方法，而且出人头地.可见

问题不在中国人的智慧,而是老派数论学家没有将年轻人引导到正确的方向."这些议论当然不乏门第之见,但大体正确.

黑格尔说过:"证明是数学的灵魂."几千年来都是这样,有谁能够对此提出挑战?没有.我们能做的只有一件事:把什么是证明搞得更明白;去"找"出一个又一个的数学命题并且一个又一个地加以"证明",谁能证明更重要的命题谁就是胜利者(齐民友.数学与文化)在数学领域是"丛林法则"只承认强者不同情弱者,谁证明了大猜想,开创了大理论,建立了大体系谁就是英雄.从这个意义上说陈景润证明的"1+2"是一座至今没人能逾越的高山,我们有许多结果关起门在家里炒的挺热闹,但在国际同行中却没有丝毫反应,包括最近炒得很凶的庞加莱猜想的优先权之争,也在国际数学界一边倒的好评佩雷尔曼声中不了了之,而陈景润的传奇却一直在流传.

徐光启在译完欧几里得《几何原本》前6卷(1607年版,底本是德国人克拉维乌斯(C. Clavius)校订增补的拉丁文本 Euclidis Elementorum Libri XV(《欧几里得原本15卷》1574年出版),后9卷是英国人伟烈亚力和李善兰合译的)时有一句话:"续成大业,未知何日,未知何人,书以俟焉."

哥德巴赫猜想这台大戏还没落幕,从潮流上看,解析数论似乎早已不再是主流(潘承彪教授曾跟编者说怀尔斯证明费马大定理用的手法也有解析数论的手法,不知真否),哈代,维诺格拉多夫,陈景润已相继谢幕,在下一位主角还没登台之前,观众心中的英雄还是陈景润.

思想家黄宗羲曾说:"大丈夫行事,论顺逆不论成败,论是非不论利害,论万世不论一生."

陈景润的选择颇有大丈夫气魄,加之华罗庚先生的高瞻远瞩,论当时中国的数论力量,根本不具备冲击哥德巴赫猜想的实力,但这样的大手笔和将优势兵力集中于狭窄的研究领域的打法(波兰学派的崛起也是同样做法)居然在解析数论这个当时的主流领域取得了令世界瞩目的大成就,为中国数论界赢得了巨大的国际赞誉,像陈景润他们的这种大眼界,大手笔今天已越来越少见,相反,对没有风险的小打小闹感兴趣的人越来越多,所以从这个意义上说,景润是个好榜样.

三、有一种状态叫精神

契克森米哈赖的《快乐,从心开始》(原名为 Flow: the Psychology of optimal Experience.天下文化出版公司,1993.)是一本奇书.据通读了此书的社会学家郑也夫介绍此书时说:商人们说消费能带来快乐,而契氏在快乐的来源上提出了完全不同的看法.契氏说,精神上无序,相当于"精神熵",是很糟糕的状态,烦躁,空虚不说,耗能还很高.反熵就是为自己的精神建立秩序,手段是找到自己

的目标(而不是做社会目标的傀儡),专注于这个目标,全身心地投入,达到浑然忘我,并因为投入其中而屏蔽了世俗生活中琐事的打扰.他称这种状态为"心流".比如,外科大夫操刀,陈景润解题,健儿攀岩,都进入到无我的状态.这状态是愉悦的,甚至比无所用心的烦躁耗能少,因为它是有序的.

在中国即将进入后工业化社会的今天,原来从未预料到的社会问题层出不穷,特别是人们的精神层面的东西.农业化社会男耕女织大家都在为生存而努力,日子艰苦而精神充实,进入到工业化社会终于可以衣食无忧了,大家又开始疯狂的积累财富.因为社会公认的法则是以拥有财富的多少决定个人成功与否.社会走到今天人们终于发现其实丰富的精神生活和追求才是值得拥有的,但这如同音乐和绘画一样需要长期的训练才可能有效,并且一旦入门尝到乐趣,人生便会从此不同.数学家工作的强度是很大的,但他们也多拥有一个充实长寿的一生,像苏步青,陈省身,哈达玛等90多岁的老寿星大有人在,而且这长寿并不受物质条件影响,越艰苦还越有精神.

著名数学家陆启铿教授在一篇纪念华罗庚先生的文章中指出:在抗日战争时期,西南联大的教授们的物质生活条件之差令人难以想象,但那个时候出了不少著名的科学家,华罗庚,陈省身先生许多重要的工作都是那个时候完成的.这需要一股劲,一个优良的学术传统.相反的,有了一个较好的物质生活环境,有些人便有可能不甘过做基础研究的清贫生活,转而寻求赚钱较多的职业,这对基础研究来说是一个危机.

所以陈景润带给我们的是那种独居陋室,青灯黄卷,物我两忘,自得其乐,躲进小楼成一统的那样一种精神状态和境界,在今天重提这些大有必要,因为在不知不觉之间风气已大变,清代学者章学诚说:"且人心日漓,风气日变,缺文之义不闻,而附会之习,且愈出而愈工焉.在官修书,唯冀塞责,私门著述,敬饰浮名.或剽窃成书,或因陋就简.使其术稍黠,皆可愚一时之耳目,而著作之道益衰.诚得自注以标所去取,则闻见之广狭,功力之疏密,心术之诚伪,灼然可见于开卷之顷,而风气可以渐复于质古,是又为益之尤大者也."(文史通义.卷三.)

矫枉必须过正,陈景润那种极端认真的精神就是治疗的良药,林群回忆陈景润,为了验证一个高阶行列式的值是否真的为零,曾用了两个月的时间,手算几十万项,只有这种近乎偏执的认真才使他能够发现谢盛刚那篇关于哥德巴赫猜想的文章的一个关键性的引理有计算错误,更可贵的是他能勇于指出,在你好,我好,大家好的今天,这种直言近乎绝迹(《数学研究与评论》早先还有点批评文字.近些年不知为何也没了).

对当前的大学教育有人批评为:今日的大学正汲汲于谋生之事,蝇营于应对之策,那种让人卓然独立的学术品格和精神气质虽然不是荡然无存,但也所剩无几.(汪堂家.时宜的大学.书城.2000年第4期.)

所以我们学习景润,绝不仅仅是学习他刻苦钻研,努力攀登科学高峰,还要学习他的品格与精神,以景润为镜我们可以照见自己以及时代的许多毛病和问题,这些我们大家都曾共同拥有的也共同感到弥足珍贵的东西在悄悄地远离我们,我们怀念景润是因为他将我们带回到那个奋发向上、诚实、勤奋、敬业、学科学、爱科学的20世纪80年代.就像老一辈人都怀念西南联大时期一样,中年人对以景润为学习榜样的20世纪80年代也是记忆深刻.

在郑也夫先生为《北大清华人大社会学硕士论文选编2002~2003》一书所写的前言中指出:一个社会中众生们不求实,不敬业,必然是它的精英率先告别了求实和敬业.只要一个社会中精英们的精神还在,不信东风唤不回.换言之,要改造一个社会的作风.首先要从它的精英开始.不然就是伪善,就是奴隶主的哲学,就是注定不会得逞的痴人说梦.

郑也夫还指出:行为的动机和社会意义是一而二、二而一的事情.我们正统的意识形态过于强调社会意义、极大地忽略了作为当事者个人兴趣的动因.爱因斯坦从事相对论研究,陈景润从事哥德巴赫猜想,首先都是因为他们喜好,他们甚至不知道那结果将如何造福人类.当然他们知道科学同人类的福祉已结不解之缘,但是他们做那桩研究不是完全从利他出发的,他们自己也从中获得了愉快.相反,如果完全从利他出发,个人并无兴趣,是绝不可能在艰难的科学探索中有所发现的.因为当事者的兴趣是高度自我的,因为他们从过程中获得了愉快,在宣传中将他们的动机披挂上爱国主义或造福人类的冠冕其实是勉强的.另一方面,一个人的能力越强,他的正当行为中越会有良好的"外部性"流溢到社会中.但是那"外部性"不是他的全部动机,有时甚至不是他的主要动机.(博览群书.2004年第9期.)

在西方的劳动经济学中一直就有"快乐工资(hedonic wages)"这个概念.有些行业的工资比教授还高,比如,夏威夷的码头工人,用劳动价值论是解释不了的.在当代的劳动经济学看来,有些工种没有人愿意干,因为太脏太累太不体面,所以老板必须要提高工资弥补工人在快乐方面的损失,他才接受这份工作.而数学家特别是像陈景润这样的优秀数学家,他从中得到了莫大的乐趣,所以别说工资少他干,不给工资恐怕都干.

四、有一种希望叫理想

哥德巴赫猜想对大多数中国人来说是一个理想主义的音符.对这种理想的解释可以用一首美国的流行歌曲的歌词来诠释:

> 那是一种难以割舍的渴望/当强烈的渴望出现时/任何人都会对自己说/我不想放弃/虽然我不想做/我做不到的事情/我知道这份渴望有

多么奢侈/可是当它出现的时候/你无法抑制/无论如何/我知道我有这份渴望/我更渴望去实现它……

身体瘦弱的陈景润无疑是一个理想主义者,它的理想就是超越维诺格拉多夫,而承载着这一理想的就是哥德巴赫猜想的证明,欧拉试过,哈代试过,维诺格拉多夫也试过都没能最后成功,所以一旦自己获证,那岂不是超越了所有的数学前贤.

这本书是献给"理想主义者"的书,是一本脱俗之书,社会学家称,每个社会都有一个基本梦想,这种被他们称为"社会事实"的东西独立于个人愿望,它强迫每个人扮演着自己的角色.如果你不推崇这个基本梦想,你就是傻子,遭社会排斥.现在的社会梦想是成功梦、发财梦、榜上有名梦、娶得美人归梦,而20世纪80年代的社会梦想是成为科学家梦,是证明哥德巴赫猜想梦.

理想是对未来事物的想象或希望,多指有根据的、合理的,跟空想、幻想不同,一个人总会是理想主义到现实主义转化中的人.一句西谚翻译过来大致是说:如果一个人20岁时,他不是理想主义者,那他一定是个庸人;如果他到了40岁时还是理想主义者,那他一定是个傻瓜.其实庸人是坚定的,而理想主义者是犹豫的,因为他缺少同类,缺少支持,同时世俗的势力过于强大.

中国青年女导演彭小莲在纪念日本著名纪录片导演小川绅介时说:"事情在不断变化着.消逝、展现、又消逝,又展现……我不断地向自己提问,不停地寻找答案,可是到最后……我还是问自己,这都是为了什么?也许,过去我们被穷困压迫得太喘不过气了……回头看去,我们很容易就被欲望和物质重新包裹起来.这是一个灾难.我们的智能似乎越来越低,一切都简单到用金钱就可以来裁决和判断事物,只有想到这里的时候,是多么怀念小川,我想,他要是活着,一定会告诉我该怎么去做的."

其实每一个领域都不乏理想主义者,我们只需要彰显他们,使他和他的同类不再孤单,也使社会保持理想与世俗两极的张力,使之平衡.彭小莲说:"小川一直在和自己挑战,他总是对自己感到不满足,他不断地进取着,问题是他选择了一条艰难的道路,理想主义道路.现在,我不是要在这里清算理想主义的价值问题,不是!我是在想,我们自己今天的生存状态,多么像那个时期的日本.我似乎就在这个时期的恍惚中迷失了方向,我感激小康生活,政治运动的硝烟散去了;政治运动中惶惶不可终日的感觉不复存在;但是,四处弥漫着金钱的价值,同样让人害怕."

所以在当前中国很有必要重提理想主义.在所有人都在提成本和机会成本的经济社会中像陈景润这样为证明哥德巴赫猜想不计成本,不计代价的理想主义典型有自身的价值.虽然弗里德曼(不是那位著名经济学家.而是美国的一个

记者托马斯弗里德曼)说“世界是平的”,但全社会的精神高度不能是平的.我们虽然应该学习陈景润的精神,但并不能要求人人都像陈景润.要保持价值观的多元性.

理想,在任何时代也只是一个符号,什么东西都可以套上“理想”两个字来加以掩饰,但我们一定要看到“理想”后面的代价和结果.

人总是在寻找意义和目的,理想是人性的升华,它使人能高于自己.但理想只是人脑在一时一地的产物,过于夸大意识的主导作用,就违背了唯物主义.也许正因为这点,理想主义和唯心主义可以合用一个英文词.人们需要理想,但一旦执著过了头,理想主义就僵固了:一是可能把理想强加于现实,二是可能把理想强加于他人.这不由使我想起孔子说的“己所不欲,勿施于人”,这双重否定似乎很被动,但实在是大智慧.倘若反过来变成双重肯定“己所欲,施于人”,听上去好像更积极,后果却不堪设想,一个人的理想难保不成为别人的噩梦.(彭小莲.理想主义的困惑.华东师范大学出版社,2007.)

五、有一种数学叫纯粹

从19世纪初开始,数学严格性的倾向使它越来越成为数学家的游戏,而不是一般人取乐的领域(P.D.库克.现代数学史).哥德巴赫猜想在中国的知名度远远超过世界上任何一个国家甚至于哥德巴赫的故乡德国和世界数学中心美国,这对于中国这样一个崇尚实用的国度是非常难以想象的,陈景润们在历次政治运动中无一幸免地被批为“脱离生产实际,无法服务于人民群众”.这一批判使得数论这个数学中最纯的分支无人敢搞,因为很难应用,于是华罗庚搞了优选法,闵嗣鹤搞了石油地质数字处理,潘承洞搞了扁壳基本方程,王元搞了混料均匀设计,越民义搞了运筹学与优化.

美国数学家I·里查兹说:“好的定理总是对以后的数学有广泛影响的.这仅仅归功于这个定理是真的这一事实.既然是真的,必有其为真的道理;如果这个道理隐藏得很深,那就常常需要对它邻近的事实和原理有更深入的理解.正是这样,数论这位‘数学的女皇’才成为数学其他分支中许多工具的试金石.事实上,这就是数论影响纯粹数学和应用数学的真实方式.”([美]L.A.斯蒂恩.今日数学.马继芳译.上海科学技术出版社,74页.)

翻开陈景润的论文目录,我们没有发现任何应用的痕迹,从这个意义上说陈景润是一个纯粹的数论学家,而且是至纯的,他坚信他的研究是有价值的,不论能否应用.

陈省身先生做过一个演讲,他开篇就举了个例子,他说欧氏几何里曾经提出一个命题,即空间当中存在着五种正多面体,且只存在着五种正多面体——正四面体,正六面体,正八面体,正十二面体,正二十面体.在欧几里得提出空间

中的这种可能性后，人类在现实中——无论是矿物的结晶还是生命体，从未见过正二十面体，只看见过其他四种正多面体.在欧几里得去世两千年后，人类在自然界中才发现了这样形状的东西.无论它有用没用，总算遇上了，有用成为可能了.我们能想到现实中的那个正二十面体是什么吗？就是SARS病毒.只不过它经过变异，每个面上长出了冠状的东西，陈省身接着说，多数数学知识当下不能成为生产力.物理学和化学使用的数学知识是一两百年以前的数学成果.有些数学成果一两百年后才变成了生产力，有些已经上千年了，却依然没有变成生产力.起码，它的产生和应用之间有一个时间跨度.而有些数学知识可能永远也转化不成生产力，但它可以服务于学科本身，帮助该学科内其他研究者有所发现，而后者的成果或许将来被用于实践.

其实真正的智者从来就不会问数学能够做什么，而是坚信数学是一种强有力的训练，他们相信，在不完美的现实世界中，这种训练能够让人类的心智去理解真实的理念世界，例如古希腊人他们的数学不崇尚实用，但是他们认为他们的建筑和艺术应该符合数学美的法则，为此他们发现了“黄金比率”，并用此来设计各种建筑，如帕特农神庙.对于一个理论有无应用这个问题在社会科学中也有，郑也夫2005年6月1日在华中科技大学的演讲时说：“无用之学从来是知识分子的传统.知识分子在中国古代的前身是巫，祝，卜，史，是占卜的，搞宗教活动的，做记录的.当时，他们的作用似乎不太要紧，他们在打仗前为人占卜似乎没有士兵的长枪厚盾有用，可正是在这些人的占卜和记录中，完成了一个民族文字的产生.当初似乎最无用的东西，产生了最强大的后果.正是这些当时没用的人为后来社会的发展奠定了潜能和方向.”(郑也夫.抵抗通吃.山东人民出版社，2007，222页.)

拿数论来说，这个昔日最纯的数学分支也逐渐有了意想不到的应用，从密码学到航天飞机训练的景色模拟，从通信理论中的纠错码到“上帝不掷骰子”的素数解读，但哥德巴赫猜想还没见到应用迹象，对此郑也夫有一番见解，他说：“陈景润是一样的事情.哥德巴赫猜想还未解决，就是解决了，你能告诉我们：它何年何月怎样造福人类？不知道你为什么还要干？第一辜负了人民对你们的养育，第二辜负了你自己的天赋，产生一个如此高智商的人不容易，这岂不是极大的浪费？”(郑也夫.抵抗通吃.山东人民出版社，2007，215页.)

从这个意义上说，陈景润又是一个对自己倍加珍惜的人，尽管在普通人眼里他为了证明哥德巴赫猜想夜以继日，耗尽了心血，但他知道自己的使命，知道自己的核心价值所在，也知道自己的真正需要，就像精神分析之父弗罗意德在患口腔癌动了17次手术后仍然每天抽十棵雪茄一样，因为不如此，他身体再好都没有意义.

陈景润对此深知，所以他才能选了这个意义重大的猜想作为自己的主攻方

向.A. Renyi说:“如果你想要做数学家,那么你必须意识到,你将主要是为了未来而工作.”

像陈景润那样集中近20年的时间攻一个大问题也只能是在当时的环境中,现代的中国早已不容他这样“从一而终”,我们需要研究面广,成果多的研究者.这是因为西方的学术体系已经有了很细的分工,一个小的研究领域就可以养活一批研究人员,但是在中国,任何一个细小问题的研究都无法养活一个研究人员,你必须铺开了研究,才能活下去.

陈景润的另一个幸运之处是在那个时代像哥德巴赫这样孤立的大猜想还是数学界的主流而“现代数学主要对结构感兴趣,被选为实现这些结构的那些对象仅仅是作为一般对象生长的基础”(H. Hermes).所以近代荣获菲尔兹奖的那些数学家都是因开创了新领域,建立了新结构,发现了新联系而获奖,即使像怀尔斯和佩雷尔曼证明了古老的费马猜想和庞加莱猜想也是综合运用了多种理论并进行了创造性的改进从而大大推进了整个分支的研究水平,而不仅仅是孤立地证明了两个定理.打个比方,现代重视的是十八般兵器的综合运用和新武器的研制,而陈景润是将一种兵器玩到了出神入化,举世无双,并且用它杀死了敌军的一员大将.但现在更讲究不战而屈人之兵,这一套不是我们的强项.

李约瑟在《中国科学技术史》中提出了三个问题.其中第一个问题为:中国传统数学为什么在宋元以后没得到进一步的发展?

确实中国古代传统数学经宋元时代达到了高峰以后,从明初开始,除了适应当时商业发展需要的珠算得到广泛的应用外,原来以筹算为中心而发展起来的理论数学就完全停滞不前了.对此李约瑟自己给出的答案是有两个原因.第一个原因是中国古代传统数学本身存在的弱点,用日本数学史专家三上义夫等人的说法是缺乏严格求证,形式逻辑没有发展起来和缺乏记录公式的符号方法.除此之外,李约瑟还找到了更深层次的原因,如“在从实践到纯知识领域的飞跃中,中国数学是未曾参与过的”,“‘为数学’而数学的场合极少……他们感兴趣的不是希腊人所追求的那种抽象的,系统化的学院式真理”.

著名拓扑学家王诗宬教授在北京大学做报告时说:“纽结论本身,是由物理学的需要而生产的,后来因为它不能解释物理现象,物理学家就把它忘掉了,它就纯粹地变成了一个理论的东西.数学家很愉快,尽管没有任何应用,数学家仍孜孜不倦地做,耗费自己的时光.在做了很多年以后,终于在生物学和化学中有了应用……所以说数学理论和实践联系的表现形式是丰富多彩的,它可以是简单、直接和周期的,也可以是深刻和难以预测的.”从这个意义上说也许不应将数学人为地分为纯粹数学和应用数学,因为标准很难掌握,比如数论一定认为是纯粹数学,但陈省身教授在《怎样把中国建为数学大国》中指出:“数学中我愿把数论看做应用数学.数论就是把数学应用于整数性质的研究.我想数学中有

两个很重要的数学部门,一个是数论,另一个是理论物理."(科技导报.1992年第11期)

六、有一种思绪叫回忆

《新周刊》曾用脱口而出的50句口号讲述共和国史.比如1949年是:中国人民站起来了;1950年是:抗美援朝,保家卫国;1966年是:造反有理;1968年是:广阔天地大有作为;1971年是:友谊第一,比赛第二;而1977年就是:哥德巴赫猜想.

在北京大学举办的一次王诗宬教授主讲"从打结谈起"的讲座上,主持人是这样开场的:"在20世纪的100年里,中国人跟数学比较亲近的是70年代末.那时候有一位大数学家,他教给我们哥德巴赫猜想……陈景润出来以后,成了很多人选择学业和职业的一个分水岭.这之前,肯定好多人是想当诗人的.因为70年代之前,那时候当诗人谈恋爱比较容易,比较吸引女青年.但是,过了1977年以后,好多人想当数学家了.六小龄童在接受《新京报》记者采访时,对'你记忆中哪些人是80年代的风云人物'的提问的回答是:陈景润."(新京报编.追寻80年代.中信出版社,2006,228页.)

当时的大中学生尤其以陈景润为学习榜样,中国著名控制论专家郭雷曾撰文回忆那段时光:"在1978年刚入山东大学自动控制专业学习时被安排到数学系感到很茫然,后听了张学铭教授介绍的控制论的历史后才明白控制论是应用数学的重要分支."于是在陈景润精神的激励下,立即投入了紧张的学习.

在本书后半部分的回忆文章中多次提到了当时陈景润在广大青少年心中的这种榜样形象.

美国精益针灸医疗服务公司总裁李强在《难忘的高考岁月》中回忆道:

"1978年3月,中共中央举行了振奋人心的'全国科学大会'.邓小平提出'科学技术是生产力'的论断;叶剑英发表了一首诗,后两句是'科学有险阻,苦战能过关'.学校把它写在进门处的大石碑上,以鼓舞我们的学习热忱.报纸、电台、电视对知识和知识分子做出很高评价.湖北老作家徐迟的报告文学《哥德巴赫猜想》对数学家陈景润在研究'1+2'上的不懈努力做了生动描述.还有对其他科学的广泛宣传,像数学家华罗庚、杨乐、张广厚,化学家唐敖庆,物理学家钱伟长、钱三强等,给了我极大鼓舞."(陈建功,周国平.我的1977.中国华侨出版社,2007,91页.)而且当时的社会风气和大背景有利于这种榜样的产生.因为从那时起人们又开始喜欢读书了.

《光明日报》社《文荟》副刊主编韩小蕙在回忆当年的情形时写道:

"……多少年没见过这种书了,一开禁,人人都兴奋得像小孩子买炮仗一样,抢着买,比着买,买回家来,全家老少个个笑逐颜开,争着读,不撒手,回想起

那日子,真像天天下金雨似的,舒心,痛快!"

时势造英雄,任何一位学者要想成为人们心目中的英雄和榜样,那么他一定是身处一个与其追求相符的伟大时代,时代更迭,物是人非.很久以前,伟大的科学历史学家乔治·萨顿说过:"科学迟早要征服其他领域,把它的光芒洒向迷信与无知猖獗的每一个角落."这是何等雄心,到了21世纪,人们似乎对科学有些冷漠,随口就说"不过如此".同样的原因陈景润在人们心目中也今非昨日,曾做过Zhongo网的CEO的牟森,在回答《新京报》记者的提问时曾说:"上高中的时候,流行的是'学好数理化,走遍天下都不怕',大家崇拜的是(证明)哥德巴赫猜想式的英雄."(新京报编.追寻80年代.中信出版社,2006,105页)而今天风气大变,人人开始谈"股"论"金",昔日英雄已被边缘化.

曹建伟在小说《商人的咒》中说:"英雄往往只有两个结局:一是遭遇扶植者的假赏识与真遗弃;二是遭遇普通人的假崇拜与真妒忌……"(作家出版社,2007)虽然分析精辟但我们宁愿相信这不是真的,但陈景润作为一个英雄却是个例外,他得到了真赏识和真崇拜.

有人在论法国的当代文学时,说有两种文学并存,一种文学"读的人很少,但谈的人很多";另一种文学"读的人很多,但谈的人很少".其实,今人面对21世纪的数学,也有类似的情况.哥德巴赫猜想就是一个搞的人很少(甚至没有)但谈的人很多(几乎全民)的一个数学猜想,甚至职业数学家都用此举例.获2007年第四届华人数学家大会晨兴数学金奖的浙江大学客座教授汪徐家在接受《科学时报》记者访问时说:"陈景润解决哥德巴赫猜想中的'1+2'时,并不是一到华罗庚那里马上就解决了这个难题.而是在那的学术环境中慢慢学,增加自己的知识,增加自己的功底,先解决'1+3',再解决'1+2'."(汪徐家.数学的高峰,我还在攀登.科学时报,2008.2.26.)

七、有一种风格叫另类

著名电影导演张艺谋曾说过:"观众的口味并不如我们所设想的那样单一和肤浅."(令狐磊.保卫张艺谋.新周刊.2004年192期).

这本书应视为科普与人物传记之间的一个集子,在我们的印象中科普著作是用非严谨语言写给不求甚解的门外汉看的,但法国大学出版社出版的大型科普丛书《知否?》彻底地颠覆了我们的这一观念,那套丛书至今已出版了3 700多卷,是法国科普著作方面的杰出代表,它覆盖了几乎所有的领域,成为法国大众文化修养的一部分,每卷的篇幅都是128页,均为所涉及领域内的顶尖专家撰写,书名永远不变,但内容却会围绕主题随学科前沿的变化和需要而不断更新,与本书相关的《素数论》就是其第571卷,由Emile Borel写就已是第三版.用刘勰的话说:"才难,然乎? 性各异禀.一朝综文,千年凝锦.馀采徘徊,遗风籍甚.无曰纷杂,皎然可品."

与发达国家相比我们的距离实在是太大了,就数学而言,中国人最知名的猜想哥德巴赫猜想,我们所作的普及工作也远远不够,我们需要介绍陈景润之前的工作,历史的状况和中国解析数论专家群体的贡献,我们需要多样性,多角度,正如在2000年的一篇文章里,著名经济学家布坎南指出一个伟大社会需要一种能够鼓励一切人在一切可能的方向上进行创新的制度或者宪法,我们这种编排方法可能不是最佳但它比较全面,特别适合那些对哥德巴赫猜想有狂热追捧的读者,据我们观察在当今社会不读书或只读有用之书的表层下,爱书之人还大有人在.并且,他们中将世人皆知的无用之书视为救命稻草者多矣.所谓"饥读之以当肉,寒读之以当裘,孤寂而读之以当友朋,幽忧而读之以当金石琴瑟".

《长尾理论》的作者克里斯·安德森(Chris Anderson)最近又抛出新论"免费经济".他指出:"我们正在试图发现一些窄众的需求,特定的需求和利基(这是一个泊来品,是一个新词,英文是Niche,指更狭窄的确实某些群体.这也一个小市场,并且它的需求没有被服务好.或者说有获利的基础)的需求.因为在这些需求方面,人们的主动性是最高的——那些才是他们真正关心的东西,我们还发现,人们对大众产品的主动性相对更加表面化一些.而对于利基产品的主动性要相对深入,人们为了到达小众读者所付出的代价,要高于到达大众读者的代价.在这个基础上,有些东西你可以卖更高的价格."这也是本书的定价原则.对于编者来讲这当然是本好书.尽管对好书的标准见仁见智,福楼拜认为:评价一本书,要看它能否大声朗读.能就是好书,否则就一文不值,因为"没有节奏",注定这本书是不能大声朗读的,甚至小声也不行.所以不能用传统方式来评判,我们只能期待读者用自己的金钱进行投票,买的人多自然就好.

数学家常常为"什么样的数学问题才是好问题"而争论,2005年5月24日,传出一条爆炸性的消息,在巴黎法兰西学院的演讲厅,著名数学家阿蒂亚(M. Atiyah)等人宣布,对7个悬而未决的数学"新千年难题"(Millennium Problems)每个提供100万美元的奖金,奖金由一位富有的数学爱好者克雷(L. Cluy)提供,时间不限,但本书主题哥德巴赫猜想不在其中,因为它没希望.

这是一本注定不会畅销的书,因为才女洪晃说:"看看现在的'畅销书排行榜',排在前面的都是'How to'类的书籍,现代人看书的目的性太强了.读书不能有目的,学习才是有目的的.学习是为了提高技巧,而读书是为了提高素质."

"数学书是提高人的理性素质的最佳读物.加里宁在论共产主义教育时写道:"人的一生只要学好三门课程就行了.一是本国语言,二是数学,三是体育."可见数学之重要.仅仅在几十年前,我们还可以从劳动中学习,从生活中学习.而在今天,我们城市里的人越来越多地从书本中学习,读书成了新一代城市人的生活方式,应试教育和沉重的功课使城市的新一代变成了由书本造就的新新人类.但此书非彼书.

八、有一种感情叫情结

最后要说说编此书的私人动机和情结.

克尔恺郭尔说过一句话:"所有的人认为重要的事情,在我看来一钱不值;所有人认为不重要的事情,在我看来性命攸关."价值是最私人的和不可捉摸的.弗兰克·斯托克顿(Frank Stockton)的一篇名为《王后的博物馆》的小说成功地诠释了这一点:一位王后最完整地收藏了世界上最令自己感兴趣的东西:纽扣孔.普通的纽扣孔,别致的纽扣孔,刺绣边的纽扣孔,带钩边的纽扣孔,皮制的纽扣孔等.各式各样,林林总总.为此,王后特地修建和装饰了一座富丽堂皇的博物馆.她认为,这样,他所有的臣民便可以和她一起欣赏这些美妙的收藏了.但是,臣民们并没有像王后想象的那样,成群结队地参观王后的博物馆,于是,王后颁布了一条皇家法令,下令所有的臣民必须定期地去参观王后的纽扣孔博物馆,如有违抗命令者,一律送往监狱.让王后意想不到的是,全体臣民,无一例外地选择了走进监狱.

在与一伙触犯法令的"歹徒"及时地调解之后,可怜的王后才发现,原来并不是每个人都能够用同样的方法来评价某件事物.她的某些臣民认为,钓鱼竿是世界上最重要的东西;而其他大多数人的兴趣则在于骏马,或在于打扑克牌,或是鲜花.最后,王后不得不意识到,那种期望其他人也和自己一样,拥有完全相同的价值观系统的愿望既不现实,也不合理.

同样我们也清醒地意识到数论、哥德巴赫猜想、陈景润是我们的最爱.但是,其他人未必!

在本书即将付印之际,曾反复追问自己为什么要做这个?为什么喜欢做这个?为什么必须要这些?思考良久,没有答案.于是便落入中式俗套曰:命运使然.李泽厚对命运有一个浅显的解读,他说:"命也者,不知所以然而然者也."即人力所不能控制,难以预测的某种外在的力量,前景,遭遇或结果.所以,可以说,"命"是偶然性."不知命,无以为君子也",就是说不懂得,不认识外在力量的这种非可掌握的偶然性(及其重要),不足以为"君子".就人生总体来讲,总被偶然性影响着,支配着,现代社会生活更是如此.(李泽厚.论语今读.三联书店,2006.)

当做一件事从任何功利和世俗角度考虑都是费力不讨好的,而你偏偏要做,而且若干年一直想做,最后终于做了,你就不得不承认,这是一种命运的驱使.一提起哥德巴赫猜想,几个蒙太奇镜头立刻映射出来.

1978年2月17日,边陲哈尔滨还很寒冷.在哈尔滨市教育局工作的父亲那晚很晚才回来,当时上初中二年级的编者已睡,被父亲叫起来,从黑色人造革(那时流行)公文包中拿起一份带着屋外寒气的报纸《人民日报》.上面用整版刊登了徐迟先生的报告文学"哥德巴赫猜想",30年后的今天编者依然记得当年

拥被而读的兴奋.也就是从这一天,中国的老百姓第一次知道了这个数学猜想和陈景润,同时也在千千万万青少年心中留下了深深的印迹,从那以后,我便开始留意一切有关哥德巴赫猜想和陈景润的文字,梦想能与它建立起一点联系.

直到今天我才知道这篇报告文学的刊登并不是偶然的.2008 年 3 月 13 日《科学时报》刊登了中国科学院院长研究组撰写的"全国科学大会始末"中披露.这是人民文学出版社为了配合科学大会的召开特约请著名作家徐迟深入中国科学院采访后撰写的.在本文集中也收录了这篇.

第一本收集到的小册子便是天津人民出版社出版的王连笑老师编写的《从哥德巴赫猜想谈起》,1978 年 12 月第 1 版,印数是 20 万册,定价 0.19 元.多年以后王连笑老师到哈尔滨讲学,我和班主任老师沙洪泽一同去拜访了他,谈及此事,感慨颇多.

1988 年已经回到哈尔滨师专数学系任教的我接受了一个任务——陪同我的老师尚琥去北京治疗骨癌,尚老师是一位北京知青,笃心治学,当时已在模糊拓扑群领域崭露头角.在去京的火车上,我们谈起了哥德巴赫猜想,他告诉我说北京专门有一个地方卖"盗版"的英文版世界数学名著,记得是在锡拉胡同 2 号,后来在他住院的时候我跑去了几次.意外地买到了《维·诺·格拉多夫选集》,里边收集了他的那篇著名的关于奇数哥德巴赫猜想的论文(是从俄文译成英文的).

其实现在想起来当时颇有些"民科"心态,总想将自己与这么一个伟大的猜想之间建立一丝一缕的联系,在当时完全是一个梦想,但正如林语堂所说:"梦想无论怎样模糊,总潜伏在我们心底,使我们的心境永远得不到宁静,直到这些梦想成为事实!"

1989 年 10 月编者新婚旅行又到了北京,去了长城、故宫后又逛起了旧书店,在王府井附近的一个旧书店中买到了单墫教授的《趣味数论》(中国青年出版社),单墫先生师从王元院士,当时在数学竞赛界的声望又是如日中天,他与王元先生共同撰写过一篇关于哥德巴赫猜想的文章《A conditional result on Goldbach problem》(后来才知),但在《趣味数论》一书前言中他说:"哥迷们不要将论文寄给他.他没有资格评价如此伟大的工作."后来与单墫教授有了一些交往.1995 年去南京他家中拜访过,也相互赠送过各自出版的书,就本书的编写编者也曾去函与单先生希望能求得一个序,但单先生婉拒了,表示他的一贯立场,即不够资格,同时也强调了现在解析数论并非主流.但我并没被说服仍"一意孤行".

1993 年编者调至刚刚成立不久的哈尔滨出版社做数学编辑,一直想做一本关于哥德巴赫猜想的书,苦于没有契机,直到 1996 年 3 月 19 日在开会途中于重庆惊闻陈景润先生逝世.听到这一消息,出于职业的敏感我立即赴京组稿,希望能有人写一本陈景润传,到了北京找到中科院数学研究所,接待我的是时

任科研处处长罗声雄教授和人事处杨莎莎女士，当被告知已经有两个人在我之前已经开始运作了，一位是陈景润的秘书李小凝，一位是新华社记者王丽丽，倍感失望，这本书就是后来见到的王丽丽，李小凝著《陈景润传》(新华出版社)这次未果之后，我又在教辅书的“泥潭”中滚了2年.

1998年我又决定重新组织一套中外数学家丛书，请辽宁师范大学的杜瑞芝教授任主编，杜教授是我国著名数学史家梁宗巨先生的弟子，早年专业为微分方程，后转攻国外数学史.我们是在1990年《数学辞海》编委会结识的.当时她提出要我陪同到北京去拜见一下数学史界前辈.我们一起拜访了中国科技史专家当年94岁高龄的钱临照，中科院数学所所长李文林教授，和外国数学史专家袁向东先生.当时就住在数学研究所招待所，据所里人说陈景润当年就住在这里，楼道里昏暗、简陋，初冬还很寒冷，我体会到了一点陈景润当年生活的气息，我俩还一起找到了陈当时住的小屋，可惜早已改作他用，没有开门.

后来因出版社完全转向文史，对数学不再重视，此套丛书仅出了中国数学家4本传记便停止了，故对杜教授一直心存愧疚.

2008年第23届全国中学生冬令营在哈尔滨举行，潘承彪教授代表中国数学奥林匹克委员会出席，在午宴上笔者与潘先生邻座，遂谈起哥德巴赫猜想的事，他表示了几点意见，一是不参与任何非学术性的关于哥德巴赫猜想的书的写作(但与我们数学工作室会有一个关于高斯《算术研究》译著的合作项目)，所以原本准备请潘先生写序，看来只好作罢.二是认为这是个敏感话题.因为潘先生已被“民科”们纠缠了近30年，不想再招惹他们.编者表达了编写此书的目的之一就是为了向“民科”们昭示一条证明哥德巴赫猜想的“阳关大道”，及指出攻克此猜想的极端困难性.但潘先生十分肯定地说：“这些统统没用，他们不会听，他们还要做.”其实我又何尝不是如此呢！

John Horton Conway 在《On Numbers and Games》这本书里的最后一个定理是：

定理100　这是本书最后一个定理.

证明是显然的.

本书的最后一句话为：向所有文献的原作者表示感谢，因为它们的部分之和构成了本书的全部.

证明也是显然的.

刘培杰

2008.4.8